

Mathematik für das Lehramt

LEHRBUCH

Oliver Deiser

Analysis 2

2. Auflage



Springer Spektrum

Mathematik für das Lehramt

Oliver Deiser

Analysis 2

2., überarbeitete und ergänzte Auflage

 **Springer** Spektrum

Oliver Deiser
TUM School of Education
Technische Universität München
München, Deutschland

ISBN 978-3-662-45692-7

ISBN 978-3-662-45693-4 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-45693-4

Mathematics Subject Classification (2010): 26-01

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

für Caroline, Thalia und Larina

Inhalt

Vorwort	7
Die Themen des Buches	9
Erster Abschnitt: Integration	15
1.1 Das Riemann-Integral	17
Motivationen	17
Die verschiedenen Integrationsbegriffe	18
Partitionen kompakter Intervalle	19
Riemann-Summen und Riemann-Integral	21
Elementare Eigenschaften des Integrals	25
Die Limesformulierung der Integrierbarkeit	27
Die Berechnung von Integralen durch Riemann-Summen	28
Eine numerische Betrachtung	30
Das Integral als Mittelwert	31
Das Integral für komplexwertige Funktionen	33
Ausblick: Die Quadratur der Parabel bei Archimedes	34
1.2 Darboux-Integral und Jordan-Inhalt	37
Darboux-Summen	37
Das Ober-, Unter- und Darboux-Integral	38
Die Äquivalenz der Integrale	40
Flächenmessungen in der Ebene	41
Der Jordan-Inhalt	42
Ausblick: Inhalte	45
1.3 Integrierbare Funktionen	49
Treppenfunktionen	49
Stetige Funktionen	53
Monotone Funktionen	54
Funktionen mit beschränkter Variation	55
Regelfunktionen und Regelintegral	59
Komposition und Produkt	61
Die Zerlegung in Positiv- und Negativteil	63
Eine Verletzung der Integrierbarkeitsbedingung	64
Zur Vertauschbarkeit von Integration und Limesbildung	65
Ausblick: Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit	68

Stammfunktionen	71
Hauptsatz I: Die Berechnung von Integralen durch Stammfunktionen	72
Hauptsatz II: Die Existenz von Stammfunktionen für stetige Funktionen	76
Zusammenfassung	78
Stammfunktionen und Integrierbarkeit	79
Ausblick: Zur Ableitung der Integralfunktion	80

Die partielle Integration	83
Die Substitutionsregel	86
Die Kreiszahl π ist irrational	94
Die Taylor-Formel mit integrelem Restglied	95
Der Vertauschungssatz für Ableitungen	97
Ausblick: Die Kreisberechnung bei Archimedes	99

Das uneigentliche Riemann-Integral	103
Das Integralvergleichskriterium	105
Die Euler-Mascheroni-Konstante	106
Die Gaußsche Glockenkurve	109
Die Zissoide des Diokles	110
Ausblick: Gauß-Integral und Gamma-Funktion	113

Zweiter Abschnitt: Topologische Grundbegriffe..... 123

Einfache Mengen reeller Zahlen	125
Offene Mengen	127
Umgebungen	129
Abgeschlossene Mengen	131
Die Punktmengenableitung	134
Perfekte Mengen	136
Randpunkte und Rand einer Menge	137
Topologische Operatoren	138
Cantor-Menge und Cantor-Funktion	139
Ausblick: G_δ -, F_σ -Mengen und Bairescher Kategoriensatz	144

Relativbegriffe	151
Die topologische Umgebungsstetigkeit	153
Die Urbildformulierung der Stetigkeit in allen Punkten	155
Stetigkeit als Erhalt von Nähe	157
Ausblick: Stetigkeitsmengen	159

2.3 Metrische Räume 163

Abstände und Normen	163
Produkte von metrischen Räumen	166
Abstände aus Normen	167
Die p-Normen	168
Normen aus Skalarprodukten	171
Parallelogrammgleichung und Polarisierung	172
Normen für Matrizen	174
Erweiterung des Messens	176
Semimetriken und Seminormen	177
Konvergenz und Vollständigkeit in metrischen Räumen	178
Die Vervollständigung eines metrischen Raumes	180
Stetigkeit in metrischen Räumen	182
Der Banachsche Fixpunktsatz	185
Ausblick: Metrisierung von unendlichen Produkten	188

2.4 Topologie metrischer Räume 191

Die topologische Stetigkeit	193
Numerische und topologische Äquivalenz	194
Zusammenhang und Zusammenhangskomponenten	195
Der Wegzusammenhang	197
Separable metrische Räume und abzählbare Basen	199
Topologische Räume	201
Metrisierbarkeit von topologischen Räumen	204
Die topologische Stetigkeit, II.	205
Ausblick: Konvergenz in topologischen Räumen	206

2.5 Kompaktheit in \mathbb{R} 209

Überdeckungen	209
Offene Überdeckungen kompakter Intervalle	211
Der topologische Kompaktheitsbegriff	212
Charakterisierung der kompakten Teilmengen von \mathbb{R}	214
Stetige Bilder kompakter Mengen	215
Der Satz von Heine	218
Ausblick: Beweis der Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit	219

2.6 Kompakte metrische Räume 221

Kompaktheit in metrischen Räumen	221
Kompaktheit versus „abgeschlossen und beschränkt“	223
Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft und Folgenkompaktheit	225
Die Kompaktheit von Produkten	228
Kompaktheit und Beschränktheit	229
Stetige Funktionen auf kompakten Räumen	231
Lebesgue-Zahlen und der Satz von Heine	233
Kompakte topologische Räume	234
Ausblick: Die Hausdorff-Metrik	235

Dritter Abschnitt: Mehrdimensionale Differentiation . . 243**3.1 Kurven 245**

Kurven und Parametrisierungen	245
Tangentialvektoren und Momentangeschwindigkeiten	250
Ausblick: Peano-Kurven	252

3.2 Rektifizierbare Kurven 257

Die Länge einer Kurve	257
Rektifizierbarkeit und beschränkte Variation	266
Kurvenintegrale für reellwertige Funktionen	271
Ausblick: Kurvenintegrale für Vektorfelder	273

3.3 Mehrdimensionale Differenzierbarkeit 275

Mehrdimensionale Funktionen und ihre Visualisierung	275
Jacobi-Matrix und Differential	280
Das Differential als Funktion	286
Mehrdimensionale Ableitungsregeln	287
Der Mittelwertsatz	289
Implizite Funktionen	291
Ausblick: Beweis des Hauptsatzes über implizite Funktionen . .	295

3.4 Partielle Ableitungen 297

Das Differenzierbarkeitskriterium	301
Mehrfache partielle Ableitungen	303
Parameterabhängige Integrale	306
Ausblick: Gegenbeispiele	308

3.5 Die Differentialoperatoren 313

Gradient, Richtungsableitung und Nabla-Operator	313
Vektorfelder und Gradientenfelder	317
Divergenz eines Vektorfeldes und Laplace-Operator	320
Die Rotation	322
Rechenregeln für die Differentialoperatoren	323
Ausblick: Kurvenintegrale in Gradientenfeldern	325

3.6 Taylor-Entwicklung und lokale Extremwerte 329

Vorbereitungen	329
Mehrdimensionale Taylor-Polynome	331
Schmiegequadriken	334
Eine alternative Darstellung der Taylor-Polynome	336
Der Satz von Taylor	337
Lokale Extremwerte	340
Bedingte Extremalstellen und Lagrange-Multiplikatoren	344
Tangentialräume	348
Ausblick: Eigenwerte symmetrischer Matrizen	351

Vierter Abschnitt: Überblickswissen

Fourier-Reihen 355

Trigonometrische Reihen	357
Reelle und komplexe Fourier-Reihen	362
Der Konvergenzsatz von Dirichlet	371
Die Bessel-Ungleichung und gleichmäßige Konvergenz	375
Weitere Konvergenzergebnisse	377
Bestimmung einiger Fourier-Reihen	378
Die Konvergenz im quadratischen Mittel	385
Der Konvergenzsatz für integrierbare Funktionen	389
Der Satz von Parseval	395
Ausblick: Die Fourier-Transformation	396

Fünfter Abschnitt: Überblickswissen

Gewöhnliche Differentialgleichungen 401

Erste Beispiele	403
Differentialgleichungen und Anfangswertprobleme	407
Das Richtungsfeld	409
Lineare Differentialgleichungen	411
Differentialgleichungen mit getrennten Variablen	414
Die Differentialgleichung $y'' = \varphi(y)$	418
Der Existenz- und Eindeigkeitssatz	421
Systeme von Differentialgleichungen	427
Lineare Systeme	431
Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ..	433
Der harmonische Oszillator	435
Matrixexponentiale	438
Die ortsabhängige Beschleunigung in einer Dimension	441
Ausblick: Kreispendedel und Zykloidenpendel	445

Sechster Abschnitt: Überblickswissen

Mehrdimensionale Integration 453

Das Riemann-Integral für höhere Dimensionen	455
Mehrfache eindimensionale Integrale	460
Das Cavalierische Prinzip	462
Inhalte von Rotationsflächen	468
Polar- und Zylinderkoordinaten	472
Die Transformationsformel	481
Ausblick: Oberflächen von Funktionsgraphen	483

Exkurs: Von der Partialbruchzerlegung zu den elliptischen Funktionen 489

Die Partialbruchzerlegung	491
Zur Integration rationaler Funktionen	494
Elliptische Integrale	496
Elliptische Funktionen	502
Die Lösung des Kreispendedels	507

Ergänzungen 513

E1	Anschauung und Definition des Integrals	515
E2	Aneignung des Integralbegriffs	518
E3	Diskussion des Hauptsatzes	520
E4	Die Cantor-Menge	522
E5	Topologische Visualisierungen	524
E6	Kompaktheitsargumente	527
E7	Die Sektorformel von Leibniz	529
E8	Der Ableitungsbegriff im \mathbb{R}^n	531
E9	Gradient, Divergenz und Rotation	533
E10	Kennenlernen von Fourier-Reihen	535
E11	Das Fadenpendel	537
E12	Doppelintegrale und Cavalierisches Prinzip	539

Übungen 543**Anhänge 595****A1 Bezüge zur Schulmathematik 597**

Elementare geometrische Figuren und ihre Inhalte	597
Kreise und Kegel	598
Kraft, Masse und Beschleunigung	598
Die Kugel	598
Die Keplerschen Gesetze	599
Bewegungsgleichungen	599
Das kanonische Skalarprodukt	600
Die Integralrechnung und der Hauptsatz	600

A2 Literatur 601**A3 Notationen 603****A4 Index 605**

Vorwort

Dieses Buch beruht wie der erste Band „Analysis 1“ auf Vorlesungen an der TU München, die für Studenten des Lehramts an Gymnasien entwickelt wurden. Angestrebt wurde eine einführende Darstellung, die neben systematischem Wissen auch Überblick, Orientierung und Neugierde fördert. Die beiden Bände zusammengekommen sollten zudem ein inhaltlich reichhaltiges und abgerundetes Ganzes bilden, um sich auch im weiteren Studium und im Lehrberuf zum Nachschlagen, Wiederholen und Dazulernen zu eignen. Da der Text auf begriffliche Grundlagen und präzise mathematische Argumentation großen Wert legt, ist er gewiss auch für Fachstudenten passend.

In den ersten drei Abschnitten behandeln wir ausführlich die eindimensionale Integration, topologische Grundbegriffe und die mehrdimensionale Differentiation. Danach stellen wir in drei weiteren Abschnitten Fourier-Reihen, gewöhnliche Differentialgleichungen und die mehrdimensionale Integration im Überblick vor. Mit Ausnahme der mehrdimensionalen Integration, die ja üblicherweise Thema einer weiteren Vorlesung ist, enthalten alle Abschnitte vollständige Beweise und daneben auch zahlreiche Ausblicke, für deren Behandlung in der Vorlesung oft keine Zeit ist. Insgesamt enthält das Buch ausreichend Anregungen und Material für ein begleitendes Proseminar. Eine genauere Übersicht über die Themen der Abschnitte geben wir im Anschluss an das Vorwort.

Zu den ersten Lesern des Manuskripts gehörten Florian Quiring und Michael Vogt, und ihre hilfreichen Kommentare haben den Text an zahlreichen Stellen verbessert. Clemens Heine (Springer Spektrum) hat das Projekt wie immer sachkundig begleitet und umgesetzt. Ermöglicht wurden die beiden Bände auch durch die Deutsche Telekom Stiftung, die die Entwicklung und mehrmalige Durchführung einer zweisemestrigen „Analysis für das Lehramt an Gymnasien“ im Rahmen eines umfassenden Projekts zur Lehrerbildung an der TU München stark gefördert hat. Dies gilt auch für Kristina Reiss, der dafür und für vieles andere mein besonderer Dank gilt.

München, im Dezember 2012

Oliver Deiser

Zur zweiten Auflage

Für die Neuauflage wurde der Text vollständig überarbeitet und stark erweitert. Der Aufbau wurde der zweiten Auflage des ersten Bandes angeglichen. Viele neue Abbildungen sind hinzugekommen.

Mein Dank gilt erneut Florian Quiring für die sorgfältige und kritische Lektüre des Manuskripts. Besonders danken möchte ich Heinz König – Vorbild in vielerlei Hinsicht – für die zahlreichen Gespräche über die Analysis und die Mathematik.

München, im Oktober 2014

Oliver Deiser

Die Themen des Buches

Die Analysis wartet mit einer überwältigenden Fülle an spannenden Themen auf. Sobald die Differentiation und Integration auf der Grundlage des Zahl- und Grenzwertbegriffs etabliert ist, eröffnen sich viele Verzweigungen mit unterschiedlichem Charakter. Dazu gehören:

- (1) metrische und topologische Räume mit ihrer fast ungeheuer zu nennenden Erweiterung des Grenzwert- und Stetigkeitsbegriffs,
- (2) die Untersuchung von Teilmengen von reellen Zahlen und die so spürbar werdende Magie des Kontinuums und der Grundlagen der Mathematik,
- (3) die mehrdimensionale Differentiation mit Tangentialvektoren und linearen Abbildungen als Ableitungen,
- (4) die in jeder Hinsicht schwergewichtigen Fourier-Reihen mit ihrem faszinierenden Leitmotiv „Alles ist eine Schwingung“,
- (5) Differentialgleichungen mit unzähligen naturwissenschaftlichen Anwendungen, die weit über „Kraft ist Masse mal Beschleunigung“ hinausgehen,
- (6) die mehrdimensionale Integration mit Volumenberechnungen, Koordinatentransformationen und den großen Integralsätzen von Gauß und Stokes,
- (7) die Differentialgeometrie mit Karten, gekrümmten Flächen und allgemeinen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten,
- (8) die Funktionentheorie als elegante komplexe Version der reellen Analysis,
- (9) die Variationsrechnung zur Behandlung von Optimierungsproblemen,
- (10) die allgemeine Maß- und Integrationstheorie und der Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie mit ihrer Hilfe,
- (11) die Funktionalanalysis mit Funktionen als Vektoren und neuen Konvergenzbegriffen,
- (12) irdische Fragen der Approximationstheorie und Numerik.

Ein zweites einführendes Analysis-Buch kann einiges systematisch und anderes exemplarisch oder im Überblick behandeln, vieles muss weiterführenden Darstellungen überlassen bleiben. Wir wollen die Themen, die für dieses Buch ausgewählt wurden, nun genauer vorstellen. Die Größe des Wissensfeldes, die sich früh erahnen lässt, gibt dabei Anlass zu abstrakten und allgemeinen Begriffsbildungen. Sie vertiefen nicht nur unser bisheriges Verständnis, sondern ermöglichen auch neue Untersuchungen und besitzen eine ordnende und vernetzende Kraft.

Erster Abschnitt: Integration

Die Integration ist neben der Differentiation die zweite tragende Säule der Analysis, und eine gründliche Einführung in diesen faszinierenden und vielschichtigen Begriff zu geben, ist eines der Hauptanliegen des Buches. Nach einer Motivation des Integrals – Flächenmessung, Finden von Stammfunktionen, Mittelwertbildung, physikalische Bedeutungen – betrachten wir Partitionen von Intervallen, Riemann-Summen und das Riemann-Integral. Eine Untersuchung der Integrierbarkeitsbedingung führt uns zum gleichwertigen Darboux-Integral, das die aus der Schule bekannten Ober- und Untersummen in den Vordergrund rückt. Schließlich ermöglicht der Jordan-Inhalt für Teilmengen der Ebene eine Präzisierung der Interpretation des Integrals als Flächeninhalt.

Das dritte Kapitel ist der begrifflichen Untersuchung des Integrals gewidmet. Wir zeigen, dass Treppenfunktionen, stetige Funktionen, monotone Funktionen sowie Funktionen mit beschränkter Variation integrierbar sind. In natürlicher Weise fällt dabei das engere Regelintegral mit ab. Es bildet einen instruktiven Kontrast zum Riemann-Integral und illustriert, dass Integrieren nicht nur im Hinblick auf kalkulatorische Probleme schwieriger und subtiler ist als Differenzieren. Diese Sicht wird durch Beispiele für nicht-integrierbare Funktionen noch verstärkt. Weiter behandeln wir die Vertauschbarkeit von Limesbildung und Integration und in einem Ausblick charakterisieren wir die Riemann-integrierbaren Funktionen mit Hilfe des elementar zugänglichen Begriffs einer Lebesgue-Nullmenge als „fast überall“ stetige Funktionen.

Das Thema des vierten und fünften Kapitels ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Er zeigt, dass die beiden Säulen der Analysis aus dem gleichen Marmor gemacht sind und erlaubt uns die einfache Bestimmung von vielen Integralen. Wir diskutieren zwei Versionen. In der ersten werden Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet, in der zweiten Stammfunktionen durch Integration konstruiert. Der Hauptsatz hat zahlreiche Anwendungen: wir können den Kalkül der Integration durch die partielle Integration und die Substitutionsregel erweitern, die Kreiszahl π als irrational erkennen und neue Beweise für den Satz von Taylor und das gliedweise Differenzieren geben. Als Kontrast betrachten wir die Kreisberechnung bei Archimedes.

Im letzten Kapitel des Abschnitts führen wir uneigentliche Integrale ein, die unbeschränkte Flächenmessungen ermöglichen. Wir diskutieren das Integralvergleichskriterium, die Euler-Mascheroni-Konstante, die Zissoide des Diokles, die Gaußsche Glockenkurve und die Eulersche Gamma-Funktion.

Zweiter Abschnitt: Topologische Grundbegriffe

Im Zentrum dieses Abschnitts stehen Begriffe für Punktmengen wie zum Beispiel „offene Menge“, „Umgebung eines Punktes“, „abgeschlossene Menge“, „Häufungspunkt einer Menge“, „Inneres, Abschluss und Rand einer Menge“, „zusammenhängende Menge“, „dichte Menge“. Wir diskutieren diese Begriffe in Übereinstimmung mit der historischen Entwicklung zunächst anhand der reellen Zahlen, also auf einer festen Bühne, mit der der Leser vertraut ist. Dabei lernen wir die Cantor-Menge als Beispiel für eine komplizierte, aber noch beherrschbare Teilmenge von \mathbb{R} kennen. Weiter formulieren wir die ε - δ -Stetigkeit einer reellen Funktion in der neuen topologischen Sprache, was einen ansprechenden Beweis des Zwischenwertsatzes und eine Präzisierung der Intuition der Stetigkeit als „Erhalt von Nähe“ ermöglicht.

Im dritten Kapitel besprechen wir die metrische Räumen, die aus einer Axiomatisierung des Abstandsbegriffs für Punkte hervorgehen. Abstandsfunktionen gewinnen wir insbesondere aus Normen auf Vektorräumen und Normen wiederum aus Skalarprodukten. Die Konvergenz von Folgen und die Stetigkeit von Funktionen lassen sich nun ganz allgemein in metrischen Räumen betrachten, wodurch der bisherige auf \mathbb{R} , \mathbb{C} und Funktionenfolgen beschränkte Rahmen eine enorme Erweiterung erfährt. Und auch die für \mathbb{R} entwickelte topologische Begriffswelt lässt sich ohne Mühe in das Reich der metrischen Räume übertragen. Von besonderem Interesse ist der Begriff des Zusammenhangs, den wir in zwei verschiedenen Interpretationen diskutieren. Schließlich führen wir die allgemeineren topologischen Räume ein und stellen die Frage nach ihrer Metrisierbarkeit. Ein Ausblick behandelt die topologische Konvergenz.

Die beiden letzten Kapitel sind dem topologischen Kompaktheitsbegriff gewidmet. Wir führen den von Anfängern oft als schwierig empfundenen Begriff zunächst für das Kontinuum ein und zeigen den Satz von Heine-Borel, demgemäß die kompakten Mengen in \mathbb{R} genau die abgeschlossenen und beschränkten Mengen sind. Weiter zeigen wir, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum und ihr Minimum annehmen und automatisch gleichmäßig stetig sind. Damit erscheint die Kompaktheit als topologische Essenz der besonderen Eigenschaften der reellen Intervalle $[a, b]$. Als Anwendung zeigen wir, dass je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen reellen oder komplexen Vektorraum äquivalent sind. Weiter beweisen wir die im ersten Abschnitt angegebene Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit. Aufbauend auf diese Erfahrungen in \mathbb{R} untersuchen wir kompakte Mengen in beliebigen metrischen Räumen. Der Satz von Heine-Borel ist hier im Allgemeinen nicht mehr gültig. Jedoch ist eine Charakterisierung der Kompaktheit mit Hilfe konvergenter Teilfolgen möglich, in Erweiterung des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Die für die reellen Zahlen durchgeführte Analyse stetiger Funktionen auf kompakten Mengen ergänzen wir im allgemeinen Rahmen durch den Homöomorphiesatz und einen neuen Beweis der automatischen gleichmäßigen Stetigkeit mit Hilfe der Lebesgue-Zahl einer Überdeckung. Der Abschnitt schließt mit einem Blick auf die Hausdorff-Metrik und der Konstruktion fraktaler Gebilde wie dem Sierpinski-Dreieck und der Koch-Kurve.

Dritter Abschnitt: Mehrdimensionale Differentiation

Gegenstand dieses Abschnitts sind differenzierbare Funktionen, die auf einer Teilmenge eines Raumes \mathbb{R}^n definiert sind und Werte in einem Raum \mathbb{R}^m annehmen. Die eindimensionale Differentiation entspricht also dem Fall $m = n = 1$.

In den beiden ersten Kapiteln betrachten wir $n = 1$, $m \geq 1$ und stetige Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, sogenannte Kurven. Die Ableitung einer Kurve kann über die Ableitung ihrer Komponenten erklärt und durch Tangentialvektoren veranschaulicht werden. Ein Ausblick über Peano-Kurven zeigt, dass raumfüllende Kurven existieren, die unseren Dimensionsbegriff in Frage stellen. Stetig differenzierbaren Kurven können wir dagegen eine Länge zuweisen, die wir in Analogie zur Riemann-Integrierbarkeit definieren. Wir begründen eine Formel für die Längenberechnung physikalisch und berechnen die Längen von Zykloiden, Ellipsen, Lemniskaten und anderen Kurven. Danach beweisen wir die Formel mit Hilfe des Variationsbegriffs. Weiter führen wir Kurvenintegrale für skalare und vektorwertige Funktionen ein. Eine Ergänzung behandelt die Sektorformel von Leibniz.

Ab dem dritten Kapitel lassen wir mehrdimensionale Definitionsbereiche zu. Die uns aus dem Eindimensionalen bekannte Linearisierung steht im Zentrum. An die Stelle von Ableitungszahlen treten Jacobi-Matrizen und die zugehörigen linearen Abbildungen. Wie früher gewinnen wir Ableitungsregeln, und auch eine Version des Mittelwertsatzes gilt. Mit dem Hauptsatz über implizite Funktionen lernen wir einen der wichtigsten Sätze der Analysis kennen. Wir motivieren ihn durch das Lösen von Gleichungssystemen und gewinnen aus ihm den Satz über die Umkehrfunktion und den Offenheitssatz. In einem Ausblick geben wir einen kurzen Beweis mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Im vierten Kapitel verlassen wir das Thema „Linearisierung“ kurzfristig zugunsten partieller Ableitungen, bei denen wir eine Komponente der betrachteten Funktion nach einer gewissen Variablen differenzieren und die anderen Variablen wie Konstanten behandeln. Wir sehen, dass die Jacobi-Matrix aus allen möglichen partiellen Ableitungen gebildet ist und dass die Stetigkeit der partiellen Ableitungen die Differenzierbarkeit garantiert. Weiter beweisen wir den Satz von Schwarz über mehrfache partielle Ableitungen und einen Vertauschungssatz über partielle Ableitung und Integration. Zur Klärung der Verhältnisse untersuchen wir eine Reihe von Gegenbeispielen.

Im fünften und sechsten Kapitel stellen wir Anwendungen der Theorie vor. Wir besprechen Gradienten, Richtungsableitungen, die Divergenz, Rotation und den Laplace-Operator sowie Kurvenintegrale in Gradientenfeldern. Weitere Anwendungen liefert die mehrdimensionale Taylor-Entwicklung. Sie spielt insbesondere in der mehrdimensionalen Kurvendiskussion eine Schlüsselrolle, zu deren Hauptaufgaben wie im Eindimensionalen das Auffinden von lokalen Extrema gehört. Wir zeigen, wie sich der Gradient und die Hesse-Matrix einer Funktion zur Identifikation lokaler Extremalstellen einsetzen lassen. Zudem untersuchen wir bedingte lokale Extrema, die Multiplikatorregel von Lagrange und Tangentialräume. Der Abschnitt schließt mit einem Ausblick über analytische Beweise des Spektralsatzes der Linearen Algebra.

Vierter Abschnitt: Überblickswissen Fourier-Reihen

Wir gehen der mathematisch, naturwissenschaftlich, technisch und historisch bedeutsamen Frage nach, ob und wie sich periodische Funktionen als unendliche Überlagerung von Elementarschwingungen darstellen lassen. Nachdem wir das Problem zur Vereinfachung nach \mathbb{C} übersetzt haben, beweisen wir klassische Konvergenzergebnisse: den punktweisen Konvergenzsatz von Dirichlet mit Hilfe des Lemmas von Riemann, den gleichmäßigen Konvergenzsatz mit Hilfe der Besselschen Ungleichung sowie den Satz über die Konvergenz im quadratischen Mittel mit Hilfe eines Skalarprodukts für periodische Funktionen. In einem Ausblick diskutieren wir die Fourier-Transformation.

Fünfter Abschnitt: Überblickswissen Gewöhnliche Differentialgleichungen

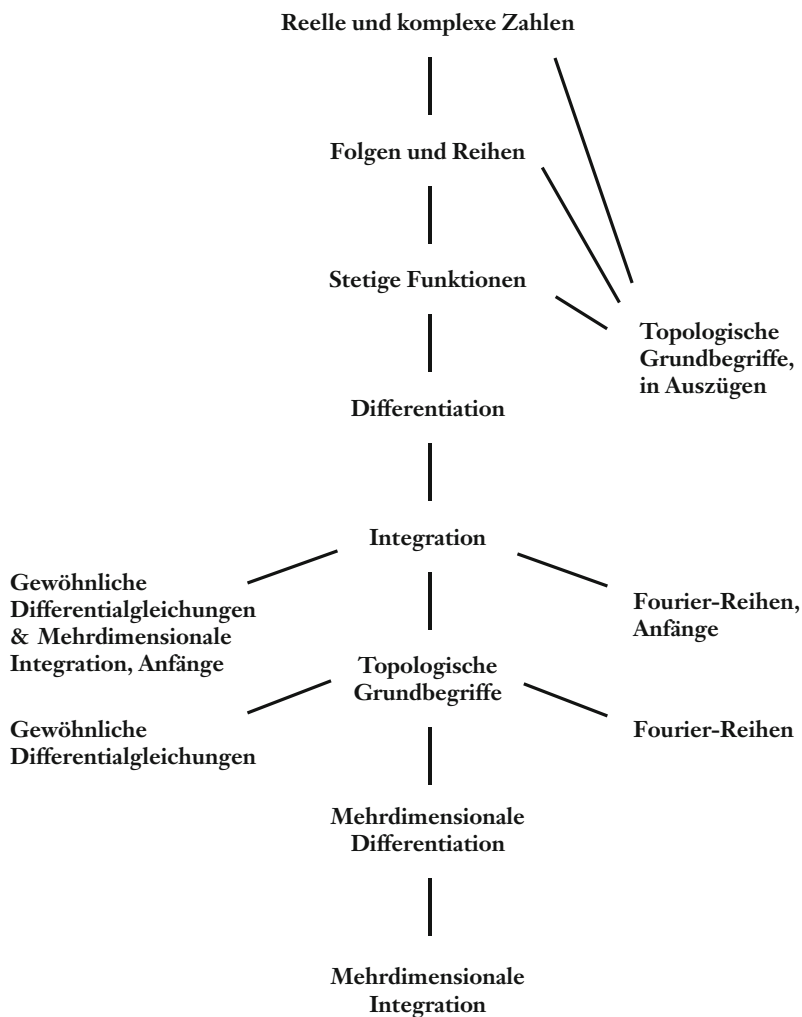
Anhand einfacher Gleichungen wie $y'' = 0$, $y' = cy$ oder $y'' = -y$ motivieren wir Differentialgleichungen und Anfangswertprobleme. Nach einer Visualisierung der Problemstellung durch Richtungsfeldern untersuchen wir lineare Differentialgleichungen und solche mit getrennten Variablen. Diesen speziellen Lösungsverfahren stellen wir einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz zur Seite, den wir unter Einsatz des Banachschen Fixpunktsatzes beweisen. Nun betrachten wir lineare Systeme und als wichtige physikalische Anwendung den gedämpften harmonischen Oszillator. Physikalisch motiviert ist auch die Modellierung einer ortsabhängigen Beschleunigung, die wir exemplarisch anhand des Kreispendels genauer ausführen.

Sechster Abschnitt: Überblickswissen Mehrdimensionale Integration

Wir erweitern das Riemann-Integral auf Funktionen mit mehrdimensionalen Definitionsbereichen. Der enge Zusammenhang mit dem Jordan-Inhalt bleibt dabei bestehen. Weiter zeigt sich, dass das mehrdimensionale Integral oft als mehrfaches eindimensionales Integral dargestellt werden kann, sodass der eindimensionale Kalkül eingesetzt werden kann. Über die Berechnung des Kugelvolumens gelangen wir zum Cavalierischen Prinzip und über Kegelstümpfe zu einer anschaulich begründeten Formel für den Inhalt von Rotationsflächen, die wir auf Kugeln, Tori und Rotations-Ellipsoide anwenden. Danach führen wir ebene und räumliche Polarkoordinaten sowie Zylinderkoordinaten ein und bereiten so die allgemeine Transformationsformel vor. In einem Ausblick untersuchen wir die Oberflächeninhalte von Funktionsgraphen.

Exkurs: Von der Partialbruchzerlegung zu den elliptischen Funktionen

Durch Partialbruchzerlegung können wir zeigen, dass jede rationale Funktion eine elementare Stammfunktion besitzt. Die Frage, wie sich dieses Ergebnis noch verbessern lässt, führt uns zu den elliptischen Integralen, denen wir im Verlauf schon mehrfach begegnet sind. Wir führen elliptische Funktionen ein, mit deren Hilfe wir das Kreispendel lösen.



Das Diagramm visualisiert in vereinfachter Form die Abhängigkeiten der zehn Abschnitte der beiden Bände. Von den Zahlen führt ein natürlicher Weg zur Integration. Die Topologie kann prinzipiell sehr früh studiert werden, wobei der Abstraktionsgrad hier streckenweise recht hoch ist und zuweilen auch auf die Integration Bezug genommen wird. Der Abschnitt über Fourier-Reihen kann gleich nach der Integration gelesen werden und eignet sich auch als Grundlage eines begleitenden Proseminars; am Ende werden einige metrische Begriffe verwendet, die aber im Text auch an Ort und Stelle erklärt werden. In die Abschnitte über gewöhnliche Differentialgleichungen und die mehrdimensionale Integration kann man ebenfalls hineinlesen, sobald man die eindimensionale Differentiation und Integration beherrscht. Gleiches gilt auch für den Exkurs.

1. Abschnitt

Integration

1. Das Riemann-Integral

In diesem Kapitel entwickeln wir die Grundlagen der eindimensionalen reellen Integrationstheorie. Wir definieren das Riemann-Integral und das aus der Schule anschaulich bekannte äquivalente Darboux-Integral. Eine Schlüsselrolle spielen dabei Partitionen von Intervallen mit und ohne Stützstellen. Zur Präzisierung der Idee der Flächenmessung diskutieren wir den Jordan-Inhalt für die Ebene und seine enge Beziehung zum Riemann-Integral.

Motivationen

Der Integralbegriff lässt sich auf vielerlei Arten motivieren:

- (1) Flächenmessung: Welchen Inhalt hat die von der Parabel $f(x) = x^2$ und der x -Achse im Intervall $[0, 1]$ eingeschlossene Fläche? Welchen Inhalt hat die von $\cos(x)$ und der x -Achse im Intervall $[0, 2]$ eingeschlossene Fläche, wenn die Fläche unterhalb der x -Achse negativ zählt? Welchen Inhalt haben Teilmenge der Ebene wie Kreise, Ellipsen, Kleeblätter?
- (2) Auffinden von Stammfunktionen: Wann und wie findet man, gegeben f , eine Stammfunktion von f , d.h. eine Funktion F mit $F' = f$?
- (3) Mittelwertbildung: Welchen mittleren Wert besitzt eine auf $[a, b]$ definierte Funktion f ?
- (4) Physikalische Fragen: Welchen Weg legt ein Körper zurück, der sich zur Zeit $t \in [a, b]$ mit der Geschwindigkeit $v(t)$ bewegt? Welche Energie verbraucht ein elektrisches Gerät, das zur Zeit $t \in [a, b]$ die momentane Leistung $p(t)$ besitzt?

Im Folgenden lassen wir uns von der geometrischen Motivation der signierten, d.h. vorzeichenbehafteten Messung einer durch eine Funktion gegebenen Fläche leiten. Auf die Frage der Messung der Fläche einer beliebigen Teilmenge der Ebene gehen wir im Verlauf der Darstellung ein. Das Problem des Auffindens von Stammfunktionen wird das dritte Kapitel dominieren, und erst dann, wenn wir die Integration als Umkehrung der Differentiation erkannt haben, werden wir viele Integrale ohne Mühe berechnen können. Die Etappen des vor uns liegenden Weges sind also:

- geometrisch motivierte Konstruktion des Integrals,
- Untersuchung seiner elementaren Eigenschaften,
- Klärung des Zusammenhangs zwischen Integration und Differentiation,
- Etablierung eines Kalküls der Integration.

Die obigen Motivationen (3) und (4) spielen zunächst nur eine Nebenrolle, was ihr Gewicht nicht schmälert. Die auf den ersten Blick vielleicht etwas unscheinbare Mittelwertbildung (3) ist speziell für die Wahrscheinlichkeitstheorie von großer Bedeutung. Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen, also ihr „mit Wahrscheinlichkeiten gewichteter“ Mittelwert, wird dort mit Hilfe von Integralen definiert und untersucht. Weiter sind die in Punkt (4) angesprochenen physikalischen und naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen der Integrationstheorie kaum zu überblicken, und seit der Erfindung der Differential- und Integralrechnung bestehen enge Wechselwirkungen zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften. Der Mathematik kommt die Aufgabe zu, die Theorie zu etablieren, um sie in präziser, allgemeiner und abgesicherter Form den anderen Wissenschaften zur Verfügung stellen zu können.

Die verschiedenen Integrationsbegriffe

Wir werden im Verlauf der Darstellung das Riemann-Integral, das Darboux-Integral und das Regelintegral kennenlernen, und auch von einem Lebesgue-Integral wird die Rede sein. Der Leser wird sich nun vielleicht fragen:

Gibt es denn verschiedene Integrale?

Ist das Integral einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ etwa mehrdeutig?

Die Antwort auf die erste Frage ist: Ja, es gibt verschiedene Integrationsbegriffe! Die Antwort auf die zweite Frage ist: Nein, das Integral einer Funktion – eine reelle Zahl – ist für jeden Integrationsbegriff gleich, *wenn es denn definiert ist*. Es gilt:

*Die verschiedenen Integrationsbegriffe unterscheiden sich nur
durch die Menge der integrierbaren Funktionen.*

Das Integral der Sinus-Funktion auf $[0, 1]$ ist also für jedes Integral, das diese Funktion integrieren kann, $1 - \cos(1) = 0,4596\dots$, und nicht etwa $0,4453\dots$ für ein „A-Integral“ und $0,4623\dots$ für ein „B-Integral“. Es kann aber sein, dass eine Funktion f auf $[0, 1]$ zu kompliziert für das A-Integral ist, während sie mit dem B-Integral integriert werden kann. Ein Beispiel hierzu: Ein sehr einfaches Integral können wir erklären, indem wir das Integral einer konstanten Funktion f auf $[0, 1]$ mit $f(x) = c$ für alle x als c definieren. Dieses Integral kann den Sinus auf $[0, 1]$ nicht integrieren, stimmt aber auf seinem Definitionsbereich – den konstanten Funktionen auf $[0, 1]$ – mit allen umfassenderen Integralen wie dem Regel- oder Riemann-Integral überein.

Mathematiker möchten naturgemäß gerne möglichst viele Funktionen integrieren können und ein Integral mit bestmöglichen Eigenschaften zur Verfügung haben. Im Gegensatz zur Ableitung f' , die recht schnell definiert ist, ist die Einführung eines leistungsfähigen Integrals komplizierter und der Aufwand steigt mit der Menge der Funktionen, die erfasst werden sollen. Da man dem Anfänger nicht von Beginn an das sehr allgemeine, aber nicht leicht zu konstruierende Lebesgue-Integral zumuten möchte, begnügt man sich zunächst mit dem Riemann- bzw. Darboux-Integral, oder sogar mit dem noch etwas spezielleren Regelintegral. Diese Integrale sind nicht zuletzt auch im Hinblick auf die Mathematik der Schule besonders wichtig, und die Erfahrungen, die man mit ihnen sammelt, sind auch in der Lebesgueschen Integrationstheorie wertvoll. Die Schwächen dieser Integrale lassen sich zudem zur Motivation und Bewertung eines allgemeineren Integrals verwenden.

Wir stellen im Folgenden das Riemann-Integral in den Mittelpunkt. Es kann etwas mehr Funktionen integrieren als unbedingt nötig, aber auch weniger als möglich. Das Regelintegral fällt bei der Untersuchung des Riemann-Integrals in natürlicher Weise mit ab, und wir lernen so ein instruktives Beispiel für eine alternative und nicht äquivalente Konstruktion eines Integrals kennen. Beide Integrale sind attraktiv und anschaulich. Viele Motive tauchen auf, die später wiederkehren werden, um erweitert und variiert zu werden.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir nun ein ebenso einfaches wie wichtiges technisches Hilfsmittel einführen, das uns zusammen mit einer Grenzwertbildung überraschend schnell an unser erstes Ziel – der Definition des Riemann-Integrals – bringen wird:

Partitionen kompakter Intervalle

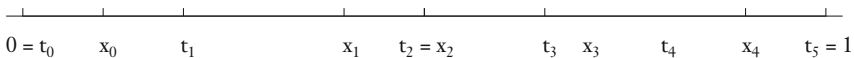
Definition (*Partition, Zerlegungspunkte, Stützstellen*)

Sei $[a, b]$ ein reelles Intervall. Weiter seien $t_0, \dots, t_n, x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$a = t_0 \leq x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq \dots \leq t_n \leq x_n \leq b.$$

Dann nennen wir $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ eine *Partition* von $[a, b]$ der *Länge* $n + 1$ mit *Zerlegungspunkten* t_k und *Stützstellen* x_k . Wir setzen zusätzlich immer

$$t_{n+1} = b.$$



Das Diagramm zeigt eine Partition $p = (t_k, x_k)_{k \leq 4}$ des reellen Intervalls $[0, 1]$. Die Länge der Partition ist 5. Die Stützstelle x_2 fällt mit dem Zerlegungspunkt t_2 zusammen (auch $x_2 = t_3$ wäre möglich). Per Konvention ist t_5 als 1 definiert. Die gezeigte Partition werden in diesem Kapitel noch mehrfach verwenden.

Weiter definieren wir:

Definition (*Feinheit einer Partition*)

Sei $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ eine Partition von $[a, b]$ und sei $\delta \geq 0$. Dann heißt p eine Partition der *Feinheit* δ oder eine δ -*Partition*, falls gilt:

$$t_{k+1} - t_k \leq \delta \quad \text{für alle } k \leq n.$$

Die reelle Zahl

$$\delta(p) = \max_{k \leq n} (t_{k+1} - t_k)$$

heißt die (*minimale*) *Feinheit* der Partition p .

Ist p eine Partition der Feinheit δ und $\delta' \geq \delta$, so ist p auch eine Partition der Feinheit δ' . Weiter ist jede Partition p eines Intervalls $[a, b]$ eine Partition der Feinheit $\delta(p)$, und es gilt $\delta(p) \leq b - a$.

Besonders einfache Partitionen erhalten wir, wenn wir das betrachtete Intervall in gleichlange Stücke zerlegen:

Definition (*äquidistante Partitionen*)

Eine Partition $(t_k, x_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$ heißt *äquidistant*, falls gilt:

$$t_{k+1} - t_k = \frac{b - a}{n + 1} \quad \text{für alle } k \leq n.$$

Für eine äquidistante Partition p von $[a, b]$ der Länge $n + 1$ gilt

$$\delta(p) = \frac{b - a}{n + 1} = t_1 - t_0.$$

Die Feinheiten einer Folge äquidistanter Partitionen, deren Längen gegen unendlich konvergieren, konvergieren damit gegen Null.

Wichtige Typen von Partitionen sind:

Definition (*linksseitige, mittige und rechtsseitige Stützstellen*)

Sei $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ eine Partition von $[a, b]$. Dann hat p

- (a) *linksseitige Stützstellen*, falls $x_k = t_k$ für alle $k \leq n$,
- (b) *mittige Stützstellen*, falls $x_k = (t_k + t_{k+1})/2$ für alle $k \leq n$,
- (c) *rechtsseitige Stützstellen*, falls $x_k = t_{k+1}$ für alle $k \leq n$.

Für die äquidistante Partition $p = (t_k, x_k)_{k \leq 3}$ von $[0, 1]$ der Länge 4 mit mittigen Stützstellen gilt zum Beispiel

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{4}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = \frac{3}{4}, \quad t_4 = 1,$$

$$x_0 = \frac{1}{8}, \quad x_1 = \frac{3}{8}, \quad x_2 = \frac{5}{8}, \quad x_3 = \frac{7}{8}.$$

Riemann-Summen und Riemann-Integral

Wir betrachten zunächst nur Funktionen, die auf kompakten Intervallen $[a, b]$ definiert sind. (Später werden wir auch halboffene, offene und auch unbeschränkte Definitionsbereiche mit einbeziehen.) Mit Hilfe des Partitionsbegriffs können wir endliche Summen definieren, die Approximationen an den gesuchten signierten Flächeninhalt einer Funktion f auf $[a, b]$ darstellen:

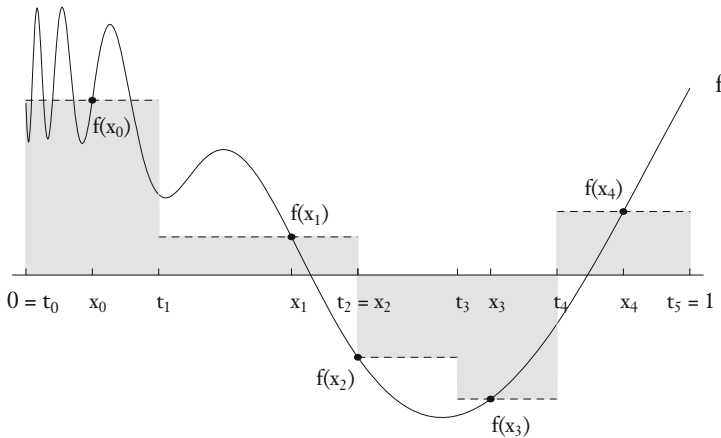
Definition (*Riemann-Summe bzgl. einer Partition*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ eine Partition von $[a, b]$. Dann setzen wir:

$$\sum_p f = \sum_{k \leq n} f(x_k) (t_{k+1} - t_k).$$

Die reelle Zahl $\sum_p f$ heißt die *Riemann-Summe* der Funktion f bzgl. der Partition p .

Wir werten also f an den Stützstellen einer Partition aus und multiplizieren diese Werte mit den Längen der zugehörigen Partitionsintervalle. Die Summe dieser Produkte ist die Riemann-Summe von f bzgl. p .



Visualisiert ist die Riemann-Summe einer Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ für die obige Partition $p = (t_k, x_k)_{k \leq 4}$ von $[0, 1]$. Die reelle Zahl $\sum_p f$ ist der signierte Inhalt der grauen Fläche.

Feinere Partitionen liefern in der Regel bessere Approximationen an den gesuchten Flächeninhalt. Streben die Riemann-Summen $\sum_p f$ bei immer feineren Partitionen gegen eine gewisse reelle Zahl c , so sehen wir c als den gesuchten Flächeninhalt an. Wir erhalten so den klassischen Integrationsbegriff der Analysis:

Definition (*Riemann-Integrierbarkeit und Riemann-Integral*)

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*Riemann-*) *integrierbar*, falls gilt:

Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit:

Für alle Partitionen p von $[a, b]$ der Feinheit δ gilt $|\sum_p f - c| < \varepsilon$.

(*Integrierbarkeitsbedingung*)

Die reelle Zahl c heißt dann das (*bestimmte*) (*Riemann-*) *Integral* von f , und wir schreiben

$$c = I(f) = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots$$

Weiter setzen wir:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{Rückwärtsintegral})$$

In kompakter Quantorenschreibweise lautet die Integrierbarkeitsbedingung:

$$\exists c \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall p (\delta(p) \leq \delta \rightarrow |\sum_p f - c| < \varepsilon),$$

wobei wir vereinbaren, dass der Allquantor über p sich auf alle Partitionen

$$p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$$

von $[a, b]$ bezieht. Die Definition ist aus logischer Sicht also relativ komplex, insgesamt vier Existenz- und Allquantoren wechseln sich ab. Wir werden die Bedingung im Folgenden genauer untersuchen und dabei auch eine Reihe von äquivalenten Formulierungen kennenlernen. Kurz lässt sie sich so zusammenfassen:

*Die Riemann-Summen $\sum_p f$ liegen beliebig nahe bei c ,
falls p hinreichend fein ist.*

Eine erste Diskussion des Integralbegriffs

Leicht zu sehen ist:

Satz (*Eindeutigkeit des Integrals*)

Das Integral c einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist im Fall der Existenz eindeutig bestimmt.

Ebenso sind integrierbare Funktionen automatisch beschränkt:

Satz (*Beschränktheit integrierbarer Funktionen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist f beschränkt.

Die Beweise der beiden Sätze können dem Leser überlassen bleiben. Schwieriger zu zeigen ist dagegen, dass man sich in der Definition des Integrals auf äquidistante Partitionen beschränken kann. Hierzu definieren wir:

Definition (*äquidistante Integrierbarkeit*)

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *äquidistant integrierbar*, falls gilt:

Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit:

Für alle äquidistanten Partitionen p von $[a, b]$ der Feinheit δ gilt
 $|\sum_p f - c| < \varepsilon.$ (*äquidistante Integrierbarkeitsbedingung*)

Es gilt:

Satz (*Beschränkung auf äquidistante Partitionen*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist integrierbar.
- (b) f ist äquidistant integrierbar.

Der Beweis der nichttrivialen Implikation von (b) nach (a) wird relativ einfach, wenn Darboux'sche Ober- und Untersummen zur Verfügung stehen. Wir werden diese Summen im nächsten Kapitel einführen und dann auf die äquidistanten Partitionen zurückkommen. Man könnte sich in der Definition der Integrierbarkeit von vornherein auf äquidistante Partitionen beschränken. Dies erscheint aber sowohl aus theoretischer wie auch aus numerischer Sicht unnatürlich. Zudem lauern hier versteckte Gefahren: Beschränkt man sich auf äquidistante Partitionen und zudem auf linksseitige, mittige oder rechtsseitige Stützstellen, so geht die Äquivalenz zur Riemann-Integrierbarkeit verloren (ein Beispiel hierfür werden wir in 1.3 kennenlernen). Diese Überlegungen zeigen bereits, dass der Integrationsbegriff wesentlich subtiler ist als der Begriff der Ableitung.

Bemerkungen zur Notation

Das von Leibniz eingeführte Integralzeichen

„ \int “

erinnert an „ \sum “ und damit an „Summe“. Man kann das Riemann-Integral intuitiv als Summation über die Produkte

$$f(x) \cdot dx, \quad x \in [a, b],$$

auffassen, die Rechtecken mit einer infinitesimal kleinen Waagrechten entsprechen. Unsere ε - δ -Definition verbleibt aber im archimedisch angeordneten Körper \mathbb{R} . Wie für Grenzwerte und Differentialquotienten brauchen wir keine infi-

nitesimalen Größen und die zugehörige Theorie der Nonstandard-Analyse, um das Integral lupenrein zu definieren. Damit erscheint die funktionale Notation $I(f)$ angemessener als die *Leibniz-Notation*

$$\int_a^b f(x) \, dx. \quad (\text{„Integral von } a \text{ bis } b \text{ über } f(x) \, dx\text{“})$$

Den vier Zeichen in „ $I(f)$ “ stehen neun Zeichen bei Leibniz gegenüber. Die Integrationsvariable x ist austauschbar, und das dx hat keine offizielle Bedeutung. Dennoch wird das Integralzeichen einschließlich dx bis heute sehr häufig verwendet. Wir werden sehen, dass sie sich hervorragend eignet, um einen leistungsfähigen Kalkül zu formulieren. Der Triumph der Integralrechnung ist auch auf die Notation von Leibniz zurückzuführen, die man als Geniestreich bezeichnen darf. Ein erstes Beispiel für ihre suggestive Kraft erhalten wir, wenn wir die Grenzen am Integralzeichen zur Einschränkung verwenden. Ist $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $P \subseteq \mathbb{R}$, und $[a, b] \subseteq P$ derart, dass $f|_{[a, b]}$ integrierbar ist, so schreiben wir kurz

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{anstelle von} \quad \int_a^b (f|_{[a, b]})(x) \, dx \quad (= I(f|_{[a, b]}).$$

Die Notation „von a bis b “ auf der linken Seite ist so klar, dass die rechte Seite fast schwerfällig wirkt. Weiter eignet sich die Leibniz-Notation zur rechnerischen Manipulation von Funktionen, die durch Terme definiert werden. So sind etwa

$$\int_a^b x^2 \, dx, \quad \int_a^b t x^2 \, dx \quad (t \text{ eine Konstante}), \quad \int_a^b t x^2 \, dt \quad (x \text{ eine Konstante})$$

hervorragend les- und handhabbar. Der zu integrierenden Funktion muss kein Name wie f, g, h gegeben werden, was ein einfaches Hinschreiben und flüssiges Umformen ermöglicht (der Leser vergleiche die Situation mit Folgen und Reihen, etwa $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$). Schreibt man $I(x^2)$, so fehlen die Grenzen, und bei $I(tx^2)$ ist nicht klar, ob eine Funktion in x oder in t zu integrieren ist.

Aber auch die sachlich-moderne $I(f)$ -Notation bringt in vielen Kontexten Vorteile mit sich. Sie legt es nahe, das Integral I als eine Abbildung aufzufassen, die einer integrierbaren Funktion auf einem bestimmten fest gewählten Intervall $[a, b]$ eine reelle Zahl $I(f)$ zuweist. Wir werden gleich sehen, dass

$$V = V([a, b]) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist integrierbar}\}$$

ein \mathbb{R} -Vektorraum ist, und dass

$$I: V \rightarrow \mathbb{R}$$

ein lineares Funktional auf diesem Vektorraum darstellt, d. h., es gilt

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \quad \text{für alle } f, g \in V \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dieser wichtige Aspekt wird bei der Leibniz-Notation nicht so deutlich wie bei der funktionalen Schreibweise. Kurz: Beides ist gut und nützlich.

Elementare Eigenschaften des Integrals

Folgende Eigenschaften sind ständig im Einsatz:

Satz (*elementare Eigenschaften des Integrals*)

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt für alle integrierbaren Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $s, t \in [a, b]$:

$$(a) \quad \int_a^b 1 \, dx = b - a, \quad (\text{Normiertheit})$$

$$(b) \quad \int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx, \quad (\text{Linearität})$$

$$(c) \quad \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx, \quad \text{falls } f \leq g, \quad (\text{Monotonie})$$

$$(d) \quad \int_s^t f(x) \, dx \text{ existiert,} \quad (\text{Einschränkung})$$

$$(e) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^s f(x) \, dx + \int_s^b f(x) \, dx. \quad (\text{Aufspaltung})$$

Beweis

zu (a): Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die konstante Funktion mit $f(x) = 1$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt für jede Partition $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$:

$$\sum_p f = \sum_{k \leq n} f(x_k) (t_{k+1} - t_k) = \sum_{k \leq n} (t_{k+1} - t_k) = t_{n+1} - t_0 = b - a.$$

Damit ist das Integrierbarkeitskriterium für $c = b - a$ erfüllt, da $|\sum_p f - c| = 0$ für alle Partitionen p gilt.

zu (b): Seien also f, g integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$c = I(f), \quad d = I(g), \quad h = \alpha f + \beta g.$$

Wir zeigen, dass die Integrierbarkeitsbedingung für h für den Wert $\alpha c + \beta g$ erfüllt ist, sodass also $I(h) = \alpha c + \beta g$. Dabei verwenden wir, dass für jede Partition $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$ gilt:

$$(+)\quad \sum_p h = \sum_p (\alpha f + \beta g) = \alpha \sum_p f + \beta \sum_p g.$$

Sei nun also $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Integrierbarkeit von f und g existiert ein $\delta > 0$, sodass für jede δ -Partition von $[a, b]$ gilt:

$$|\alpha| \left| \sum_p f - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta| \left| \sum_p g - d \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt aber für jede δ -Partition p von $[a, b]$ nach (+) und der Dreiecksungleichung, dass

$$|\sum_p h - (\alpha c + \beta d)| = |\alpha \sum_p f - \alpha c + \beta \sum_p g - \beta d| \leq$$

$$|\alpha| |\sum_p f - c| + |\beta| |\sum_p g - d| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

zu (c), (d), (e):

– Übung.

Die Eigenschaft (b) beinhaltet die Integrierbarkeit der Funktion $\alpha f + \beta g$ für integrierbare Funktionen f und g und reelle Zahlen α, β . Die integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ bilden damit einen Unterraum V des \mathbb{R} -Vektorraums aller reellen Funktionen auf $[a, b]$ und $I: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein lineares Funktional auf diesem Unterraum. Im vierten Abschnitt werden wir mit Hilfe von Integralen ein Skalarprodukt und damit eine geometrische Struktur auf diesem Unterraum einführen.

Der Beweis der Linearität des Integrals lässt sich kurz so zusammenfassen:

Die endlichen Riemann-Summen vererben die Linearität auf das Integral.

Der relativ einfache Beweis der Linearität ist eine Stärke des Ansatzes, Flächen mit Hilfe von Riemann-Summen zu messen. Bei Ausschöpfungsverfahren ist diese Eigenschaft schwieriger zu beweisen. Wir kommen im nächsten Kapitel bei der Diskussion des Jordan-Inhalts darauf noch zurück. Eine anschauliche Interpretation der Linearität besprechen wir in den Ergänzungen E1.

Für die Monotonie gilt wie für die Linearität: \leq überträgt sich von den Riemann-Summen auf das Integral. Während bei Grenzübergängen die strenge Monotonie oft verloren geht ($1/n > 0$ für alle $n \geq 1$, aber $\lim_{n \geq 1} 1/n = 0$), bleibt beim Integral die Kleiner-Relation erhalten: Ist $f < g$, so ist $I(f) < I(g)$. Einen Beweis hierfür geben wir in 2.1 mit Hilfe des Baireschen Kategoriensatzes.

Eine wichtige Stabilitätseigenschaft des Integrals ist:

Satz (*Änderung an endlich vielen Stellen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Weiter sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\}$$

endlich ist. Dann ist g integrierbar, und es gilt $I(f) = I(g)$.

Das Integral ist also unempfindlich gegenüber einer endlichen Werteveränderung. Insbesondere ist das Integral für jede Funktion, die nur an endlich vielen Stellen von 0 verschieden ist, gleich 0. Wir werden später sehen, dass der Satz im Allgemeinen nicht mehr gültig ist, wenn sich die Funktion g an abzählbar vielen Stellen von der Nullfunktion unterscheidet. Die Integrierbarkeit von g kann dann verletzt sein.

Die Limesformulierung der Integrierbarkeit

In der Integrierbarkeitsbedingung haben wir eine ε - δ -Formulierung verwendet. Um den Übergang von den Approximationen zum Grenzwert deutlicher zu machen, formulieren wir die Integrierbarkeitsbedingung noch etwas um. Hierzu definieren wir:

Definition (*Limesnotation für Riemann-Summen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir

$$\lim_{\delta(p) \rightarrow 0} \sum_p f = c,$$

falls gilt:

Für jede Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Partitionen von $[a, b]$ mit $\lim_n \delta(p_n) = 0$ gilt $\lim_n \sum_{p_n} f = c$.

Leicht zu sehen ist:

Satz (*Limesformulierung der Integrierbarkeit*)

Seien $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist integrierbar und $I(f) = c$.

(b) $\lim_{\delta(p) \rightarrow 0} \sum_p f = c$.

Der Leser vergleiche diesen Satz (und seinen Beweis) mit der Äquivalenz der ε - δ -Stetigkeit und der Limesstetigkeit. Obwohl es sich letztendlich nur um ein Spiel mit Definitionen handelt, ist die Umformulierung sicher die Mühe wert. Der Schritt von der Riemann-Summe zum Riemann-Integral erscheint nun als Grenzübergang:

$$\int_a^b f = \lim_{\delta(p) \rightarrow 0} \sum_p f, \quad (\text{Limesformulierung des Integrals})$$

vorausgesetzt, der Limes existiert.

Durch die mögliche Beschränkung auf äquidistante Partitionen können wir auch schreiben:

$$\int_a^b f = \lim_{p \text{ äquidistant, } \text{Länge}(p) \rightarrow \infty} \sum_p f,$$

wobei die rechte Seite bedeutet:

Für jede Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von äquidistanten Partitionen von $[a, b]$ mit $\lim_n \text{Länge}(p_n) = \infty$ gilt $\lim_n \sum_{p_n} f = c$.

Die Berechnung von Integralen durch Riemann-Summen

Um mit dem Integralbegriff vertrauter zu werden, berechnen wir nun noch einige Integrale. Dabei beschränken wir uns auf äquidistante Partitionen, wodurch die Berechnungen einfacher werden. Aufgrund der oben erwähnten möglichen Beschränkung auf diese Partitionen ergeben sich korrekte Resultate.

Beispiel 1: Die Identität

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Weiter sei $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ eine äquidistante Partition des Intervalls $[0, 1]$ der Länge $n + 1$. Dann gilt:

$$\sum_p f = \sum_{k \leq n} f(x_k)(t_{k+1} - t_k) =$$

$$\sum_{k \leq n} \frac{x_k}{n+1}.$$

Wegen $t_k \leq x_k \leq t_{k+1}$ und

$$t_k = \frac{k}{n+1} \quad \text{für alle } k \leq n+1$$

gilt also

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k \leq n} \frac{k}{n+1} \leq \sum_p f \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k \leq n} \frac{k+1}{n+1}.$$

Die Gauß-Formel

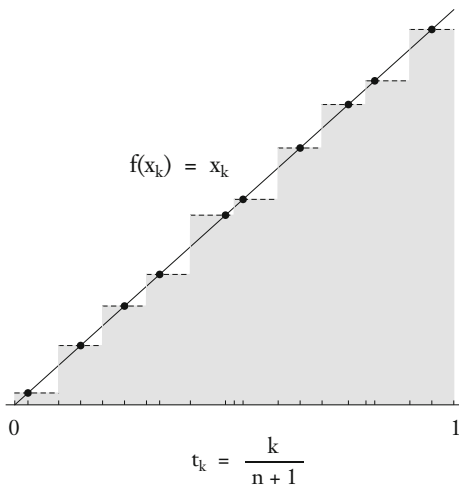
$$\sum_{k \leq n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

liefert die Abschätzung

$$\frac{n(n+1)}{2(n+1)^2} \leq \sum_p f \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)^2}.$$

Die linke und die rechte Seite liegen beliebig nahe bei $1/2$, wenn n hinreichend groß und damit p hinreichend fein ist. Folglich ist f integrierbar und

$$I(f) = \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$



Damit haben wir ein erstes Beispiel für den geometrischen Gehalt des Integrals kennengelernt, denn der Inhalt der Fläche unter der Identität im Intervall von 0 bis 1 ist aus elementargeometrischen Gründen gleich $1/2$. Analog kann der – geometrisch nicht mehr offensichtliche – Flächeninhalt unter der Einheitsparabel im Intervall von 0 bis 1 berechnet werden:

Beispiel 2: Die Parabel

Sei $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = x^2 \text{ für alle } x \in [0, 1].$$

Sei wieder $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ eine äquidistante Partition von $[0, 1]$. Dann gilt wie oben:

$$\sum_p g = \sum_{k \leq n} g(x_k)(t_{k+1} - t_k) =$$

$$\sum_{k \leq n} \frac{x_k^2}{n+1},$$

sodass

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k \leq n} \frac{k^2}{(n+1)^2} \leq \sum_p g \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k \leq n} \frac{(k+1)^2}{(n+1)^2}.$$

Die Summenformel

$$\sum_{k \leq n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

liefert

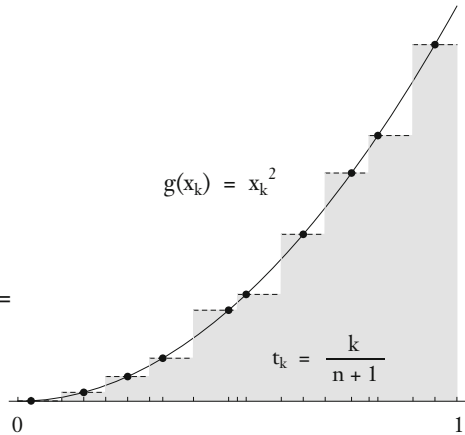
$$\frac{n(2n+1)}{6(n+1)^2} \leq \sum_p g \leq \frac{(n+2)(2n+3)}{6(n+1)^2}.$$

Die linke und die rechte Seite konvergieren gegen $1/3$. Folglich gilt

$$I(g) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Eine Verallgemeinerung der Berechnungen der beiden Beispiele zeigt, dass

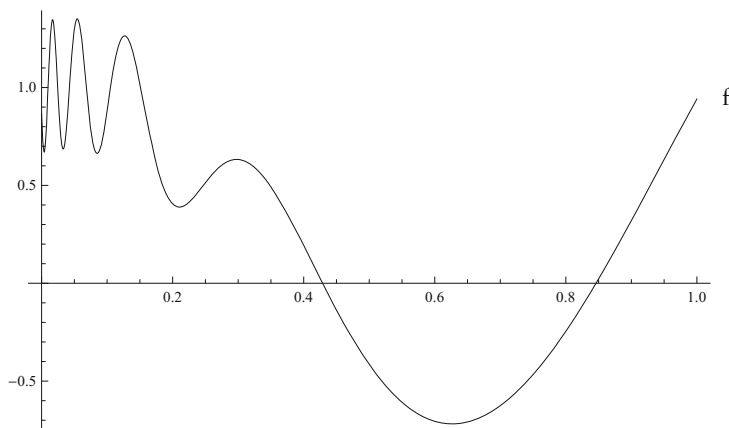
$$\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} \quad \text{für alle } b \geq 0.$$



Eine numerische Betrachtung

Für das obige und das folgende Diagramm wurde $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ verwendet mit

$$f(x) = \cos(5x) + \sin(x) + \frac{\sin(3(x+0,1)^{-1} + 1)}{3} \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$



Wir betrachten nun die Riemann-Summen

$$r_n = \sum_{k \leq n-1} \frac{f(k/n)}{n} = \frac{\sum_{k \leq n-1} f(k/n)}{n},$$

die den äquidistanten Partitionen $p_n = (t_k, x_k)_{k \leq n-1} = (k/n, k/n)_{k \leq n-1}$ von $[0, 1]$ der Länge n mit linksseitigen Stützstellen entsprechen. Die folgende Tabelle zeigt die auf acht Nachkommastellen gerundeten Werte r_n für einige Längen n . Der korrekte auf acht Nachkommastellen gerundete numerische Wert des Integrals ist 0,16198263.

n	r_n
10	0,13058248
10^2	0,16252275
10^3	0,16195291
10^5	0,16197894
10^6	0,16198226
10^7	0,16198260

Das Integral als Mittelwert

Nachdem bislang der signierte Flächeninhalt im Vordergrund stand, wollen wir nun noch auf die Interpretation des Integrals als Mittelwert eingehen. Hierzu beobachten wir:

Ist $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $I(f) = c$, so besitzen f und die konstante Funktion mit Wert c auf $[0, 1]$ denselben signierten Flächeninhalt.

Wir können also das Integral einer Funktion auf $[0, 1]$ als den Mittelwert von f ansehen. Ist der Definitionsbereich von f ein Intervall $[a, b]$, so müssen wir das Integral durch die Länge $b - a$ des Intervalls teilen, um den Mittelwert zu erhalten. Allgemein definieren wir:

Definition (*Mittelwert, gewichteter Mittelwert*)

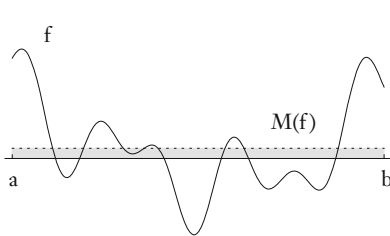
Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann heißt die reelle Zahl

$$M(f) = \frac{I(f)}{b - a}$$

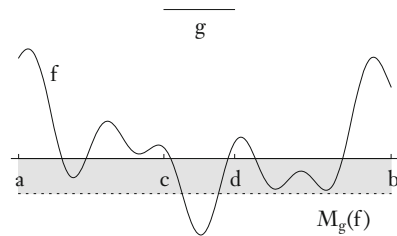
der *Mittelwert* von f . Ist $g: [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ integrierbar, $I(g) > 0$ und fg integrierbar, so heißt

$$M_g(f) = \frac{I(fg)}{I(g)}$$

der *gewichtete Mittelwert* von f bzgl. der *Gewichtsfunktion* g .



der Mittelwert $M(f)$ von f (gestrichelt)



der Mittelwert $M_g(f)$ von f bzgl. g .
 g ist außerhalb von $[c, d]$ gleich 0.

Beispiel

Ist $f = \sum_{1 \leq k \leq 6} k \cdot 1_{](k-1)/6, k/6[}$ auf $[0, 1]$, d. h.,

$f(x) = k$ für alle $x \in](k-1)/6, k/6[$, $1 \leq k \leq 6$, $f(k/6) = 0$ für $0 \leq k \leq 6$,

so ist $M(f) = I(f) = 3,5$. Dies ist gleich dem Erwartungswert beim Würfeln mit einem fairen Würfel.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, dass eine stetige und in $]a, b[$ differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ihre mittlere Steigung

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

in $]a, b[$ annimmt, also ein $p \in]a, b[$ mit $f'(p) = m$ existiert. Wir wollen nun ein analoges Resultat für die Integralrechnung beweisen. Dabei kann nicht jede integrierbare Funktion ihren Mittelwert annehmen. Zum Beispiel nimmt

$$1_{[1/2, 1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

ihren Mittelwert $1/2$ nicht an. Dieser Fall kann nicht eintreten, wenn die Funktion keine Werte auslässt:

Satz (*Mittelwertsatz der Integralrechnung*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und der Wertebereich von f sei ein Intervall $[c, d]$. Weiter sei $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ integrierbar, $I(g) > 0$, und fg sei integrierbar. Dann gibt es ein $p \in [a, b]$ mit

$$f(p) = M_g(f) = \frac{I(fg)}{I(g)}. \quad (\text{Annahme des gewichteten Mittelwerts})$$

Speziell existiert ein $p \in [a, b]$ mit

$$f(p) = M(f) = \frac{I(f)}{b - a}. \quad (\text{Annahme des Mittelwerts})$$

Beweis

Wegen $\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = [c, d]$ und $g \geq 0$ gilt

$$cg \leq fg \leq dg.$$

Damit ist nach Linearität und Monotonie des Integrals

$$c I(g) \leq I(fg) \leq d I(g).$$

Folglich existiert ein $m \in [c, d]$ mit $I(fg) = m I(g)$. Da $[c, d]$ der Wertebereich von f ist, gibt es ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = m$.

Die Voraussetzung an f ist zum Beispiel erfüllt, wenn f stetig ist (Intervallsatz für stetige Funktionen) oder wenn f integrierbar ist und eine Stammfunktion besitzt, d. h., es gibt ein $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ (Intervallsatz der Differentialrechnung von Darboux).

Wir werden in 1.3 zeigen, dass das Produkt fg integrierbarer Funktionen f und g auf $[a, b]$ stets integrierbar ist, sodass diese Voraussetzung in der Definition des gewichteten Mittelwerts und im Mittelwertsatz automatisch erfüllt ist.

Das Integral für komplexwertige Funktionen

Wir betrachten nun Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Der Definitionsbereich ist wie bisher ein reelles Intervall, die Funktionswerte liegen nun aber in den komplexen Zahlen. Durch eine Aufspaltung in Real- und Imaginärteil können wir ein komplexwertiges Integral erklären:

Definition (*Integration komplexwertiger Funktionen*)

Seien $[a, b]$ ein reelles Intervall und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Dann heißt f *integrierbar*, falls die Funktionen $\operatorname{Re}(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im}(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar sind. In diesem Fall heißt

$$I(f) = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f) \in \mathbb{C}$$

das *Integral* von f .

Der Leser vergleiche dies mit der Definition

$$f'(p) = \operatorname{Re}(f)'(p) + i \operatorname{Im}(f)'(p) \in \mathbb{C}$$

der komplexwertigen Ableitung einer Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{C}$, $P \subseteq \mathbb{R}$, deren Realteil- und Imaginärteildfunktion differenzierbar im Punkt $p \in P$ sind (4.2 in Band 1).

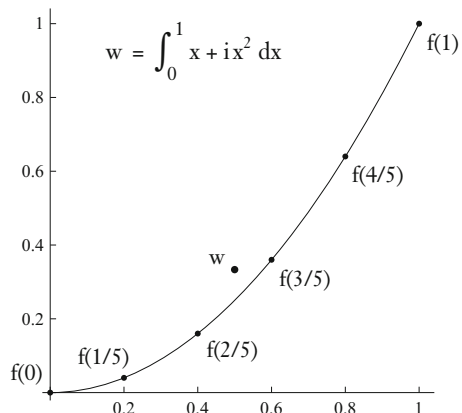
Beispiel

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = x + ix^2$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x + ix^2 dx = \int_0^1 x dx + i \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{i}{3}.$$

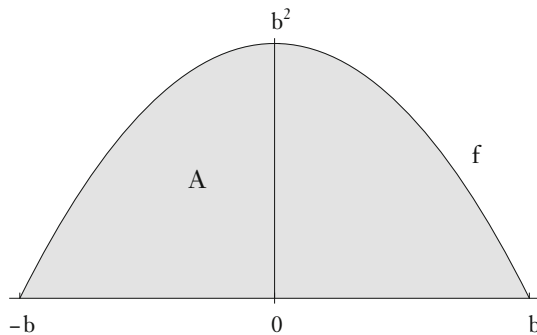
Das komplexwertige Integral lässt sich nicht mehr unmittelbar als Flächeninhalt interpretieren. Die Interpretation als Mittelwert besteht weiterhin.

Wir bleiben vorerst bei den reellen Integralen. Bei der Untersuchung der Fourier-Reihen in Abschnitt 4 sind komplexwertige Integrale unentbehrlich, und wir werden die Eigenschaften dieser Integrale dort genauer betrachten.



Ausblick: Die Quadratur der Parabel bei Archimedes

Welchen Inhalt A hat die Fläche, die eine umgekehrte Einheitsparabel wie in der folgenden Abbildung mit der x -Achse einschließt?

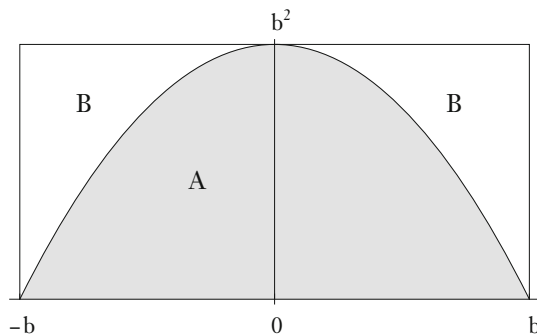


$$f: [-b, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = b^2 - x^2$$

Die Berechnung des Integrals im obigen Beispiel 2 erlaubt eine Antwort auf diese Frage:

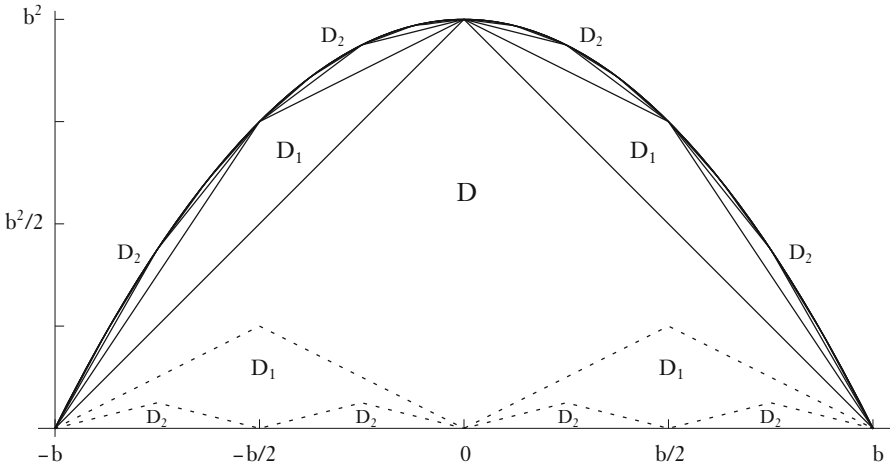
$$A = 2b \cdot b^2 - 2 \int_0^b x^2 dx = 2b^3 - 2 \frac{b^3}{3} = \frac{4}{3} b^3.$$

In dieser Berechnung verwenden wir die folgende Zerlegung des das Parabelsegment einhüllenden Rechtecks der Fläche $2b \cdot b^2 = 2b^3$ in drei Teile:



$$\text{Es gilt } B = \int_0^b x^2 dx.$$

Die erste bekannte Berechnung von Parabelsegmenten stammt von Archimedes und ist ein Juwel der Mathematikgeschichte. Archimedes hat eine Ausschöpfung des Parabelsegments durch Dreiecke verwendet:



Sind $D, D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ die Flächeninhalte der im Diagramm gezeigten Dreiecke, so gilt, wie man mit elementargeometrischer Argumentation (oder mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips, vgl. Abschnitt 6) zeigt:

$$A = D + 2D_1 + 4D_2 + \dots + 2^n D_n + \dots =$$

$$D + 2 \frac{D}{8} + 4 \frac{D}{8^2} + \dots + 2^n \frac{D}{8^n} + \dots =$$

$$D \sum_n \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} D = \frac{4}{3} b^3.$$

Die Fläche des Parabelsegments ist also $\frac{4}{3}$ der Fläche des eingeschriebenen Dreiecks gleicher Höhe (Grundfläche $2b$ und Höhe b^2).

Die Überlegungen zeigen, dass es mehrere äquivalente Möglichkeiten gibt, einen Flächeninhalt zu bestimmen. Der Weg über Riemann-Summen entspricht der Approximation der Fläche durch immer feinere streifenförmige Rechteckflächen und einem zugehörigen Grenzübergang, der Weg von Archimedes entspricht der Ausschöpfung der Fläche durch elementare Flächen (hier: Dreiecke) und einer unendlichen Summation (hier: einer geometrischen Reihe). Was noch fehlt, ist ein Kalkül, der die zwar trickreich-interessanten, aber doch mühevollen problemspezifischen Berechnungen vereinfacht und es erlaubt, das Integral aus einer analytischen Formulierung des Problems zu gewinnen. Einen solchen Kalkül werden wir in 1.4 kennenlernen. Richtig würdigen kann man ihn nur im Vergleich mit speziellen Untersuchungen.

2. Darboux-Integral und Jordan-Inhalt

In diesem Kapitel stellen wir zwei alternative Zugänge zum Riemann-Integral vor, nämlich das Darboux-Integral, das den gesuchten Wert durch Ober- und Untersummen approximiert, sowie den (Peano-)Jordan-Inhalt, der Flächen mit Hilfe von Ausschöpfung und Umschreibung durch elementargeometrische Figuren misst.

Darboux-Summen

Unsere Partitionen beinhalten neben Zerlegungspunkten auch Stützstellen, an denen wir eine Funktion auswerten. Die entsprechenden Waagrechten der approximierenden Rechtecksflächen liegen dadurch in der Regel sowohl etwas überhalb als auch etwas unterhalb des Graphen der betrachteten Funktion, mit garantierter Übereinstimmung an den Stützstellen. Durch die Bildung von Infima und Suprema in den Zerlegungsintervallen können wir ohne Verwendung von Stützstellen Approximationen „von unten“ und „von oben“ erzeugen:

Definition (*Darboux-Summen*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und sei $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ eine Partition von $[a, b]$. Dann setzen wir:

$$S_p f = \sum_{k \leq n} (t_{k+1} - t_k) \sup_{x \in [t_k, t_{k+1}]} f(x),$$

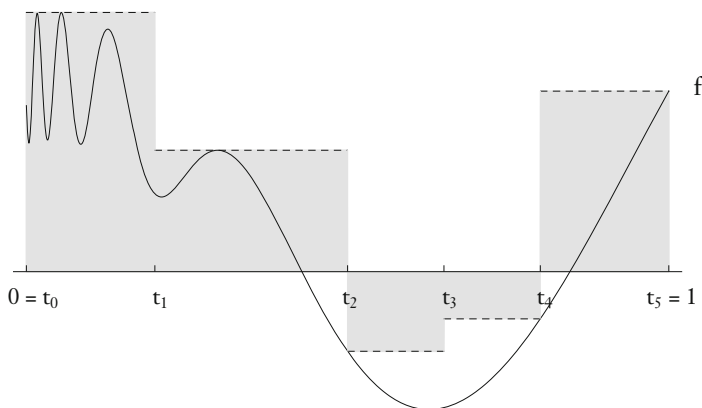
$$s_p f = \sum_{k \leq n} (t_{k+1} - t_k) \inf_{x \in [t_k, t_{k+1}]} f(x).$$

Die Zahlen $S_p f$ und $s_p f$ heißen die (*Darboux'sche*) *Ober-* bzw. *Untersumme* von f bzgl. der Partition p .

Es gilt $s_p f \leq \sum_p f \leq S_p f$ (aufgrund der Verwendung abgeschlossener Intervalle bei der sup- und inf-Bildung in $S_p f$ und $s_p f$). Die Summen $S_p f$ und $s_p f$ hängen nur noch von den Zerlegungspunkten und nicht mehr von den Stützstellen der Partition p ab. Betrachten wir also Darboux-Summen, so können wir mit stützstellenfreien Partitionen arbeiten, die wir in der einfachen Form

$$p = (t_k)_{k \leq n} \qquad \qquad \qquad (\textit{stützstellenfreie Partition})$$

angeben. Es gilt $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b = t_{n+1}$.



Obere Darboux-Summe für p und f wie in den Abbildungen in 1.1.

Das Ober-, Unter- und Darboux-Integral

Der der Approximation durch Ober- und Untersummen entsprechende Grenzübergang lässt sich ebenfalls mit Hilfe von Suprema und Infima durchführen:

Definition (*Ober- und Unterintegral, Darboux-Integral*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann setzen wir:

$$Sf = \inf_p S_p f, \quad sf = \sup_p s_p f.$$

Die Zahlen Sf und sf heißen das *Ober-* bzw. *Unterintegral* von f . Die Funktion f heißt *Darboux-integrierbar*, falls $Sf = sf$. In diesem Fall heißt

$$c = Sf = sf$$

das *Darboux-Integral* von f .

Das Oberintegral Sf und das Unterintegral sf existieren für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Stets gilt $sf \leq Sf$. Stimmen die beiden Werte überein, so ist der Versuch der Flächenmessung mit Hilfe von Ober- und Untersummen erfolgreich und wir nennen die Funktion dann Darboux-integrierbar.

Die Darboux-Integrierbarkeit können wir sehr kompakt notieren:

Satz (*Umformulierung der Darboux-Integrierbarkeit*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(a) f ist Darboux-integrierbar.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition p von $[a, b]$ mit $S_p f - s_p f < \varepsilon$.
(*Darbouxsche Integrierbarkeitsbedingung*)

Beweis

(a) impliziert (b):

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $Sf = sf$ existieren Partitionen p und q von $[a, b]$ mit

$$S_p f - Sf < \frac{\varepsilon}{2}, \quad sf - s_q f < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei nun r eine Verfeinerung von p und q , d. h., eine Partition von $[a, b]$, deren Stützstellen die Stützstellen von p und q umfasst. Dann gilt (!)

$$S_p f \geq S_r f \geq Sf = sf \geq s_r f \geq s_q f$$

und damit

$$S_r f - s_r f < \varepsilon.$$

(b) impliziert (a):

Sei $\varepsilon > 0$ und p eine Partition mit $S_p f - s_p f < \varepsilon$. Wegen

$$S_p f \geq Sf \geq sf \geq s_p f$$

– gilt dann auch $Sf - sf < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $Sf = sf$.

Zum Nachweis der Darboux-Integrierbarkeit genügt es also, für jedes $\varepsilon > 0$ eine Partition p zu finden, sodass die Ober- und Untersumme von f bzgl. p weniger als ε voneinander abweichen.

Die Oszillation einer FunktionWir betrachten die Differenzen $S_p f - s_p f$ noch etwas genauer.**Definition** (Oszillation einer Funktion auf einer Menge)Ist $P \subseteq \mathbb{R}$, $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ und $A \subseteq P$, so heißt

$$\text{os}_A(f) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x)$$

die Oszillation von f auf A .

Die Darboux'sche Integrierbarkeitsbedingung für ein $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besagt, dass wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$ finden können, sodass die Summe $\sum_{k \leq n} (\text{os}_{[t_k, t_{k+1}]} f) (t_{k+1} - t_k)$ der mit den Intervall-Längen gewichteten Oszillationen von f kleiner als ε ist. Es gilt

$$\text{os}_A(f) = \sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

sodass wir die Darboux'sche Integrierbarkeitsbedingung auch wie folgt formulieren können: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$ mit

$$\sum_{k \leq n} \left(\sup_{x_1, x_2 \in [t_k, t_{k+1}]} |f(x_1) - f(x_2)| \right) (t_{k+1} - t_k) < \varepsilon.$$

Die Äquivalenz der Integrale

Die Ansätze von Riemann und Darboux sind äquivalent:

Satz (*Äquivalenz von Riemann- und Darboux-Integral*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist Riemann-integrierbar.
- (b) f ist beschränkt und Darboux-integrierbar.

In diesem Fall gilt dann $I(f) = sf = Sf$.

Insbesondere können wir also die Darboux'sche Integrierbarkeitsbedingung verwenden, um zu zeigen, dass eine Funktion Riemann-integrierbar ist.

Beweis

Ist f beschränkt, p eine Partition von $[a, b]$ und $\varepsilon > 0$, so gilt für alle hinreichend feinen Partitionen q von $[a, b]$ mit Stützstellen, dass

$$\sum_q f \leq S_p f + \varepsilon.$$

Analoges gilt für $s_p f$. Hieraus folgt, dass die Darboux-Integrierbarkeit die Riemann-Integrierbarkeit impliziert und die Integrale übereinstimmen.

Umgekehrt lässt sich jede Obersumme $S_p f$ durch Wahl von geeigneten Stützstellen beliebig genau durch eine Riemann-Summe approximieren, und dasselbe gilt für jede Untersumme $s_p f$. Hieraus folgt, dass die

- Riemann-Integrierbarkeit die Darboux-Integrierbarkeit impliziert.

Weiter gewinnen wir:

Satz (*Beschränkung auf äquidistante Partitionen in den Integral-Definitionen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Darboux-integrierbar, wenn f äquidistant Darboux-integrierbar ist (d. h., wenn in der Definition des Darboux-Integrals nur äquidistante Partitionen verwendet werden).

Weiter stimmt die Riemann-Integrierbarkeit mit der äquidistanten Riemann-Integrierbarkeit überein.

Beweis

Für jede Partition p von $[a, b]$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert eine äquidistante Partition q von $[a, b]$ mit $S_q f \leq S_p f + \varepsilon$. Hieraus folgt

$$Sf = \inf_p S_p f = \inf_{q \text{ äquidistant}} S_q f.$$

Analoges gilt für sf . Dies zeigt die erste Behauptung. Weiter sind die äquidistanten Versionen des Riemann- und Darboux-Integrals äquivalent

- (obiger Beweis bleibt gültig), woraus die zweite Behauptung folgt.

Flächenmessungen in der Ebene

Das Riemann-Integral können wir anschaulich als signierten Inhalt der Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse deuten. Die Riemann-Summen legen diese Anschauung schon sehr nahe, und sie wird durch das äquivalente Darboux-Integral, das auf einem geometrisch besonders klaren Einschließen der betrachteten Fläche beruht, weiter gestützt. Der natürlichen mathematischen Aufgabe der Bestimmung des Flächeninhalts für beliebige Figuren der Ebene wird der Ansatz aber nicht vollkommen gerecht. Die Fragen lauten:

*Welchen Teilmengen P der Ebene \mathbb{R}^2 kann man einen Flächeninhalt zuordnen?
Wie kann ein derartiger Inhalt definiert werden?*

Der Leser denke hierbei zunächst an einfache Mengen P wie Rechtecke, Dreiecke, Polygone, Kreise, Ellipsen, Kleeblätter oder natürlich auch wieder an Flächen, die durch Funktionen gegeben sind (wobei wir hier auch Flächen unterhalb der x-Achse als positiv ansehen). Manchmal ist eine solche Menge P zwar nicht durch eine Funktion definiert, aber doch der Integration zugänglich. Die Fläche einer Ellipse kann man zum Beispiel mit Integration bestimmen, indem man ihre obere Hälfte funktional darstellt und das berechnete Integral verdoppelt. Eine Teilmenge P der Ebene kann aber eine sehr komplizierte Punktwolke sein, und im Allgemeinen lässt sich die Messung von P nicht mehr auf durch Funktionsgraphen gegebene Teilflächen zurückführen. Damit scheint das allgemeine maßtheoretische Problem zunächst den Rahmen der Integration zu sprengen. Mittelfristig ist dies aber nicht der Fall. Sobald wir nämlich einen zweidimensionalen Integralbegriff zur Verfügung haben (vgl. Abschnitt 6), können wir die Fläche einer Teilmenge $P \subseteq [a, b]^2$ der Ebene im Fall der Existenz als das Integral der *Indikatorfunktion* $1_P (= \text{ind}_P = \chi_P)$ von P auf $[a, b]^2$ definieren, also der Funktion $1_P : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$1_P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (x, y) \in P, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieser Gedanke lässt sich durch die Definition eines eindimensionalen Längenbegriffs mit Hilfe des Integrals illustrieren:

Definition (*Länge $L(P)$ einer Teilmenge von \mathbb{R}*)

Für ein $P \subseteq [a, b]$ definieren wir die (*Riemann-Jordan-*) *Länge* $L(P)$ von P im Fall der Existenz durch

$$L(P) = \int_a^b 1_P(x) \, dx.$$

Man kann leicht einsehen, dass die Länge $L(P)$ lediglich von P und nicht vom die Menge umfassenden Intervall $[a, b]$ abhängt.

Das Integral für Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ führt also zu einem Längenbegriff für gewisse Teilmengen von \mathbb{R} , und genauso wird ein Integral für Funktionen $f: [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zu einem Flächeninhalt für gewisse Teilmengen von \mathbb{R}^2 führen. Aber auch der umgekehrte Weg ist möglich:

Man kann das allgemeine maßtheoretische Ziel an die Spitze stellen und einen Flächeninhalt ohne Verwendung von Integration definieren.

Wir wollen diesen Ansatz hier noch skizzieren. Er zeigt, welcher Flächenbegriff hinter dem Riemann-Integral steckt, und die Überlegungen tragen damit auch zum Verständnis des Riemann-Integrals bei.

Der Jordan-Inhalt

Eine anschauliche Methode der näherungsweisen Flächenmessung ist uns seit Schultagen vertraut: Wir messen die betrachtete Fläche mit kleinen Quadraten. Je feiner unser „Millimeterpapier“ wird, desto genauer wird die Messung. Wir definieren hierzu:

Definition (δ -Quadrat)

Sei $\delta > 0$. Ein $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt ein δ -Quadrat, falls $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren mit

$$Q = [a\delta, (a+1)\delta] \times [b\delta, (b+1)\delta].$$

Ein δ -Quadrat ist also ein „Kästchen“ des Gitters der Feinheit δ , das wir, ausgerichtet an den beiden Achsen, über die Ebene \mathbb{R}^2 legen. Es hat den elementaren Flächeninhalt

$$L([a\delta, (a+1)\delta]) \cdot L([b\delta, (b+1)\delta]) = \delta \cdot \delta = \delta^2.$$

Um den Flächeninhalt einer Menge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ zu approximieren, können wir für ein klein gewähltes δ zählen, wie viele δ -Quadrate in der Menge P enthalten sind oder zumindest gemeinsame Punkte mit ihr aufweisen. Dies liefert Approximationen von unten und von oben und einen Inhaltsbegriff durch einen entsprechenden Grenzübergang:

Definition (*Jordan-Inhalt*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt. Dann definieren wir den *äußeren Jordan-Inhalt* $J(P)$ und den *inneren Jordan-Inhalt* $j(P)$ durch

$$J(P) = \inf_{\delta > 0} (\delta^2 \cdot \text{„die Anzahl der } \delta\text{-Quadrate } Q \text{ mit } Q \cap P \neq \emptyset\text{“}),$$

$$j(P) = \sup_{\delta > 0} (\delta^2 \cdot \text{„die Anzahl der } \delta\text{-Quadrate } Q \text{ mit } Q \subseteq P\text{“}).$$

Gilt $J(P) = j(P)$, so heißt P *Jordan-messbar* und die reelle Zahl $J(P) = j(P)$ der *Jordan-Inhalt* von P .

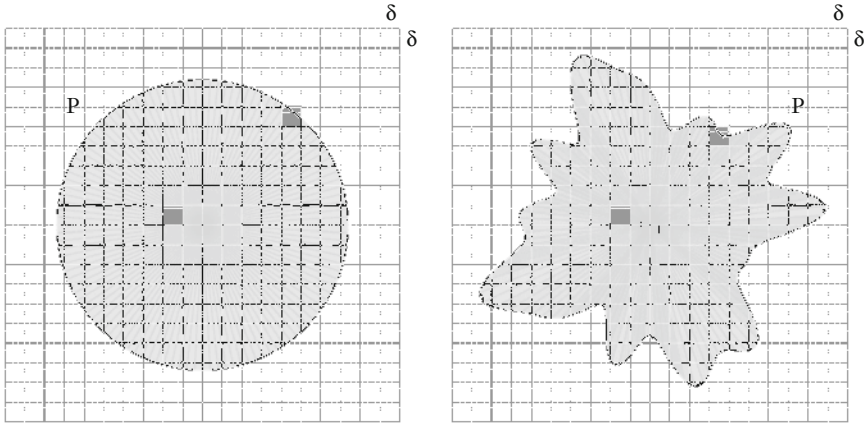


Illustration des Jordan-Inhalts für einen Kreis und für eine kompliziertere Teilmenge der Ebene, die für die eindimensionale Integration nicht mehr direkt zugänglich ist. Die dunkelgrauen δ -Quadrate rechts oben werden bei der durch die Maschenweite δ bestimmten äußeren Messung des Jordan-Inhalts von P gezählt, die δ -Quadrate links unten dagegen bei der inneren und bei der äußeren Messung.

Wir stellen einige Eigenschaften des Jordan-Inhalts zusammen. Nach Konstruktion gilt für alle beschränkten $P, Q \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$0 \leq j(P) \leq J(P),$$

$$P \subseteq Q \text{ impliziert } j(P) \leq j(Q) \text{ und } J(P) \leq J(Q) \quad (\text{Monotonie})$$

Man kann weiter zeigen, dass der Jordan-Inhalt *additiv* ist:

$$\text{Sind } P \text{ und } Q \text{ Jordan-messbar und disjunkt, so ist } P \cup Q \text{ Jordan-messbar und } J(P \cup Q) = J(P) + J(Q). \quad (\text{Additivität})$$

Induktiv ergibt sich hieraus, dass der Jordan-Inhalt von endlich vielen paarweise disjunkten messbaren Mengen die Summe der Jordan-Inhalte der Mengen ist (*endliche Additivität*).

Es existieren wieder viele gleichwertige Varianten der Konstruktion. Man kann zur Flächenmessung auch Quadrate eines Gitters zulassen, das nicht notwendig an der x -Achse und der y -Achse ausgerichtet ist. Auch die Messung mit Rechtecken und weiter sogar mit Polygonen führt zum selben Inhaltsbegriff. Die Messung mit Polygonen ist als *Peano-Inhalt* bekannt, weshalb die Konstruktion in der Literatur oft auch *Peano-Jordan-Inhalt* genannt wird. Allen Ansätzen ist gemeinsam, dass nur endlich viele elementare geometrische Figuren zu einer approximativen Messung verwendet werden.

Die Konstruktion des Jordan-Inhalts kann analog für beschränkte Teilmengen des \mathbb{R}^n mit einer Dimension $n \geq 1$ durchgeführt werden. Für $n = 3$ werden zum Beispiel δ -Kuben mit dem elementaren Volumen δ^3 verwendet.

Zwischen dem Riemann-Integral und dem Jordan-Inhalt besteht ein sehr enger Zusammenhang, den wir hier ohne Beweis angeben:

Satz (*maßtheoretische Interpretation des Riemann-Integrals*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ eine beschränkte Funktion, und sei

$$P = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \}$$

die von f und der x -Achse eingeschlossene Teilmenge der Ebene.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) f ist Riemann-integrierbar.

(b) P ist Jordan-messbar.

In diesem Fall gilt dann $I(f) = J(P)$.

Das Riemann-Integral ist aus maßtheoretischer Sicht also nichts anderes als die Idealisierung der Millimeterpapier-Methode des „Kästchenzählens“. Das Riemann-Integral einer Funktion f , die auch negative Werte annimmt, erhalten wir, indem wir die durch f definierten Flächen

$$P_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) > 0, 0 \leq y \leq f(x) \}$$

$$P_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) < 0, f(x) \leq y \leq 0 \}$$

oberhalb bzw. unterhalb der x -Achse getrennt messen (die Menge aller $(x, 0)$ mit $f(x) = 0$ könnten wir P_1 oder P_2 zurechnen, wir können sie aber auch vernachlässigen, da sie als Teilmenge der x -Achse keinen Flächeninhalt besitzt). Es gilt dann

$$I(f) = J(P_1) - J(P_2).$$

Dass Riemann-Integral und Jordan-Inhalt eng zusammenhängen, ist kaum überraschend: Das Riemann-Integral misst Flächen mit feinen rechteckigen Streifen, der Jordan-Inhalt misst Flächen mit kleinen Quadraten. Da sich Rechtecke mit Hilfe von Quadraten approximativ messen lassen und da Türme aus Quadraten Rechtecke sind, sollten keine großen Unterschiede auftreten. Das ist richtig, aber dass das Riemann-Integral genau dem Jordan-Inhalt entspricht, ist doch bemerkenswert. Wir werden im nächsten Kapitel das Regel-Integral einführen, das sich vom Riemann-Integral durch eine kleinere Menge integrierbarer Funktionen unterscheidet. Prinzipiell wäre eine derartige Abweichung auch für das Riemann-Integral und den Jordan-Inhalt denkbar.

Zusammenfassend gilt also: Mit dem Jordan-Inhalt kann man das Riemann-Integral definieren und mit dem zweidimensionalen Riemann-Integral den Jordan-Inhalt. Das Riemann-Integral ist im Gegensatz zum Jordan-Inhalt durch einen leistungsfähigen und eleganten Kalkül ausgezeichnet. Wir werden diesen Kalkül in den folgenden Kapiteln kennenlernen. Der Jordan-Inhalt besticht dagegen durch seine direkte Umsetzung der Problemstellung des Messens. Beide Ansätze spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle.

Ausblick: Inhalte

Mit der Länge L und dem Jordan-Inhalt J haben wir „messende“ Abbildungen kennengelernt, die gewissen Teilmengen von \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^2 nichtnegative reelle Zahlen zuweisen. Wir wollen nun noch einen allgemeinen axiomatischen Inhaltsbegriff formulieren. Die Definitionsbereiche unserer Inhaltsfunktionen sind Mengensysteme mit guten Abgeschlossenheitseigenschaften. Wir betrachten hierzu eine beliebige Menge X und ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Jedes Element von \mathcal{M} ist also eine Teilmenge von X . (Ein typisches Beispiel, das wir oben schon betrachtet haben, ist $X = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{M} = \{P \subseteq \mathbb{R}^2 \mid P \text{ ist beschränkt}\}$.) Wir fordern nun, dass wir in \mathcal{M} bestimmte Mengenoperationen ausführen können, ohne dadurch das System \mathcal{M} zu verlassen.

Definition (*Verband, Ring, Algebra*)

Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt ein (*Mengen-*) *Verband* auf X , falls gilt:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{V}$,
- (b) $A \cap B \in \mathcal{V}$ für alle $A, B \in \mathcal{V}$,
- (c) $A \cup B \in \mathcal{V}$ für alle $A, B \in \mathcal{V}$.

Gilt zusätzlich

- (d) $A - B \in \mathcal{V}$ für alle $A, B \in \mathcal{V}$,

so heißt \mathcal{V} ein (*Mengen-*) *Ring* auf X . Gilt zudem $X \in \mathcal{V}$, so heißt der Ring \mathcal{V} eine (*Mengen-*) *Algebra* auf X .

Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiele

- (1) Sei \mathcal{V} die Menge aller endlichen Vereinigungen von offenen paarweise disjunkten beschränkten Intervallen auf \mathbb{R} . Es gilt zum Beispiel

$$]-1, 1[\cup]1, 3[\cup]10, 15[\in \mathcal{V}.$$

Das System \mathcal{V} ist ein Verband, aber kein Ring auf \mathbb{R} .

- (2) Sei $n \geq 1$. Das System \mathcal{R} der beschränkten Teilmengen des \mathbb{R}^n ist ein Ring, aber keine Algebra auf \mathbb{R}^n .
- (3) Für alle X ist $\mathcal{R} = \{E \subseteq X \mid E \text{ ist endlich}\}$ ein Ring. Ist X unendlich, so ist \mathcal{R} keine Algebra auf X .
- (4) Für alle X sind $\{\emptyset, X\}$ und $\mathcal{P}(X)$ Algebren auf X .

Damit können wir nun Inhalte definieren. Die folgende Definition geht auf Felix Hausdorff (1914) zurück.

Definition (*Inhalt auf einem Verband*)

Sei \mathcal{V} ein Verband. Eine Funktion $\mu : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty[$ heißt ein (*endlicher*)

Inhalt auf \mathcal{V} , falls für alle $A, B \in \mathcal{V}$ gilt:

$$(a) \mu(\emptyset) = 0,$$

$$(b) A \subseteq B \text{ impliziert } \mu(A) \leq \mu(B), \quad (\text{Monotonie})$$

$$(c) \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B). \quad (\text{Modularität})$$

Man kann allgemeiner auch Funktionen $\mu : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty]$ zulassen, mit der üblichen Arithmetik für den Wert ∞ . Die Eigenschaften (a), (b) und (c) bleiben gleich. Wir beschränken uns hier auf endliche Inhalte.

Es ist bemerkenswert, dass drei Eigenschaften genügen, um einen trag- und ausbaufähigen Inhaltsbegriff zu definieren. Der Null-Inhalt für die leere Menge und die Monotonie-Eigenschaften sind anschaulich klar. Mit der Modularität kann man sich anfreunden, indem man beobachtet, dass in $\mu(A) + \mu(B)$ der Inhalt des Schnitts der beiden Mengen doppelt gezählt wird. Die Eigenschaft ist analog zur aus dem Endlichen bekannten Mächtigkeitsaussage

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B| \quad \text{für alle endlichen Mengen } A, B.$$

Wir betrachten wieder einige Beispiele.

Beispiele

- (1) Sei \mathcal{V} wie in Beispiel (1) oben. Dann ist $\mu : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty[$ mit

$$\mu([a_1, b_1[\cup \dots \cup]a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) + \dots + (b_n - a_n),$$

wobei $a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n$, ein Inhalt auf \mathcal{V} .

- (2) Sei \mathcal{V} ein Verband auf X , und jedes $A \in \mathcal{V}$ sei endlich. Dann ist $\mu : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty[$ mit

$$\mu(A) = |A| = \text{„die Anzahl der Elemente von } A\text{“} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{V}$$

ein Inhalt auf A .

- (3) Sei $\mathcal{R} = \{ P \subseteq \mathbb{R}^2 \mid P \text{ ist Jordan-messbar} \}$. Dann ist der Jordan-Inhalt $J : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty[$ ein Inhalt auf \mathcal{R} .

- (4) Sei $\mathcal{R} = \{ P \subseteq \mathbb{R} \mid P \text{ beschränkt, } 1_P : [\inf(P), \sup(P)] \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrierbar} \}$. Dann ist $L : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty[$ mit

$$L(P) = \int_{\inf(P)}^{\sup(P)} 1_P(x) \, dx \quad \text{für alle } P \in \mathcal{R}$$

ein Inhalt auf \mathcal{R} .

In Ringen kann man Mengendifferenzen bilden. Dadurch kann der Inhaltsbegriff noch kompakter formuliert werden:

Satz (*Inhalte auf Ringen*)

Sei \mathcal{R} ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty[$. Dann sind äquivalent:

- (a) μ ist ein Inhalt auf \mathcal{R} .
- (b) Für alle disjunkten $A, B \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \quad (\text{Additivität})$$

Beweis

(a) impliziert (b): Sind $A, B \in \mathcal{R}$ disjunkt, so gilt

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B) + \mu(\emptyset) = \mu(A \cup B).$$

(b) impliziert (a): Für $A = B = \emptyset \in \mathcal{R}$ gilt nach Additivität, dass

$$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset),$$

sodass $\mu(\emptyset) = 0$ (da $\mu(\emptyset) < \infty$). Sind $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq B$, so ist $C = B - A$ in \mathcal{R} und die Mengen A und C sind disjunkt. Wegen $\mu(C) \geq 0$ gilt also

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(C) = \mu(A \cup C) = \mu(B).$$

Also ist μ monoton. Für beliebige $A, B \in \mathcal{R}$ gilt zudem

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A) + \mu((B - A) \cup (A \cap B)) =$$

$$\mu(A) + \mu(B - A) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cup (B - A)) + \mu(A \cap B) =$$

$$= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

Eine zentrales Thema der Inhaltstheorie ist das Fortsetzungsproblem: Gegeben ist ein Inhalt μ auf \mathcal{V} und ein \mathcal{W} mit $\mathcal{W} \supset \mathcal{V}$. Man möchte nun μ zu einem Inhalt auf das größere System \mathcal{W} fortsetzen. Der folgende Satz ist ein typisches Beispiel für eine derartige Fortsetzung:

Satz (*Fortsetzungssatz von Hausdorff: von Verbänden zu Ringen*)

Sei $\mu : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty[$ ein Inhalt auf einem Verband \mathcal{V} , und sei

$$\mathcal{W} = \left\{ \bigcup_{1 \leq k \leq n} (A_k - B_k) \mid A_k, B_k \in \mathcal{V} \text{ für alle } k \leq n, \text{ und die Mengen } A_k - B_k \text{ sind paarweise disjunkt} \right\}.$$

Dann ist \mathcal{W} ein Ring und $\mu^* : \mathcal{W} \rightarrow [0, \infty[$ mit

$$\mu^*\left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} (A_k - B_k)\right) = \sum_{1 \leq k \leq n} (\mu(A_k) - \mu(B_k))$$

für alle A_k, B_k wie in der Definition von \mathcal{W} ist ein wohldefinierter Inhalt auf \mathcal{W} , der μ fortsetzt (d. h., es gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{V}$).

3. Integrierbare Funktionen

Wir untersuchen nun Funktionen verschiedenen Typs auf ihre Integrierbarkeit, unter anderem stetige Funktionen, monotone Funktionen und Funktionen mit beschränkter Variation. Der Frage der gleichmäßigen Approximation durch Treppenfunktionen nachgehend gelangen wir zum Regelintegral, das heute zuweilen anstelle des Riemann-Integrals als „erstes Integral“ gelehrt wird. Im Gegensatz zum Darboux-Integral ist es nicht äquivalent zum Riemann-Integral. Mit der Dirichletschen Sprungfunktion lernen wir ein Beispiel für eine nichtintegrierbare Funktion kennen. Die Frage nach der Vertauschbarkeit von Limesbildung und Integration bringt schließlich eine Schwäche des Riemann-Integrals ans Licht.

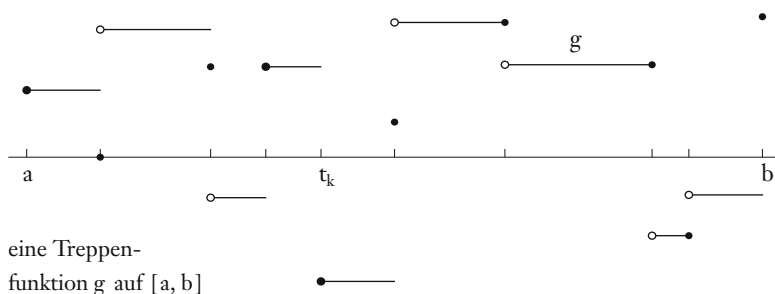
Treppenfunktionen

Den Riemann- und Darboux-Summen einer zu integrierenden Funktion f können wir stückweise konstante Funktionen zuordnen, die f approximieren. Diese Funktionen und die Art der Approximation studieren wir nun genauer.

Definition (Treppenfunktion)

Ein $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Treppenfunktion*, falls es eine Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$ und $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $k \leq n$ gilt:

$$g(x) = c_k \quad \text{für alle } x \in]t_k, t_{k+1}[.$$



An den Intervallgrenzen t_k kann eine Treppenfunktion beliebige Werte annehmen. Eine Treppenfunktion nimmt nur endlich viele Werte an, aber nicht jede Funktion mit endlichem Wertebereich ist eine Treppenfunktion.

Eine nützliche Notation für Treppenfunktionen verwendet Indikatorfunktionen, die wir bei der Diskussion des Jordan-Inhalts bereits kennengelernt haben:

Definition (die Indikatorfunktion 1_P^A von P bzgl. A)

Für $P \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ sei $1_P^A : A \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$1_P^A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in P, \\ 0, & \text{falls } x \in A - P. \end{cases}$$

Ist A festgelegt – etwa ein Intervall $[a, b]$ – so schreiben wir kurz 1_P statt 1_P^A .

Die Treppenfunktionen auf $[a, b]$ sind genau die Linearkombinationen von Indikatorfunktionen von Intervallen auf $[a, b]$, also Funktionen der Form

$$g = \sum_{k \leq n} c_k 1_{I_k}, \quad (\text{Darstellung von Treppenfunktionen})$$

wobei die Mengen I_k beliebige Intervalle in $[a, b]$ sind, die nicht notwendig disjunkt sein müssen. Aus der Integrierbarkeit von $1_I : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für Intervalle $I \subseteq [a, b]$ und der Linearität des Integrals folgt, dass

$$I(g) = I\left(\sum_{k \leq n} c_k 1_{I_k}\right) = \sum_{k \leq n} c_k L(I_k),$$

wobei $L(I) = \sup(I) - \inf(I)$ die Länge eines Intervalls I ist. Die rechte Seite hat die Form einer Riemann-Summe. Wir definieren:

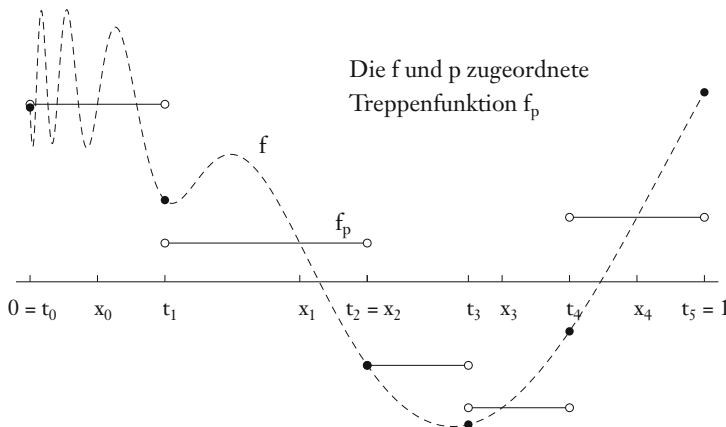
Definition (zugeordnete Treppenfunktion)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ eine Partition von $[a, b]$. Dann heißt

$$f_p = \sum_{k \leq n} f(x_k) 1_{]t_k, t_{k+1}[} + \sum_{t \in \{t_0, \dots, t_{n+1}\}} f(t) 1_{\{t\}}$$

die f und p zugeordnete Treppenfunktion.

Durch die zweite Summe stimmen f_p und f an den Zerlegungspunkten der Partition überein. Kommt es uns nur auf numerische Überlegungen an, so können wir die zweite Summe weglassen, das Integral von f_p ändert sich dadurch nicht.



Nach Konstruktion gilt $\sum_p f = I(f_p)$. Eine Riemann-Summe ist also das Integral der ihr zugeordneten Treppenfunktion. Ist f integrierbar und sind p_n , $n \in \mathbb{N}$, Partitionen mit gegen null konvergierenden Feinheiten, so gilt

$$I(f) = \lim_n \sum_{p_n} f = \lim_n I(f_{p_n}).$$

Auch das Ober- und Unterintegral können wir mit Hilfe von Treppenfunktionen elegant darstellen (Beweis als Übung):

Satz (*Treppenfunktionen und Ober- und Unterintegral*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

$$Sf = \inf \{ I(h) \mid h \text{ ist eine Treppenfunktion auf } [a, b] \text{ mit } f \leq h \},$$

$$sf = \sup \{ I(g) \mid g \text{ ist eine Treppenfunktion auf } [a, b] \text{ mit } g \leq f \}.$$

In Analogie zu f_p definieren wir:

Definition (*zugeordnete obere und untere Treppenfunktion*)

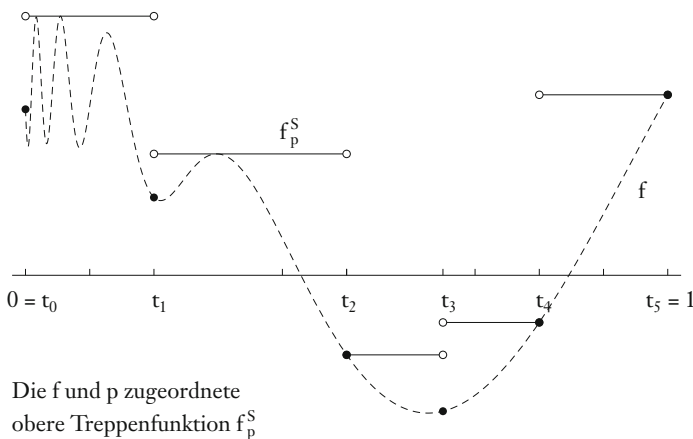
Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p = (t_k)_{k \leq n}$ eine Partition von $[a, b]$. Für alle $k \leq n$ seien $M_k = \sup_{x \in [t_k, t_{k+1}]} f(x)$, $m_k = \inf_{x \in [t_k, t_{k+1}]} f(x)$. Dann heißen

$$f_p^S = \sum_{k \leq n} M_k 1_{]t_k, t_{k+1}[} + \sum_{t \in \{t_0, \dots, t_{n+1}\}} f(t) 1_{\{t\}} \quad \text{und}$$

$$f_p^s = \sum_{k \leq n} m_k 1_{]t_k, t_{k+1}[} + \sum_{t \in \{t_0, \dots, t_{n+1}\}} f(t) 1_{\{t\}}$$

die f und p zugeordnete obere bzw. untere Treppenfunktion.

Nach Konstruktion gilt $S_p f = I(f_p^S)$ und $s_p f = I(f_p^s)$.



Aufgrund der Äquivalenz von Riemann- und Darboux-Integral gilt:

Satz (*Treppenfunktionen und Riemann-Integral*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist integrierbar.
- (b) Für alle $\varepsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen g und h auf $[a, b]$ mit $g \leq f \leq h$ und $I(h - g) < \varepsilon$.
- (c) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition p mit $I(f_p^S - f_p^s) < \varepsilon$.

Eine integrierbare Funktion lässt sich also von oben und von unten beliebig genau – im Sinne des Integralwerts, also einer reellen Zahl – durch Treppenfunktionen approximieren. Blicken wir auf unsere Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen, so erheben sich die folgenden vier Fragen:

Ist eine integrierbare Funktion f gleichmäßig oder wenigstens punktweise durch Treppenfunktionen approximierbar, d. h., gibt es Treppenfunktionen g_n mit

$$(1) f = \lim_n g_n \text{ (gleichmäßig) bzw. } (2) f = \lim_n g_n \text{ (punktweise)?}$$

Impliziert die (3) punktweise oder (4) gleichmäßige Konvergenz von Treppenfunktionen g_n gegen eine beschränkte Funktion f die Integrierbarkeit von f ?

Die Antworten auf die vier Fragen lauten „(1) nein, (2) nein, (3) nein, (4) ja“. Das positive Ergebnis ist dabei für die Theorie besonders wertvoll:

Satz (*Integrierbarkeit bei gleichmäßiger Approximation durch Treppenfunktionen*)

Ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, so ist f integrierbar und $I(f) = \lim_n I(g_n)$.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$, und sei $\varepsilon^* < \varepsilon/(2(b-a))$ (wobei wir $a < b$ annehmen, sonst ist die Aussage klar). Nach Voraussetzung gibt es ein n_0 , sodass

$$g_n - \varepsilon^* \leq f \leq g_n + \varepsilon^* \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Für alle n sind $g_n - \varepsilon^*$ und $g_n + \varepsilon^*$ Treppenfunktionen auf $[a, b]$ mit

$$I((g_n + \varepsilon^*) - (g_n - \varepsilon^*)) = I(2\varepsilon^* 1_{[a,b]}) = 2\varepsilon^*(b-a) < \varepsilon.$$

Also ist f integrierbar. Für alle $n \geq n_0$ gilt nach Monotonie

$$I(g_n) - \varepsilon \leq I(g_n - \varepsilon^*) \leq I(f) \leq I(g_n + \varepsilon^*) \leq I(g_n) + \varepsilon.$$

– Dies zeigt, dass $I(f) = \lim_n I(g_n)$.

Später werden wir sehen, dass die punktweise Approximation durch Treppenfunktionen die Integrierbarkeit zerstören kann. Bei der Diskussion des Riemannintegrals werden wir integrierbare Funktionen kennenlernen, die nicht gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximiert werden können. Dass dies auch punktweise nicht immer möglich ist, werden wir im zweiten Abschnitt mit Hilfe der Cantor-Menge zeigen. Damit sind dann die vier Fragen beantwortet.

Stetige Funktionen

Wir untersuchen nun, welche Funktionen integrierbar sind und welche nicht. Zu hoffen ist, dass sich Funktionen mit gutmütiger Oszillation integrieren lassen. Die Stetigkeit ist sicher eine solche Eigenschaft, und in der Tat sind alle stetigen Funktionen integrierbar. Zum Beweis verwenden wir entscheidend die gleichmäßige Stetigkeit einer stetigen Funktion auf einem kompakten Intervall.

Satz (*Integrierbarkeit stetiger Funktionen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximierbar und also insbesondere integrierbar.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Da f nach dem Satz von Heine gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$(+)\quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

- Sei $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ eine δ -Partition, und sei f_p die f und p zugeordnete
 – Treppenfunktion. Nach (+) gilt dann $\|f - f_p\| \leq \varepsilon$.

Wir können das Ergebnis noch verallgemeinern. Hierzu definieren wir:

Definition (*stückweise stetig*)

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig*, falls es eine Partition $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$ gibt, sodass für alle $k \leq n$ gilt:

$$(a) \quad f|]t_k, t_{k+1}[\text{ ist stetig,} \quad (b) \quad \lim_{x \downarrow t_k} f(x) \text{ und } \lim_{x \uparrow t_{k+1}} f(x) \text{ existieren.}$$

Die Bedingung (b) besagt, dass sich für alle k die Funktion $f|]t_k, t_{k+1}[$ stetig nach $[t_k, t_{k+1}]$ fortsetzen lässt. Diese Fortsetzungen lassen sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren, und damit lässt sich auch f gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren. Dies geschieht durch Zusammenfügen von Approximationen in den Partitionsintervallen, wobei wir an den Zerlegungspunkten t_k unsere Approximation gleich $f(t_k)$ setzen. Wir erhalten:

Korollar (*Integrierbarkeit stückweise stetiger Funktionen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig. Dann ist f gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximierbar und also insbesondere integrierbar.

Für beschränkte Funktionen des Typs „unstetig an höchstens endlich vielen Stellen“ – das sind mehr als die stückweise stetigen Funktionen! – gilt noch die Integrierbarkeit, aber im Allgemeinen ist keine gleichmäßige Approximation durch Treppenfunktionen mehr möglich. Wir kommen bei der Besprechung des Regelintegrals und in den Übungen darauf zurück.

Monotone Funktionen

Neben den stetigen Funktionen haben auch die monotonen Funktionen ein besonders gutmütiges Oszillationsverhalten. Auch sie lassen sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren:

Satz (*Integrierbarkeit monotoner Funktionen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximierbar und also insbesondere integrierbar.

Beweis

Wir nehmen an, dass f monoton steigend ist. Der Beweis für monoton fallende Funktionen ist analog. Sei also $\varepsilon > 0$, und sei $(y_k)_{k \leq n}$ eine Partition von $[f(a), f(b)]$ der Feinheit ε . Weiter sei

$$t_0 = a,$$

$$t_k = \sup \{ x \in [a, b] \mid f(x) < y_k \} \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n.$$

Dann ist $(t_k)_{k \leq n}$ eine Partition von $[a, b]$ (wobei $t_k = t_{k+1}$ für gewisse k möglich ist). Wir definieren $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = y_k \quad \text{für alle } x \in]t_k, t_{k+1}[\text{ und } k \leq n,$$

$$g(t_k) = f(t_k) \quad \text{für alle } k \leq n + 1.$$

Nach Definition der t_k und Monotonie von f gilt

$$y_k \leq f(x) < y_{k+1} \quad \text{für alle } k \leq n \text{ und } x \in]t_k, t_{k+1}[.$$

— Also ist g eine Treppenfunktion mit $\|f - g\| \leq \varepsilon$.

Im Beweis starten wir mit einer ε -Partition des Intervalls $[f(a), f(b)]$, das den Wertebereich von f umfasst. Diese Partition „lebt“ auf der y -Achse. Sie induziert eine Partition $(t_k)_{k \leq n}$ auf der x -Achse, mit deren Hilfe sich eine Treppenfunktion g definieren lässt, die im ε -Schlauch um f liegt. Genauer gilt

$$f - \varepsilon \leq g \leq f.$$

Ist f stetig und streng monoton steigend, so gilt

$$t_k = f^{-1}(y_k) \quad \text{für alle } k \leq n + 1.$$

Die Supremums-Definition der t_k liefert aber auch bei Sprüngen und Plateaus eine geeignete Partition der x -Achse. Der Beweis ist zudem ein Beispiel dafür, warum es manchmal vorteilhaft ist, „ $t_k \leq t_{k+1}$ “ statt „ $t_k < t_{k+1}$ “ in der Definition einer Partition zu fordern.

Funktionen mit beschränkter Variation

Wir führen nun noch eine neue Klasse von Funktionen ein, deren Definition bereits wie eine Integrierbarkeitsbedingung aussieht.

Definition (*beschränkte Variation, bv-Funktion*)

Für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die *Variation* $\text{var}(f) \in [0, \infty]$ von f durch:

$$\text{var}(f) = \sup \left\{ \sum_{k \leq n} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \mid (t_k)_{k \leq n} \text{ ist eine Partition von } [a, b] \right\}.$$

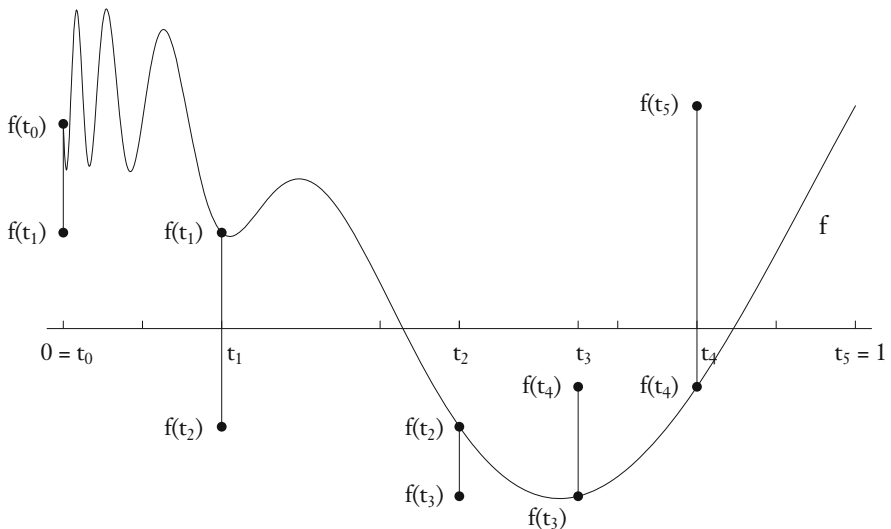
f heißt *von beschränkter Variation* oder eine *bv-Funktion*, falls $\text{var}(f) < \infty$.

Weiter heißt die Funktion $\text{var}_f: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\text{var}_f(x) = \text{var}(f|_{[a, x]}) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

die *Variationsfunktion* von f .

Die Abkürzung „bv“ ist auch im Englischen üblich und steht dort für „bounded variation“. Das folgende Diagramm illustriert, welche Veränderung oder „Variation“ von f durch den Begriff gemessen wird.



Die Summe $\sum_{k \leq 5} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$ ist die Gesamtlänge der senkrechten Linien. Die Variation von $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als das Supremum dieser Summen für alle Partitionen von $[0, 1]$.

Die bv-Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ sind abgeschlossen unter Linearkombinationen und bilden damit einen Unterraum des Vektorraums aller Funktionen auf $[a, b]$.

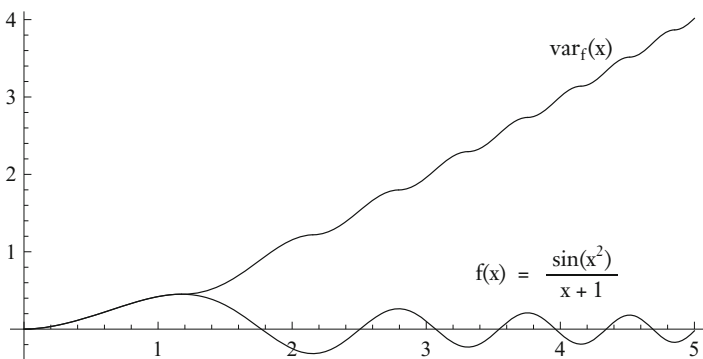
Häufig verwendete und leicht nachzuweisende Eigenschaften sind:

Satz (*elementare Eigenschaften der Variation*)

Für alle $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $c \in \mathbb{R}$ und $x \in [a, b]$ gilt:

- (a) $\text{var}(cf) = |c| \text{var}(f)$, speziell $\text{var}(f) = \text{var}(-f)$,
- (b) $\text{var}(f + g) \leq \text{var}(f) + \text{var}(g)$,
- (c) $\text{var}(f + c) = \text{var}(f)$,
- (d) $\text{var}(f) \geq |f(b) - f(a)|$, mit Gleichheit, falls f monoton,
- (e) $\text{var}(f) = 0$ genau dann, wenn f ist konstant,
- (f) $\text{var}(f) = \text{var}(f|_{[a, x]}) + \text{var}(f|_{[x, b]})$,
- (g) $\text{var}_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton steigend,
- (h) $\text{var}_f(a) = 0, \text{var}_f(b) = \text{var}(f)$.

Aufgrund von (d) ist jede monotone Funktion f auf $[a, b]$ eine bv-Funktion, und aufgrund von (f) gilt dies auch noch, wenn f stückweise monoton ist. Die Variationsfunktion kann für stückweise monotone Funktionen einfach bestimmt werden. Das folgende Diagramm gibt ein Beispiel hierzu.



Die Variationsfunktion einer stückweise monotonen Funktion f .

Es besteht der folgende bestechend schöne Zusammenhang zwischen beschränkter Variation und Monotonie:

Satz (Zerlegungssatz für bv-Funktionen)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist eine bv-Funktion.
- (b) Es gibt monoton steigende $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = g - h$ und $\text{var}(f) = \text{var}(g) + \text{var}(h)$.
- (c) Es gibt monotone $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = g - h$.

Beweis

(a) impliziert (b): Wir definieren $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \frac{1}{2} (\text{var}_f(x) + f(x)), \quad h(x) = \frac{1}{2} (\text{var}_f(x) - f(x)).$$

Dann gilt $f = g - h$. Für $x < y$ in $[a, b]$ gilt nach (d) und (f):

$$\begin{aligned} 2(g(y) - g(x)) &= \text{var}_f(y) - \text{var}_f(x) - (f(x) - f(y)) = \\ \text{var}(f|_{[x, y]}) - (f(x) - f(y)) &\geq \text{var}(f|_{[x, y]}) - |f(x) - f(y)| \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist g monoton steigend. Analog ist h monoton steigend. Damit ist

$$\begin{aligned} \text{var}(g) + \text{var}(h) &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) = \\ 1/2 (\text{var}(f) + f(b) - 0 - f(a) + \text{var}(f) - f(b) - 0 + f(a)) &= \text{var}(f). \end{aligned}$$

(b) impliziert (c): Ist klar.

(c) impliziert (a): Die bv-Funktionen auf $[a, b]$ umfassen die monotonen Funktionen und sind als Vektorraum abgeschlossen unter Differenzen.

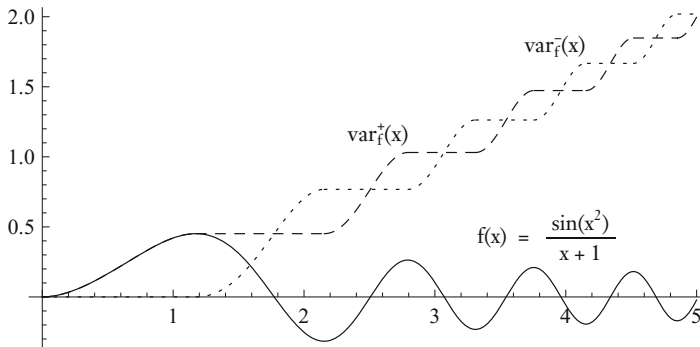
Die im Beweis konstruierte Darstellung $f = g - h$ heißt die *Jordan-Zerlegung* von f . Die Funktionen g und h erlauben eine weitere interessante Darstellung. Wir definieren hierzu für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die *positive* bzw. *negative Variationsfunktion* $\text{var}_f^+, \text{var}_f^-: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ von f durch

$$\begin{aligned} \text{var}_f^+(x) &= \sup \left\{ \sum_{k \leq n} (f(t_{k+1}) - f(t_k))^+ \mid (t_k)_{k \leq n} \text{ Partition von } [a, x] \right\}, \\ \text{var}_f^-(x) &= \sup \left\{ \sum_{k \leq n} (f(t_{k+1}) - f(t_k))^- \mid (t_k)_{k \leq n} \text{ Partition von } [a, x] \right\}, \text{ wobei} \\ x^+ &= \frac{|x| + x}{2}, \quad x^- = \frac{|x| - x}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann gilt, wie wir in den Übungen sehen werden, für die Jordan-Zerlegung $f = g - h$ einer bv-Funktion f :

$$g(x) = \text{var}_f^+(x) + \frac{f(a)}{2}, \quad h(x) = \text{var}_f^-(x) - \frac{f(a)}{2} \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Die Funktionen $(\text{var}_f + f)/2$ und $(\text{var}_f - f)/2$ der Jordan-Zerlegung sind also bis auf eine Konstante genau die positive und negative Variation von f .



Die Jordan-Zerlegung der Funktion f . Wegen $f(0) = 0$ gilt $f = \text{var}_f^+ - \text{var}_f^-$.

Aus dem Satz erhalten wir:

Korollar (*Integrierbarkeit von bv-Funktionen*)

Jede bv-Funktion ist integrierbar.

Beweis

Jede monotone Funktion ist integrierbar und die Differenz zweier

— integrierbarer Funktionen ist integrierbar.

Zum Umfang der bv-Funktionen halten wir schließlich noch fest:

Satz (*Lipschitz-stetige Funktionen sind bv-Funktionen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Dann ist f eine bv-Funktion. Insbesondere ist jede stetig differenzierbare Funktion auf $[a, b]$ eine bv-Funktion.

Beweis

Sei L eine Lipschitz-Konstante für f . Dann gilt für jede Partition $(t_k)_{k \leq n}$:

$$\sum_{k \leq n} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leq \sum_{k \leq n} L(t_{k+1} - t_k) = L(b - a).$$

— Also ist $\text{var}(f) \leq L(b - a)$.

Die Voraussetzung der Lipschitz-Stetigkeit kann hier nicht zur Stetigkeit abgeschwächt werden. Die Konstruktion einer stetigen Funktion f auf $[0, 1]$ mit $\text{var}(f) = \infty$ sei dem Leser zur Übung überlassen.

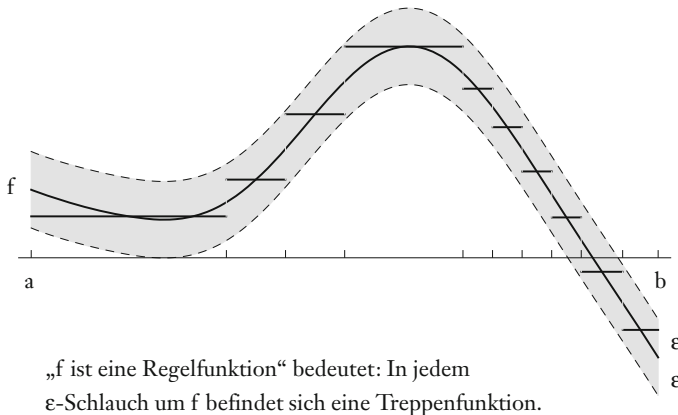
Bei der Diskussion von Kurven im \mathbb{R}^n im dritten Abschnitt werden wir auf den Begriff der Variation zurückkommen und dabei eine anschauliche Interpretation von $\text{var}(f)$ kennenlernen.

Regelfunktionen und Regelintegral

Unsere Untersuchungen motivieren die folgende Definition:

Definition (*Regelfunktion*)

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Regelfunktion*, falls f gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximierbar ist.



Wir haben im Verlauf unserer Untersuchungen bereits gezeigt: Jede Regelfunktion ist integrierbar (und ihr Integral ist der Limes von approximierenden Treppenfunktionen), und jede stückweise stetige oder monotone Funktion ist eine Regelfunktion. Weiter gilt die folgende sympathische und nicht schwer zu beweisende Charakterisierung:

Satz (*Charakterisierung der Regelfunktionen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

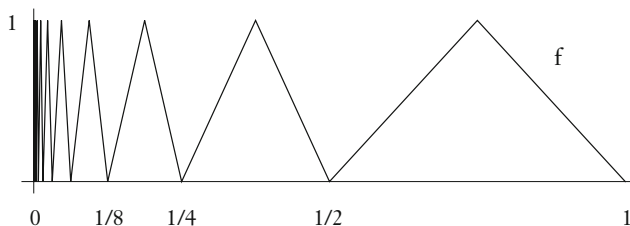
- (a) f ist eine Regelfunktion.
- (b) f besitzt links- und rechtsseitige Grenzwerte:

$$\lim_{x \uparrow p} f(x) \text{ und } \lim_{x \downarrow p} f(x) \text{ existieren für alle } p \in]a, b[,$$

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) \text{ und } \lim_{x \uparrow b} f(x) \text{ existieren.}$$

Die Aussage (b) trifft auf die stückweise stetigen und die monotonen Funktionen zu, sodass der Satz die Integrierbarkeit dieser Funktionen umfasst. Die Regelfunktionen bilden wieder einen Unterraum des Vektorraums aller Funktionen auf $[a, b]$. Damit ist auch jede bv-Funktion eine Regelfunktion, da sie als Differenz zweier monotoner Funktionen eine Linearkombination von Regelfunktionen ist.

Nicht jede integrierbare Funktion ist eine Regelfunktion: Ist f die uns schon bekannte Zackenfunktion auf $[0, 1]$ des folgenden Diagramms, so ist f Riemann-integrierbar, aber nicht regelintegrierbar.



Die Zackenfunktion f definiert eine aus unendlich vielen Dreiecken zusammengesetzte Fläche, ist aber nicht regelintegrierbar.

Bereits eine einzige Unstetigkeitsstelle kann also das Regelintegral überfordern. Dennoch gilt, dass die Menge der Regelfunktionen recht umfassend ist, und deswegen wird zuweilen das Integral lediglich für Regelfunktionen erklärt. Dies geschieht für ein gegebenes Intervall $[a, b]$ in zwei Schritten:

Konstruktion des Regelintegrals für ein gegebenes Intervall $[a, b]$

1. Schritt: Regelintegral für Treppenfunktionen

Sei $g = \sum_{k \leq n} c_k 1_{I_k}$ mit Intervallen $I_k \subseteq [a, b]$. Dann setzen wir

$$R(g) = \sum_{k \leq n} c_k L(I_k), \text{ wobei wieder } L(I_k) = \sup(I_k) - \inf(I_k).$$

2. Schritt: Ausdehnung auf alle Regelfunktionen

Sei f eine Regelfunktion auf $[a, b]$, und seien $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Treppenfunktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann setzen wir

$$R(f) = \lim_n R(g_n).$$

Die reelle Zahl $R(f)$ heißt das *Regelintegral* von f .

Zu zeigen ist in beiden Schritten die Wohldefiniertheit von $R(f)$: Man muss zeigen, dass $R(f)$ nicht von der Wahl der Intervalle I_k und auch nicht von der Wahl der Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abhängt. Abgesehen von dieser technischen Hürde besticht die Definition durch ihre Übersichtlichkeit. Das elementare Integral für Treppenfunktionen wird durch einen sehr klaren Grenzübergang erweitert.

Zusammenfassend halten wir fest:

Für alle Regelfunktionen gilt $R(f) = I(f)$, aber es gibt Funktionen f , für die $I(f)$ definiert, aber $R(f)$ nicht definiert ist.

Damit haben wir ein Beispiel für zwei nicht äquivalente Integralbegriffe kennengelernt. Der Unterschied ist recht subtil. Eine Riemann-integrierbare Funktion f lässt sich durch Treppenfunktionen g so gut approximieren, dass

$$|I(f) - I(g)|$$

beliebig klein wird, aber sie lässt sich im Allgemeinen nicht gleichmäßig (und auch nicht punktweise) durch Treppenfunktionen approximieren. Die Aussage, dass sich eine integrierbare Funktion „beliebig gut“ durch eine Treppenfunktion approximieren lässt, ist also mit Vorsicht zu genießen. Erst die Definition zeigt, was „beliebig gut“ bedeutet.

Zur Kürze der obigen Definition bemerken wir, dass die Riemann-Integrierbarkeit, speziell in Form der Darboux'schen Integrierbarkeitsbedingung, letztendlich auch nicht komplizierter ist. Sie kommt zudem ohne „ ε -Schläuche“ und gleichmäßige Konvergenz aus, die in der Schule nicht behandelt werden. Mathematisch ist die Äquivalenz zum Jordan-Inhalt von Bedeutung, die das Riemann-Integral vor dem Regelintegral auszeichnet. Auch aus historischer Sicht ist das Riemann-Integral unverzichtbar. Das Lebesgue-Integral wurde um 1900 auf der Basis des Riemann-Integrals entwickelt, das Regelintegral wurde dagegen erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts eingeführt. Die Eleganz der gleichmäßigen Approximation durch Treppenfunktionen ist andererseits nicht zu bestreiten. Weiter ist das Konzept der Approximation durch einfache Funktionen auch eines der zentralen Motive der allgemeinen maßtheoretischen Integrationstheorie. Es ist also gut, beide Integrale von Anfang an zu kennen. Im Folgenden bedeutet „integrierbar“ wie bisher „Riemann-integrierbar“, d. h., wir arbeiten mit dem etwas umfassenderen Begriff. Auf den Komfort des Regelintegrals müssen wir dabei, wie schon oben in den Beweisen der Integrierbarkeit der stetigen und der monotonen Funktionen, nicht verzichten.

Komposition und Produkt

Überraschenderweise sind die integrierbaren Funktionen nicht abgeschlossen unter Komposition (der Leser vergleiche dies mit den stetigen und den differenzierbaren Funktionen). Wir werden dies in den Übungen beweisen. Immerhin gilt aber:

Satz (*Komposition einer stetigen und einer integrierbaren Funktion*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ integrierbar, und sei $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $h = g \circ f$ integrierbar.

Wir begnügen uns hier mit dem Beweis einer etwas schwächeren Version, die aus didaktischer Sicht den Begriff der Lipschitz-Stetigkeit auffrischt. Der allgemeine Satz folgt unmittelbar aus dem Integrierbarkeitskriterium von Lebesgue, das wir im Ausblick unten vorstellen und im zweiten Abschnitt auch beweisen werden. Für viele Anwendungen genügt die schwächere Version.

Satz (*Komposition einer Lipschitz-stetigen und einer integrierbaren Funktion*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ integrierbar, und sei $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig.
Dann ist $h = g \circ f$ integrierbar.

Beweis

Sei $L > 0$ eine Lipschitz-Konstante für g , sodass also

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in [c, d].$$

Wir beweisen das Darboux'sche Integrierbarkeitskriterium. Sei also $\varepsilon > 0$.

Da die Funktion f integrierbar ist, gibt es eine Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$ mit

$$S_p f - s_p f \leq \frac{\varepsilon}{L}.$$

Dann gilt aber nach Wahl von L , dass

$$S_p(g \circ f) - s_p(g \circ f) =$$

$$\sum_{k \leq n} \sup_{x_1, x_2 \in [t_k, t_{k+1}]} |g(f(x_1)) - g(f(x_2))| (t_{k+1} - t_k) \leq$$

$$L \sum_{k \leq n} \sup_{x_1, x_2 \in [t_k, t_{k+1}]} |f(x_1) - f(x_2)| (t_{k+1} - t_k) =$$

$$L (S_p f - s_p f) \leq$$

$$\text{— } L \cdot \varepsilon / L = \varepsilon.$$

Mit einem algebraischen Trick können wir nun zeigen, dass das Produkt zweier integrierbarer Funktionen wieder integrierbar ist:

Satz (*weitere Abgeschlossenheitseigenschaften*)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind auch die Funktionen

$$|f|, f^2, fg$$

integrierbar.

Beweis

Die Behauptungen über $|f|$ und f^2 folgen aus der Lipschitz-Stetigkeit der Betrags- bzw. der Quadratfunktion auf dem aufgrund der Integrierbarkeit beschränkten Wertebereich von f . Die Integrierbarkeit des Produkts fg folgt nun aus der Integrierbarkeit von $(f + g)^2$, $(f - g)^2$ und der Polarisationsformel

$$\text{— } fg = \frac{(f + g)^2 - (f - g)^2}{4}.$$

Die Zerlegung in Positiv- und Negativteil

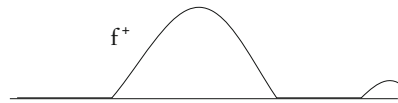
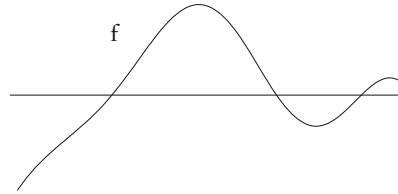
Von begrifflicher und anschaulicher Bedeutung für die Integrationstheorie ist schließlich die Zerlegung einer Funktion in ihren positiven und negativen Teil.

Definition (*Positivteil und Negativteil*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind der *Positivteil* $f^+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und der *Negativteil* $f^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von f definiert durch

$$f^+ = \frac{1}{2} (|f| + f),$$

$$f^- = \frac{1}{2} (|f| - f).$$



Nach Definition gilt also:

$$f^+ = \max(f, 0),$$

$$f^- = -\min(f, 0),$$

$$f = f^+ - f^-,$$

$$|f| = f^+ + f^-.$$



Weiter gilt $x^+ = \text{id}^+(x)$ und $x^- = \text{id}^-(x)$ für die bei der Diskussion der Variation eingeführten Werte x^+ und x^- .

Die Integration respektiert diese Aufspaltung in zwei Funktionen:

Satz (*Zerlegung in Positivteil und Negativteil*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist integrierbar.
- (b) f^+ und f^- sind integrierbar.

In diesem Fall gilt $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$.

Der Satz präzisiert das bei der Diskussion des Jordan-Inhalts geschilderte Vorgehen, die signierte Messung der Integration durch zwei unsignierte Flächenmessungen zu ersetzen.

Eine Verletzung der Integrierbarkeitsbedingung

Nach den zahlreichen positiven Ergebnissen wollen wir nun noch zeigen, dass nicht alle Funktionen integrierbar sind. Wichtige Gegenbeispiele liefert die Indikatorfunktion der rationalen Zahlen:

Satz (*Nichtintegrierbarkeit der rationalen Indikatorfunktionen*)

Seien $a < b$, und sei $Q = \mathbb{Q} \cap [a, b]$. Dann ist die Indikatorfunktion 1_Q auf $[a, b]$ nicht integrierbar.

Beweis

Ist p eine Partition von $[a, b]$ mit lauter rationalen Stützstellen, so gilt

$$\sum_p 1_Q = 1.$$

Ist p eine Partition von $[a, b]$ mit lauter irrationalen Stützstellen, so gilt

$$\sum_p 1_Q = 0.$$

Da es Partitionen beider Typen mit beliebiger Feinheit $\delta > 0$ gibt, ist die

– Integrierbarkeitsbedingung verletzt.

Es ist instruktiv, das Scheitern der Integration von 1_Q mit Hilfe des Darboux-Integrals zu formulieren. Für jede Partition p von $[a, b]$ gilt

$$s_p 1_Q = 0, \quad S_p 1_Q = 1 \cdot (b - a) = b - a.$$

so dass $s 1_Q = 0 < b - a = S 1_Q$. Die Unter- und Obersummen bleiben durch die dicht liegenden 0-Stellen und die dicht liegenden 1-Stellen bei 0 bzw. 1 hängen. Eine bessere Einschließung von 1_Q ist durch die Verwendung des Infimums und Supremums in der Definition der Unter- und Obersummen nicht möglich.

Die Funktion 1_Q ist als *Dirichletsche Sprungfunktion* auf $[a, b]$ bekannt. Obwohl diese Funktion nur zwei verschiedene Werte annimmt und aus der Sicht der überabzählbaren Menge \mathbb{R} „fast überall“ gleich null ist, sprengt sie die Möglichkeiten des Riemann-Integrals. Sie zeigt, dass die Abänderung einer Funktion an abzählbar vielen Stellen aus der Menge der integrierbaren Funktionen herausführen kann. Sie zeigt zudem, dass es nicht genügt, nur rationale Stützstellen zuzulassen. Denn sind in $p = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ alle x_k rational, so ist $\sum_p 1_Q = b - a$. Damit wäre 1_Q Riemann-integrierbar, wenn man nur rationale Stützstellen zulässt. Diese Überlegungen zeigen, dass man sich bei der Beschränkung auf äquidistante Partitionen nicht auch noch auf linksseitige, mittige oder rechtsseitige Stützstellen zurückziehen kann, denn für rationale Intervallgrenzen a und b wären dann auch alle Stützstellen rational. Analoges gilt für ausschließlich irrationale Stützstellen.

Weitere Beispiele für nichtintegrierbare Funktionen werden wir in den Übungen und im zweiten Abschnitt kennenlernen.

Zur Vertauschbarkeit von Integration und Limesbildung

Wir stellen, dem Leitmotiv der Vertauschbarkeit von Operationen folgend, die Frage:

$$\text{Gilt stets } \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx?$$

Das Riemann-Integral hat hier keine besonders guten Eigenschaften! Bereits die punktweise monotone Konvergenz von 0-1-wertigen Treppenfunktionen kann eine nichtintegrierbare Grenzfunktion erzeugen:

Satz (*Verlust der Integrierbarkeit bei punktweiser Konvergenz*)

Es gibt Treppenfunktionen

$$g_n : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

die punktweise monoton steigend gegen eine nichtintegrierbare Funktion konvergieren.

Beweis

Sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die alle rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ ohne Wiederholungen durchläuft, d. h., für alle $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ gibt es genau ein n mit $q_n = q$. Wir setzen nun:

$$g_n = 1_{\{q_0, \dots, q_n\}} \quad \text{für alle } n.$$

Dann ist jedes g_n eine Treppenfunktion und es gilt $I(g_n) = 0$, da sich g_n nur an endlich vielen Stellen von der Nullfunktion auf $[0, 1]$ unterscheidet.

Aber die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise monoton steigend gegen

- die nichtintegrierbare Dirichletsche Sprungfunktion $1_{\mathbb{Q}}$ auf $[0, 1]$.

Bei gleichmäßiger Konvergenz ist dagegen alles gut. Oben hatten wir bereits gezeigt, dass

$$I(\lim_n g_n) = \lim_n I(g_n)$$

gilt, wenn $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf $[a, b]$ ist, die gleichmäßig konvergiert. Allgemein gilt nun:

Satz (*Vertauschungssatz bei gleichmäßiger Konvergenz*)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen ein $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \lim_n f_n(x) \, dx = \lim_n \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Folge gibt es ein n_0 mit der Eigenschaft:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [a, b] \text{ und } n \geq n_0.$$

Damit ist f beschränkt (durch $\|f_{n_0}\| + \varepsilon$), und für alle $n \geq n_0$ und alle Partitionen p gilt:

$$|S_p f - S_p f_n| \leq \varepsilon(b-a) \quad \text{und} \quad |s_p f - s_p f_n| \leq \varepsilon(b-a).$$

Diese Abschätzungen übertragen sich auf die Ober- und Unterintegrale:

$$(+)|Sf - Sf_n| \leq \varepsilon(b-a) \quad \text{und} \quad |sf - sf_n| \leq \varepsilon(b-a) \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Da f_{n_0} integrierbar ist, gilt $Sf_{n_0} = sf_{n_0}$. Nach (+) gilt also

$$|Sf - sf| \leq |Sf - Sf_{n_0}| + |Sf_{n_0} - sf_{n_0}| + |sf_{n_0} - sf| \leq 2\varepsilon(b-a).$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist $Sf = sf$. Also ist f integrierbar. Weiter folgt aus (+), dass $Sf = \lim_n Sf_n$. Also ist

$$\text{— } I(f) = Sf = \lim_n Sf_n = \lim_n I(f_n).$$

Die Integrierbarkeitsaussage des Satzes verallgemeinert das Ergebnis, dass jede Regelfunktion integrierbar ist.

Für Reihen erhalten wir:

Korollar (*Vertauschungssatz für gleichmäßig konvergente Reihen*)

Sei $\sum_n f_n$ eine Reihe integrierbarer Funktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen ein $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \sum_n f_n(x) \, dx = \sum_n \int_a^b f_n(x) \, dx. \quad (\text{gliedweise Integration})$$

Speziell gilt die Vertauschbarkeit von Limes und Integral also für die gleichmäßig konvergenten Potenzreihen. Ist $f = \sum_n a_n(x-p)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und ist $[a, b] \subseteq]p-R, p+R[$, so gilt

$$\int_a^b \sum_n a_n(x-p)^n \, dx = \sum_n a_n \int_a^b (x-p)^n \, dx. \quad (\text{gliedweise Integration von Potenzreihen})$$

Wir wollen noch ein positives Ergebnis für die punktweise Konvergenz ohne Beweis angeben. Es besagt, dass unter beschränkten Bedingungen lediglich die Integrierbarkeit der Grenzfunktion problematisch ist. Gilt sie, darf man Limes und Integral vertauschen.

Satz (*Vertauschungssatz für punktweise beschränkte Konvergenz*)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$, die punktweise gegen ein integrierbares $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Die Folge sei beschränkt, d. h., es gebe ein $s \geq 0$ mit $\|f_n\| \leq s$ für alle n . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_n f_n(x) dx = \lim_n \int_a^b f_n(x) dx.$$

Der Leser möge eine unbeschränkte Folge von immer schmäler werdenden Zackenfunktionen $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, \infty[$ mit den Eigenschaften

- (a) $I(f_n) = 1$ für alle n ,
- (b) $\lim_n f_n = 0$ (punktweise)

konstruieren. Sie zeigen, dass auf die Voraussetzung der Beschränktheit der Folge selbst bei stetigen Funktionen f_n nicht verzichtet werden kann. Es ist wichtig, dass die Graphen der Funktionen f_n in einem Rechteck $[a, b] \times [-s, s]$ leben.

Einen der Gründe, warum das Riemann-Integral von den Mathematikern „überarbeitet“ wurde, können wir nun klar angeben:

Man möchte ein Integral zur Verfügung haben, das bessere Eigenschaften hinsichtlich punktweiser Limesbildung besitzt.

Dieser Wunsch ist erfüllbar, und eine derartige Verbesserung des Riemann-Integrals ist das Lebesgue-Integral. Dieses Integral ist unempfindlich gegenüber abzählbaren Veränderungen und speziell ist die Dirichletsche Sprungfunktion 1_Q auf $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar mit Lebesgue-Integral 0. Darüber hinaus gilt der Vertauschungssatz für punktweise beschränkte Konvergenz ohne die Annahme der Lebesgue-Integrierbarkeit der Grenzfunktion. Diese Integrierbarkeit wird gefolgt, nicht vorausgesetzt. Für alle Riemann-integrierbaren Funktionen f stimmen das Riemann- und das Lebesgue-Integral für f überein, sodass also das Lebesgue-Integral das Riemann-Integral so fortsetzt wie das Riemann-Integral das Regelintegral. Der Erfolg des Lebesgue-Integrals ist zu einem großen Teil den verbesserten Vertauschungseigenschaften geschuldet, die in der höheren Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie an allen Ecken und Enden gebraucht werden.

Unter Verwendung des Auswahlaxioms der Mengenlehre kann man erneut 0-1-wertige Funktionen konstruieren, die nicht Lebesgue-integrierbar sind. Das Ziel, alle beschränkten Funktionen auf $[a, b]$ integrieren zu können, ist mit dem Auswahlaxiom nicht vereinbar. Man kann das Lebesgue-Integral erneut erweitern, aber jede solche Erweiterung hinterlässt nichtintegrierbare Funktionen, und es ist keine „ultimative Erweiterung“ in Sicht. Irgendwann muss man also aufhören, den Integrationsbegriff auszureizen. Diese subtilen Fragen sind im 20. Jahrhundert intensiv untersucht worden, und von der Analysis führt heute an dieser Stelle eine goldene Brücke in die Grundlagenforschung der Mathematik.

Ausblick: Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit

Wir haben gesehen, dass viele, aber nicht alle Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar sind. Im Gegensatz zum Regelintegral haben wir jedoch noch kein griffiges Kriterium für die Riemann-Integrierbarkeit erkennen können. Ein solches Kriterium kann mit Hilfe moderner maßtheoretischer Begriffe formuliert werden. Wir definieren hierzu:

Definition (*Lebesgue-Nullmenge*)

Ein $P \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine *Lebesgue-Nullmenge* oder eine Menge mit *Lebesgue-Maß Null*, falls für alle $\varepsilon > 0$ Intervalle $I_n =]a_n, b_n[$, $n \in \mathbb{N}$, existieren mit

$$(a) \quad P \subseteq \bigcup_n I_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt ein } n \text{ mit } x \in I_n\},$$

$$(b) \sum_n L(I_n) = \sum_n (b_n - a_n) \leq \varepsilon.$$

Zur Überdeckung von P dürfen abzählbar viele Intervalle verwendet werden.

Eine Menge P reeller Zahlen hat also das Lebesgue-Maß Null, wenn P durch abzählbar viele offene Intervalle mit beliebig kleiner positiver Längensumme überdeckt werden kann. (Die Offenheit der Intervalle ist dabei nicht wesentlich, man erhält den gleichen Begriff, wenn man beliebige Intervalle zulässt.)

Satz (*Eigenschaften von Lebesgue-Nullmengen*)

(a) Jede abzählbare Menge hat das Lebesgue-Maß Null.

(b) Ist P_n eine Lebesgue-Nullmenge für alle n , so ist auch $P = \bigcup_n P_n$ eine Lebesgue-Nullmenge.

Beweis

zu (a): Die Aussage ist klar für $P = \emptyset$. Sei also $P = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $\varepsilon_n = \varepsilon/2^{n+2}$ für alle n . Dann gilt

$$P \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{\varepsilon_n}(x_n), \quad \sum_n L(U_{\varepsilon_n}) = \sum_n 2\varepsilon_n = \sum_n \frac{\varepsilon}{\gamma^{n+1}} = \varepsilon.$$

zu (b): Sei $\varepsilon > 0$. Für alle n sei $(I_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Intervallen mit

$$P_n \subseteq \bigcup_k I_k^n, \quad \sum_n L(I_k^n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Dann ist $\{ I_k^n \mid k, n \in \mathbb{N} \}$ abzählbar und es gilt

$$P \subseteq \bigcup_{n,k} I_k^n, \quad \sum_{n,k} L(I_k^n) = \sum_n \sum_k L(I_k^n) \leq \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

Aussage (b) ist eine Verallgemeinerung von (a), denn für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\{x\}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Um mit dem Argumentationstyp vertraut zu werden, ist ein separater Beweis von (a) aber vielleicht instruktiver.

Eine überabzählbare Lebesgue-Nullmenge werden wir im zweiten Abschnitt mit der Cantor-Menge C kennenlernen.

Im Hinblick auf die Riemann-Jordan-Länge gilt: Ist $P \subseteq [a, b]$ eine Menge mit Jordan-Länge Null, d. h.

$$L(P) = \int_a^b 1_P(x) dx = 0,$$

so ist P auch eine Lebesgue-Nullmenge. Dagegen ist $1_P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ im Allgemeinen nicht Riemann-integrierbar, wenn $P \subseteq [a, b]$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Ein Beispiel liefert die Dirichletsche Sprungfunktion. Denn $Q = \mathbb{Q} \cap [a, b]$ ist als abzählbare Menge eine Nullmenge, aber $1_Q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht Riemann-integrierbar.

Es gilt der ebenso beeindruckende wie nützliche Charakterisierungssatz:

Satz (*Integrierbarkeitskriterium von Lebesgue*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist Riemann-integrierbar.
- (b) $P = \{x \in [a, b] \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.

Die Riemann-integrierbaren Funktionen sind also genau die im Sinne von Lebesgue „fast überall“ stetigen Funktionen. Speziell ist jede Funktion mit einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge an Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar. Das Ergebnis ist ein Paradebeispiel dafür, wie die Moderne das Verständnis der Klassik vertiefen kann.

Wir werden den Satz im zweiten Abschnitt beweisen. Die Implikation von (a) nach (b) könnte an dieser Stelle bewiesen werden und wir bereiten die Argumentation in den Übungen vor. Für die Implikation von (b) nach (a) ist es jedoch hilfreich, den topologischen Kompaktheitsbegriff zur Verfügung zu haben.

4. Differentiation und Integration

Wir haben das Integral bislang vor allem begrifflich untersucht. Wir kennen viele interessante Eigenschaften und Feinheiten der Konstruktion, aber die Berechnung von Riemann- und Darboux-Summen und der sich aus ihnen ergebenden Integrale ist nach wie vor mühsam. Durch ein überraschend einfach zu beweisendes weiteres theoretisches Ergebnis werden wir nun schlagartig in die Lage versetzt, viele Integrale mühelos bestimmen zu können. Das Zauberwort, das das Tor öffnet, heißt Differenzieren. Anschaulich ist klar, dass zwischen der Steigung einer Funktion und ihrem Integral ein enger Zusammenhang besteht. Eine in einem Punkt p stark ansteigende positive Funktion f sammelt rechts von p mehr Fläche unter sich als eine in p flachere Funktion g mit $g(p) = f(p)$. Es zeigt sich, dass dieser Zusammenhang nicht nur eng, sondern besonders einfach ist: Die Integration erscheint als die Umkehrung der Differentiation. Wir diskutieren zwei verschiedene Versionen dieses fundamentalen Zusammenhangs.

Stammfunktionen

Wir erinnern vorab noch einmal an den Begriff der Stammfunktion, der in diesem Kapitel eine Schlüsselrolle spielen wird:

Definition (*Stammfunktion*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$, und sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Stammfunktion* von f , falls $F' = f$.

Im Folgenden sei I immer ein offenes, halboffenes, abgeschlossenes Intervall, das beschränkt oder unbeschränkt sein kann. Für den unbeschränkten Fall benötigen wir noch:

Definition (*lokale Integrierbarkeit*)

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, falls $f|_{[a, b]} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $a < b$ in I integrierbar ist.

Jede stetige oder monotone Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist lokal integrierbar. Weiter ist zum Beispiel $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ lokal integrierbar.

Wir beweisen zwei Hauptsätze I und II, die den Zusammenhang zwischen dem Differenzieren und Integrieren beschreiben. Entscheidend wird einmal der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und einmal der Mittelwertsatz der Integralrechnung verwendet.

Hauptsatz I: Die Berechnung von Integralen durch Stammfunktionen

Wir zeigen, dass $I(f)$ durch Auswerten einer beliebigen Stammfunktion von f an den Integrationsgrenzen berechnet werden kann. In den Beweis geht außer dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung nur die Definition des Integrals ein.

Satz (Hauptsatz I)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar, und sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Beweis

Es genügt, die Aussage für den Fall $a < b$ und $\text{Def}(f) = [a, b]$ zu zeigen. Hierzu sei $p = (t_k)_{k \leq n}$ eine Partition von $[a, b]$ ohne Stützstellen. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es $x_k \in [t_k, t_{k+1}]$ mit

$$F(t_{k+1}) - F(t_k) = F'(x_k) (t_{k+1} - t_k) \quad \text{für alle } k \leq n.$$

Folglich gilt für die Partition $p^* = (t_k, x_k)_{k \leq n}$ wegen $F' = f$, dass

$$\begin{aligned} \sum_{p^*} f &= \sum_{k \leq n} f(x_k) (t_{k+1} - t_k) = \sum_{k \leq n} F'(x_k) (t_{k+1} - t_k) = \\ \sum_{k \leq n} (F(t_{k+1}) - F(t_k)) &= F(t_{n+1}) - F(t_0) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Da f integrierbar ist, ist der Abstand zwischen $I(f)$ und $\sum_{p^*} f = F(b) - F(a)$ kleiner als jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$, wenn wir p hinreichend fein wählen.

— Folglich ist $I(f) = F(b) - F(a)$.

Wir fassen das Argument noch einmal zusammen:

- (a) Die Differenz $F(b) - F(a)$ ist, für jede Wahl von Zerlegungspunkten, eine gewisse Riemann-Summe für diese Zerlegungspunkte.
- (b) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so konvergieren Riemann-Summen gegen $I(f)$ bei gegen Null konvergierenden Feinheiten. Nach (a) müssen die reellen Zahlen $I(f)$ und $F(b) - F(a)$ also gleich sein.

Mit Hilfe des Hauptsatzes können wir Integrale bestimmen, ohne zu integrieren, d. h., ohne Riemann- oder Darboux-Summen zu berechnen. Wir müssen „lediglich“ eine Stammfunktion der betrachteten Funktion f finden. Da jede Ableitung auch eine Erkenntnis über Stammfunktionen mit sich bringt, kennen wir bereits viele Stammfunktionen: Ist $g' = f$, so ist g eine Stammfunktion von f . Tabellen für Ableitungen werden zu Tabellen für Integrale. Stärker ist das Auffin-

den von Stammfunktionen algorithmisch beherrschbar, sodass wir heute den Computer nicht nur zur numerischen, sondern häufig auch zur symbolischen Integration verwenden können. Wir kommen bei der Diskussion der Integrationsregeln in 1.5 noch einmal auf diesen Punkt zurück.

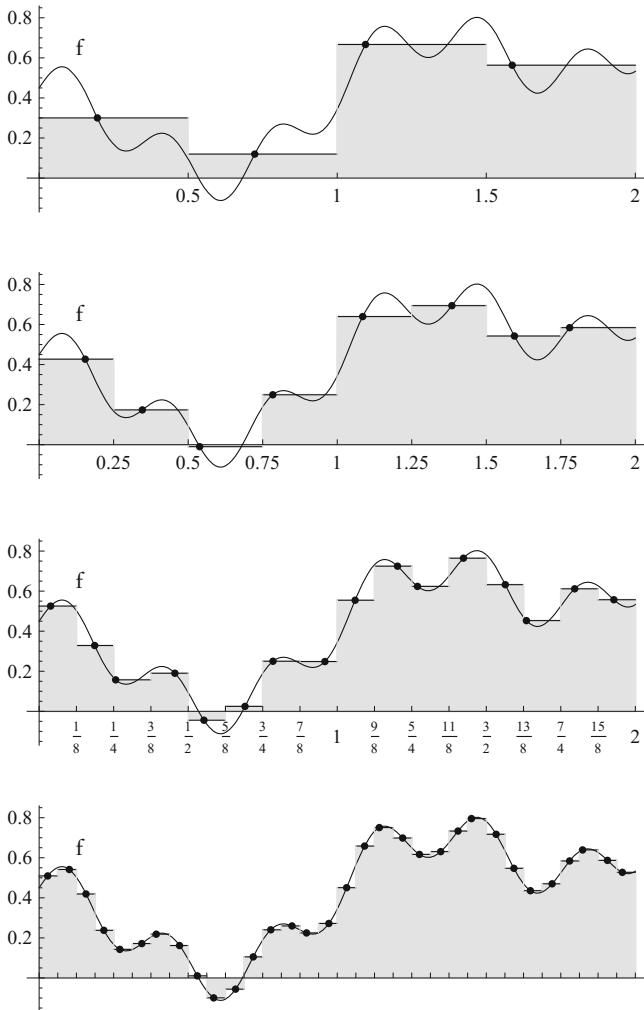


Diagramm zum Hauptsatz I und seinem Beweis: Zu einer vorgegebenen stützstellenfreien Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$ von $[0, 2]$ existieren stets Stützstellen $(x_k)_{k \leq n}$, sodass

$$f(x_k) (t_{k+1} - t_k) = F'(x_k) (t_{k+1} - t_k) = F(t_{k+1}) - F(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x) \, dx \quad \text{für alle } k.$$

Die in den Diagrammen dargestellten Riemann-Summen (der signierte Inhalt der grauen Flächen) sind jeweils genau das Integral von f .

Betrachtet man die Voraussetzungen des Hauptsatzes I, so erhebt sich die Frage, ob die Integrierbarkeit von f nicht überflüssig ist. Dies ist aber nicht der Fall, denn es gibt eine differenzierbare Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung nicht integrierbar ist! Da jede stetige Funktion integrierbar ist, sind derartige Beispiele im Expertenfeld der differenzierbaren, aber nicht stetig differenzierbaren Funktionen zu suchen. Wir werden nach der Diskussion des Hauptsatzes ein derartiges F angeben. Mit der umgekehrten Frage, welche integrierbaren Funktionen eine Stammfunktion besitzen, werden wir uns im Folgenden ebenfalls noch genauer beschäftigen.

Bei der Bestimmung von Integralen treten Differenzen der Form $F(b) - F(a)$ auf. Es ist sinnvoll, hierfür eine eigene Notation einzuführen.

Definition (*Auswertungsnotation*)

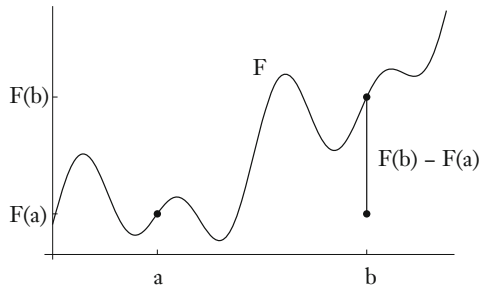
Für $F: P \rightarrow \mathbb{R}$ und $a, b \in P$ sei

$$F \Big|_a^b = [F]_a^b = F(b) - F(a).$$

Die Notation eignet sich auch für Terme, sodass etwa

$$tx^2 \Big|_{x=a}^{x=b} = tb^2 - ta^2,$$

$$tx^2 \Big|_{t=a}^{t=b} = bx^2 - ax^2.$$



Es gelten folgende Rechenregeln:

Satz (*Eigenschaften der Auswertungsnotation*)

Für alle F, G, a, b gilt unter der Voraussetzung der Definiertheit:

$$(a) (F + G) \Big|_a^b = F \Big|_a^b + G \Big|_a^b, \quad (b) F \Big|_a^b = -F \Big|_b^a,$$

$$(c) F \Big|_a^c + F \Big|_c^b = F \Big|_a^b, \quad (d) (F \circ G) \Big|_a^b = F \Big|_{G(a)}^{G(b)}.$$

Ist F eine Stammfunktion einer lokal integrierbaren Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt für alle $a, b \in I$ nach dem Hauptsatz, dass

$$\int_a^b f = F \Big|_a^b. \quad (\text{Berechnung durch Auswertung})$$

Beispielsweise ist also

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \log \Big|_1^2 = \log(2) - \log(1) = \log(2).$$

Weit verbreitet ist die folgende Definition eines „unbestimmten“ Integrals ohne untere und obere Integrationsgrenzen:

Definition (*unbestimmtes Integral*)

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar und besitzt f eine Stammfunktion, so heißt

$$\int f = \int f(x) dx = \{ F \mid F : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist Stammfunktion von } f \}$$

das *unbestimmte Integral* von f .

Wir hatten in der Analysis 1 gezeigt, dass sich zwei auf einem Intervall definierte Funktionen F und G mit $F' = G'$ nur um eine Konstante unterscheiden. Denn wegen $(F - G)' = 0$ ist $F - G$ konstant. Es gilt also:

Satz (*Identifizierung aller Stammfunktionen bei gegebener Stammfunktion*)

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar und F eine Stammfunktion von f , so gilt

$$\int f = \{ F + c \mid c \in \mathbb{R} \}.$$

Die Definition des unbestimmten Integrals als Menge bringt zum Ausdruck, dass eine Stammfunktion nicht eindeutig bestimmt ist. Diese Korrektheit ist oft eher hinderlich denn nützlich, und man vereinbart deswegen:

Konvention

Besitzt ein lokal integrierbares $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so

bezeichnen $\int f$ und $\int f(x) dx$ auch irgendeine Stammfunktion von f .

Stammfunktionen werden wie Integranden zudem oft durch Terme in der Integrationsvariablen angegeben.

Damit ist $\int_a^b f(x) dx = \left[\int f \right]_a^b = \int f(x) dx \Big|_{x=a}^{x=b}$, und wir können schreiben:

$$\int \sin = \cos, \quad \int \sin(x) dx = \cos(x), \quad \int \exp = \exp, \quad \int e^x dx = e^x,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(x) \text{ für } x > 0, \quad \int \frac{1}{x} dx = \log(|x|) \text{ für } x \neq 0 \text{ usw.}$$

Die Konvention ist auch ein Ausdruck des Bedürfnisses, unter dem Integral einer Funktion ebenso eine Funktion zu verstehen wie unter der Ableitung. Üblich ist daneben auch die „plus c“-Notation, die der Tatsache besser gerecht werden will, dass eine Stammfunktion nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Ist F eine Stammfunktion von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, so schreibt man hier

$$\int f = F + c, \quad \int f(x) dx = F(x) + c, \quad \int \frac{1}{x} dx = \log(x) + c \quad \text{usw.}$$

Sobald das unbestimmte Integral an zwei Grenzen ausgewertet wird, spielen die fehlende oder unspezifizierte Konstante und die verwendete Variable keine Rolle mehr. Die saloppen Notationen führen in der Regel zu keinen Fehlern.

Viele, aber nicht alle Eigenschaften des Integrals gelten auch für das unbestimmte Integral. Sind $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar und sind F und G Stammfunktionen von f , so ist $H = cF + dG$ eine Stammfunktion von $cf + dg$. Wir können also schreiben

$$\int (cf + dg) = c \int f + d \int g. \quad (\text{Linearität des unbestimmten Integrals})$$

Dagegen folgt aus $f \leq g$ nicht mehr notwendig, dass $F \leq G$, und damit gilt keine Monotonie für das unbestimmte Integral.

Hauptsatz II:

Die Existenz von Stammfunktionen für stetige Funktionen

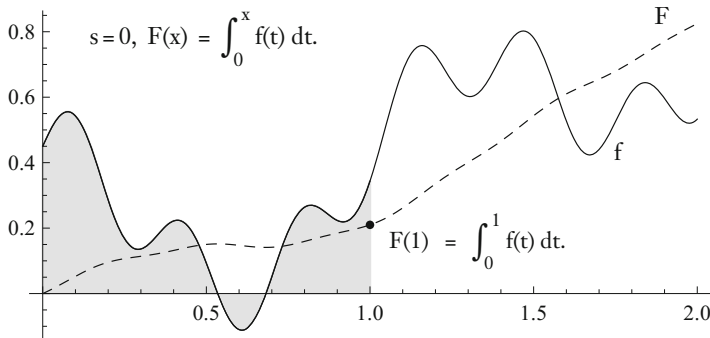
Wir wissen nun, dass Stammfunktionen die Berechnung von Integralen ermöglichen. Weiter wissen wir, dass wir mit einer Stammfunktion bereits alle Stammfunktionen einer Funktion f auf einem Intervall kennen. Wir wissen aber noch nicht, wie wir Stammfunktionen konstruieren können und welche Funktionen eine Stammfunktion besitzen. Diese Fragen können wir für stetige Funktionen mit Hilfe von Integration beantworten. Wir erhalten einen Existenzsatz für Stammfunktionen, der uns nochmal den Hauptsatz I – eingeschränkt auf stetige Funktionen – liefern wird. Im Zentrum steht bei diesem Ansatz die Funktionsbildung durch Variieren der Integrationsgrenze:

Definition (Integralfunktion zu einem Startpunkt)

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Weiter sei $s \in I$. Dann heißt die Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_s^x f = \int_s^x f(t) dt \quad \text{für alle } x \in I$$

die *Integralfunktion* von f zum (*unteren*) *Startwert* oder zur (*unteren*) *Grenze* s .



Die Integralfunktion F beschreibt in der Variablen x , welchen signierten Flächeninhalt f zwischen s und x definiert. Es gilt $F(s) = 0$ und

$$F(b) - F(a) = \int_s^b f - \int_s^a f = \int_s^b f + \int_a^s f = \int_a^b f.$$

Wir können auch eine Funktion zu einem oberen Startwert s betrachten:

$$G(x) = \int_x^s f \quad \text{für alle } x \in I.$$

Wegen $G(x) = -F(x)$ für alle x genügt es aber, eine der beiden Integralfunktionen zu untersuchen. Wir bevorzugen im Folgenden untere Startwerte.

Die Integralfunktion besitzt, wie der Leser zeigen möge, sehr gute Stetigkeitseigenschaften:

Satz (*Lipschitz-Stetigkeit der Integralfunktion*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Integralfunktion von f zu einem Startwert s . Dann ist F Lipschitz-stetig. Genauer gilt: Ist f beschränkt durch L , so ist L eine Lipschitz-Konstante für F .

Bei stetiger Ausgangsfunktion f ist die Integralfunktion sogar differenzierbar, und ihre Ableitung ergibt wieder die Funktion f . Im Beweis spielt diesmal der Mittelwertsatz der Integralrechnung die Hauptrolle:

Satz (*Hauptsatz II*)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ die Integralfunktion von f zu einem Startwert s . Dann ist F eine Stammfunktion von f .

Beweis

Sei $x \in I$. Dann gilt für alle $h \neq 0$ mit $x + h \in I$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_s^{x+h} f - \int_s^x f \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f.$$

Auf der rechten Seite steht, sowohl für $h > 0$ als auch für $h < 0$, der Mittelwert von f im durch x und $x + h$ gegebenen Intervall. Da f stetig ist, ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung anwendbar und liefert ein von h abhängiges p zwischen x und $x + h$ mit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(p).$$

Da f im Punkt x stetig ist, gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{p \rightarrow x} f(p) = f(x).$$

— Damit ist F differenzierbar im Punkt x , und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Als Korollar des Hauptsatzes II erhalten wir den Hauptsatz I, allerdings nur noch in einer schwächeren Form für stetige Funktionen:

Korollar (*Hauptsatz I für stetige Funktionen*)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei G eine Stammfunktion von f . Dann gilt:

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Beweis

Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Integralfunktion von f zu einem Startwert s . Da F eine Stammfunktion von f ist, gibt es ein c mit

$$G = F + c.$$

Dann gilt aber

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = G(b) - G(a).$$

Unsere Argumentation verlief diesmal wie folgt:

(a) Die Integralfunktion

$$F(x) = \int_s^x f$$

einer stetigen Funktion f ist eine Stammfunktion von f . Nach Definition von F gilt $I(f) = F(b) - F(a)$.

(b) Da sich zwei beliebige Stammfunktionen nur durch eine Konstante unterscheiden, gilt die Berechnungsformel in (a) für jede beliebige Stammfunktion G von f .

Zusammenfassung

Wir bezeichnen – wie in der Literatur auch üblich – unsere beiden Sätze „Hauptsatz I“ und „Hauptsatz II“ zusammen als „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“. Der Hauptsatz beinhaltet also ein Ergebnis über die Berechnung von Integralen durch Stammfunktionen und ein Ergebnis über die Konstruktion von Stammfunktionen durch Integration. Beide Zugänge ergänzen sich, und beide Beweise beleuchten, wie es zum engen Zusammenspiel zwischen dem seiner Natur nach lokalen Differenzieren und dem seiner Natur nach globalen Integrieren kommt. Es ist bemerkenswert, dass die beiden Sätze letztlich einfache Folgerungen aus den Mittelwertsätzen sind.

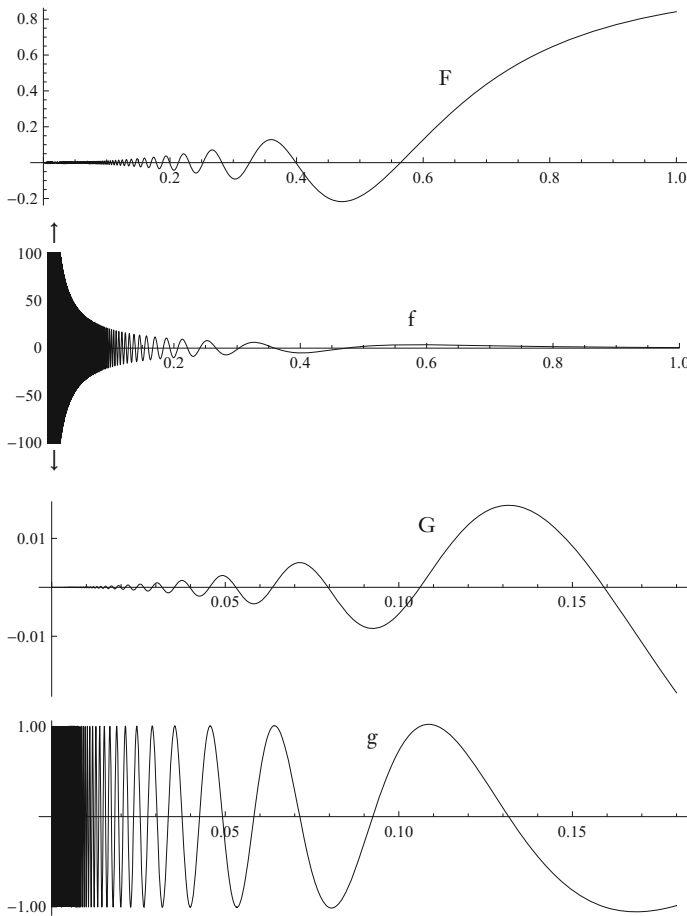
Stammfunktionen und Integrierbarkeit

Wir haben gezeigt, dass jede stetige Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt. Offen sind noch die folgenden Fragen:

Sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist dann $f = F'$ integrierbar?

*Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und g besitze eine Stammfunktion G .
Ist dann g stetig (und damit G stetig differenzierbar)?*

Die Antwort ist jeweils „nein“. Gegenbeispiele liefern nicht stetig differenzierbare Funktionen, wie wir sie in der Analysis 1 bereits kennengelernt haben:



$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Ausblick: Zur Ableitung der Integralfunktion

Wir haben gesehen, dass eine Integralfunktion einer stetigen Funktion f eine Stammfunktion von f ist. Die Voraussetzung der Stetigkeit kann nicht fallengelassen werden, denn bereits die Integralfunktionen von Treppenfunktionen weisen Knicke auf. Dennoch hat eine Integralfunktion in der Regel sehr gute Differenzierbarkeitseigenschaften. Speziell gilt der Hauptsatz II auch punktweise:

Satz (*Hauptsatz II, punktweise Version*)

Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar, und sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Integralfunktion von f zum Startwert s . Dann gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, in denen f stetig ist.

Wir können obigen Beweis nicht übernehmen, da wir den Mittelwertsatz nicht anwenden können. Ein ε - δ -Stetigkeitsargument führt jedoch zum Ziel:

Beweis

Sei also f stetig in $x \in I$. Nach Definition von F gilt für alle $h \neq 0$ mit $x + h \in I$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x) \, dt.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f in x gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $t \in [x - \delta, x + \delta] \cap I$. Ist also $|h| < \delta$, so ist der Integrand $f(t) - f(x)$ des obigen Integrals beschränkt durch ε und damit gilt

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{|h|} |h| \varepsilon = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Der Hauptsatz II für stetige Funktionen folgt aus der punktwisen Version, sodass wir also einen Beweis gefunden haben, der ohne den Mittelwertsatz der Integralrechnung auskommt. Die Argumentation liefert allgemeiner:

Satz (*Hauptsatz II, Version für Regelfunktionen*)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar, und sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Integralfunktion von f zu einem Startwert s . Weiter sei $x \in I$ derart, dass der rechtsseitige Grenzwert $f(x+) = \lim_{h \downarrow 0} f(x+h)$ existiert. Dann gilt $F'(x+) = f(x+)$ für die rechtsseitige Ableitung $F'(x+)$ von F an der Stelle x . Analoges gilt für linksseitige Grenzwerte und Ableitungen. Ist also f eine Regelfunktion, so ist F rechts- und linksseitig differenzierbar mit $F'(x+) = f(x+)$ und $F'(x-) = f(x-)$ für alle $x \in I$.

An einer Stetigkeitsstelle fallen der links- und rechtsseitige Grenzwerte $f(x+)$ und $f(x-)$ mit dem Funktionswert $f(x)$ zusammen, und damit verallgemeinert dieser Satz noch einmal den punktwisen Hauptsatz II.

Beweis

Sei also $x \in I$ derart, dass der rechtsseitige Grenzwert

$$f(x+) = \lim_{h \downarrow 0} f(x+h).$$

existiert. Dann gibt es für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(t) - f(x+)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in]x, x+\delta[.$$

Wie im Beweis der lokalen Version des Hauptsatzes II folgt hieraus, dass für alle h mit $0 < h < \delta$ gilt:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x+) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x+) \, dt \right| < \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass für die rechtsseitige Ableitung gilt:

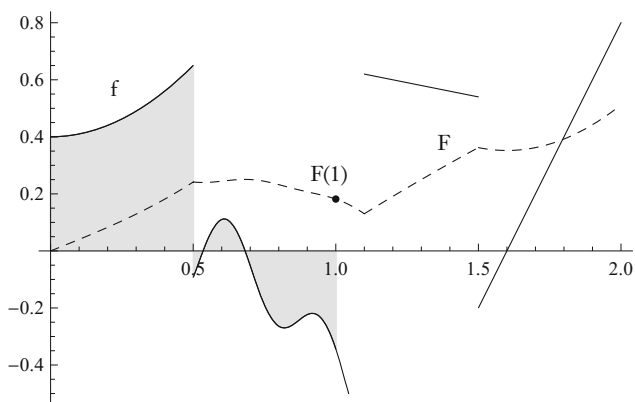
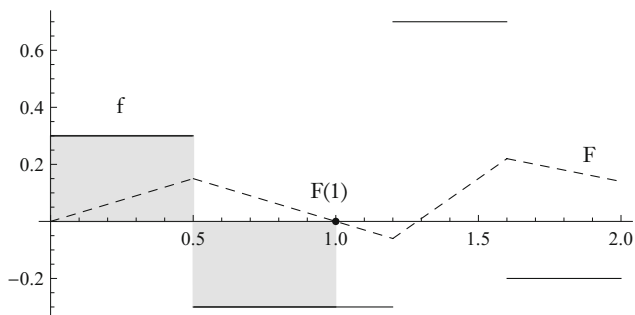
$$F'(x+) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x+).$$

Analog gilt $F'(x-) = \lim_{h \uparrow 0} (F(x+h) - F(x))/h = f(x-)$, falls $f(x-)$ existiert.

Ist f eine Regelfunktionen, so existieren alle einseitigen Grenzwerte. Dies — zeigt den Zusatz.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass gute Eigenschaften von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zu noch besseren Eigenschaften der Integralfunktion F von f zu einem beliebigen Startwert s führen:

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \dots$	so ist $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \dots$
integrierbar	Lipschitz-stetig
stetig	stetig differenzierbar
$f(x+)$ existiert	$F'(x+) = f(x+)$
$f(x-)$ existiert	$F'(x-) = f(x-)$
$f(x-) = f(x) = f(x+)$	$F'(x) = f(x)$



Beispiele für Integralfunktionen $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ mit unstetigen Integranden.

5. Anwendungen des Hauptsatzes

Für das Produkt und die Verkettung zweier Funktionen gibt es keine allgemeinen Integrationsregeln. Wir können aber die Ableitungsregeln mit dem Hauptsatz kombinieren, um unseren Integrationskalkül zu verbessern. Dies führt zur Technik der partiellen Integration, die wir aus der Produktregel gewinnen, und zur magischen Technik der Substitution, der die Kettenregel zugrunde liegt.

Als weitere Anwendungen des Hauptsatzes beweisen wir die Irrationalität von π , den Satz von Taylor mit Restglied in Integralform sowie einen Satz über die Vertauschung von Differentiation und Grenzwertbildung.

Die partielle Integration

Die Umkehrung der Produktregel liefert:

Satz (*partielle Integration*)

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Folglich gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b (fg') = fg \Big|_a^b - \int_a^b (f'g).$$

Beweis

Die Funktionen $f'g$, fg' und $(fg)' = f'g + fg'$ sind nach Voraussetzung stetig. Also existieren die unbestimmten Integrale dieser Funktionen.

Weiter ist fg eine Stammfunktion von $(fg)'$. Damit gilt nach der Linearität des unbestimmten Integrals, dass

$$fg = \int (fg)' = \int (f'g + fg') = \int (f'g) + \int (fg').$$

Der Zusatz folgt aus der Berechnung eines bestimmten Integrals durch

- Auswertung einer Stammfunktion und Linearität des bestimmten Integrals.

Wir können also unter guten Voraussetzungen ein Produkt fh wie folgt integrieren: Integration von h liefert ein g mit $g' = h$. Nun differenzieren wir f und integrieren dann $f'g$, was einfacher sein kann als die Integration von $fh = fg'$. Die Formel der Produktregel erlaubt uns dann das Integral von fh zu bestimmen. Eine Ableitung in einem Faktor eines Produkts kann also auf den anderen Faktor verschoben werden, auf Kosten einer Auswertung des Produkts an den Integrationsgrenzen.

Besonders überzeugend ist der Übergang von fg' zu $f'g$, wenn f eine komplizierte Funktion wie \log oder \arctan ist, die eine relativ einfache Ableitung besitzt:

Beispiel 1: Integration des Logarithmus

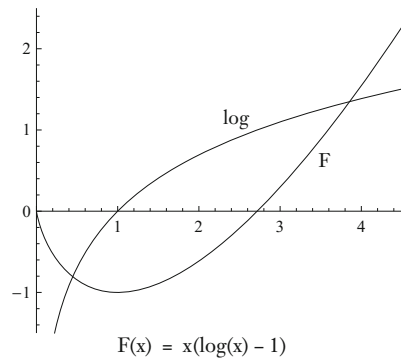
Für alle $a, b > 0$ gilt:

$$\int_a^b \log(x) \, dx = \int_a^b \log(x) \, 1 \, dx =$$

$$\log(x)x \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} x \, dx =$$

$$\log(x)x \Big|_a^b - \int_a^b 1 \, dx =$$

$$x(\log(x) - 1) \Big|_a^b.$$



Beispiel 2: Integration des Arkustangens

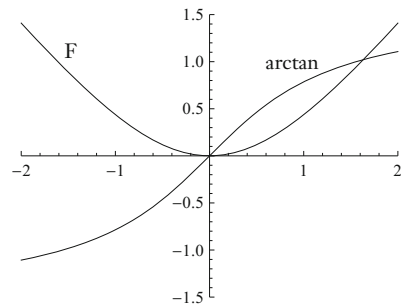
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \arctan(x) \, 1 \, dx =$$

$$\arctan(x)x \Big|_a^b - \int_a^b \frac{x}{1+x^2} \, dx =$$

$$\arctan(x)x \Big|_a^b - \left[\frac{\log(1+x^2)}{2} \right]_a^b =$$

$$\left[\arctan(x)x - \frac{\log(1+x^2)}{2} \right]_a^b.$$



Eine Stammfunktion von $x/(1+x^2)$ haben wir hier „geraten“ (vgl. aber die Beispiele zur Substitutionsregel unten).

Schließlich betrachten wir noch ein Beispiel, bei dem der zweite Faktor ebenso kompliziert ist wie der erste – er ist sogar identisch mit dem ersten:

Beispiel 3: Integration von \sin^2

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x) \, dx &= \int \sin(x) \sin(x) \, dx = \int \sin(x) (-\cos(x))' \, dx = \\
&= -\sin(x) \cos(x) - \int \sin(x)' (-\cos(x)) \, dx = \\
&= -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) \, dx.
\end{aligned}$$

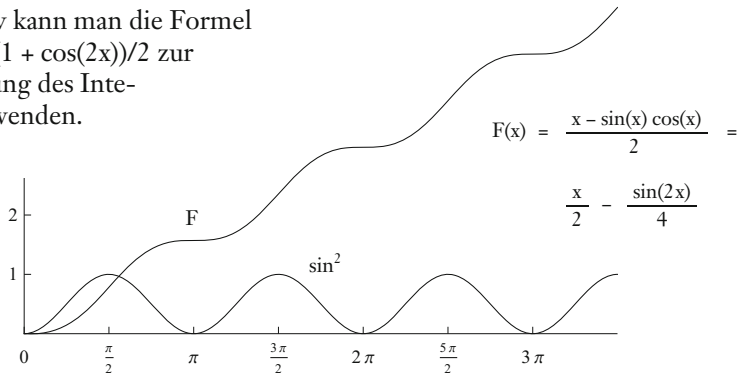
Einen Moment lang sieht es so aus, als hätten wir nichts gewonnen. Da aber $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle x gilt, erhalten wir durch Addition des Integrals über $\sin^2(x)$ auf beiden Seiten, dass

$$\begin{aligned}
2 \int \sin^2(x) \, dx &= -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) + \sin^2(x) \, dx = \\
&= -\sin(x) \cos(x) + x.
\end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{x - \sin(x) \cos(x)}{2}.$$

Alternativ kann man die Formel $\sin^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$ zur Berechnung des Integrals verwenden.



In den Übungen werden wir eine Rekursionsformel für $\int \sin^n(x) \, dx$, $n \geq 2$, herleiten und daraus eine unendliche Produktdarstellung von π gewinnen:

$$\pi/2 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \dots =$$

$$\lim_n \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} \quad (\text{Wallis-Produkt})$$

Das Wallis-Produkt konvergiert recht langsam. Für $n = 1000$ ist das Doppelte des Partialprodukts zum Beispiel gleich 3,1400...

Die Substitutionsregel

Die Umkehrung der Kettenregel führt zu einer anwendungsreichen Erweiterung des Kalküls, die das Integrieren in den Ruf gebracht hat, eine Mischung aus Kunst und Wissenschaft zu sein:

Satz (*Substitutionsregel*)

Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $s : J \rightarrow I$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int ((f \circ s) s') = \left(\int f \right) \circ s.$$

Folglich gilt für alle $c, d \in J$:

$$\int_c^d ((f \circ s) s') = \int_{s(c)}^{s(d)} f, \text{ d.h. } \int_c^d f(s(t)) s'(t) dt = \int_{s(c)}^{s(d)} f(x) dx.$$

Beweis

Nach Voraussetzung sind f und $(f \circ s) s'$ stetig, sodass die unbestimmten Integrale des Satzes existieren. Sei nun F eine Stammfunktion von f . Dann gilt nach der Kettenregel

$$(f \circ s) s' = (F' \circ s) s' = (F \circ s)'.$$

Dies zeigt die Behauptung über das unbestimmte Integral. Die Aussage für das bestimmte Integral ergibt sich daraus:

$$\int_c^d ((f \circ s) s') = \left(\int f \right) \circ s \Big|_c^d = F \circ s \Big|_c^d = F(s(d)) - F(s(c)) = \int_{s(c)}^{s(d)} f.$$

Die Funktion s wird oft auch als „Substitutionsfunktion“ bezeichnet. Der Sinn dieser Sprechweise wird besonders deutlich, wenn wir die Regel von rechts nach links lesen (was in Anwendungen häufig der Fall ist). Ist nämlich ein Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

zu bestimmen, so können wir dies durch eine geeignet oder genial gewählte „Substitution“ $x = s(t)$ in das gleichwertige Integral

$$\int_c^d f(s(t)) s'(t) dt$$

überführen, wobei die Grenzen c und d so zu wählen sind, dass $s(c) = a$ und $s(d) = b$ (*Urbildsuche*). Hierbei ist nur auf die stetige Differenzierbarkeit von s und auf die Definiertheit von $f(s(t))$ für alle Punkte t zwischen c und d zu achten. Es ist nicht notwendig, dass s injektiv ist.

Beispiel

Für $x = s(t) = t^2$ gilt wegen $\sqrt{t^2} = |t|$ und $s'(t) = 2t$, dass

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{t}{|t|} dt = \int_1^2 1 dt = 1,$$

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_{-1}^2 \frac{t}{|t|} dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{|t|} dt + \int_1^2 \frac{t}{|t|} dt = 0 + 1,$$

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_{-1}^{-2} \frac{t}{|t|} dt = - \int_{-2}^{-1} -1 dt = 1.$$

Ist s injektiv, so können wir schreiben:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{s^{-1}(a)}^{s^{-1}(b)} f(s(t)) s'(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \int f = \int ((f \circ s) \circ s') \circ s^{-1}.$$

Die Bestimmung eines unbestimmten Integrals durch eine injektive Substitution notieren wir in termplastigen Berechnungen auch suggestiv in der Form

$$x = s(t), \quad t = s^{-1}(x), \quad \int f(x) dx = \int f(s(t)) s'(t) dt = G(t) = G(s^{-1}(x)).$$

Beim zweiten Integral „steckt“ die Anwendung der Funktion s^{-1} in der Variablen t , was durch $t = s^{-1}(x)$ zum Ausdruck gebracht wird. Diese Notation ist nicht ganz korrekt, da Variablen keine funktionale Information tragen. Sie liefert aber in Termnotation eine korrekte Stammfunktion $G(s^{-1}(x))$ von $f(x)$ und leistet damit, was man möchte.

Eine der großen Stärken der Leibniz-Notationen für die Ableitung und das Integral ist, dass sie die Substitutionsregel quasi beinhalten:

Merkhilfe zur Substitution

Ist $x = s(t)$, so ist $dx = ds(t)$ (was immer das „d“ genau bedeuten soll) und damit

$$\int f(x) dx = \int f(s(t)) ds(t) = \int f(s(t)) \frac{ds(t)}{dt} dt = \int f(s(t)) s'(t) dt.$$

Die Version mit Integrationsgrenzen erhält man, indem man explizit notiert, welche Variablen von wo nach wo laufen:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx =_{x=s(t)} \int_{s(t)=a}^{s(t)=b} f(s(t)) s'(t) dt =$$

$$\int_{t=s^{-1}(a)}^{t=s^{-1}(b)} f(s(t)) s'(t) dt = \int_{s^{-1}(a)}^{s^{-1}(b)} f(s(t)) s'(t) dt.$$

In den folgenden Beispielen nehmen wir die Definiertheit der Ausdrücke stillschweigend an. Wenden wir die Regel von links nach rechts an (Entfernung der Funktion s , Anwendung von s an den Integrationsgrenzen), so starten wir mit der Variablen t . Bei Anwendung von rechts nach links (Einführung von s , Urbildsuche für die Grenzen) starten wir mit der Variablen x . Prinzipiell sind die Variablennamen natürlich beliebig.

Beispiel 1: Translation

$$\int_c^d f(t+w) dt = \int_{c+w}^{d+w} f(x) dx. \quad (\text{Translationsregel})$$

Dabei ist die Translationskonstante $w \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Substitutionsfunktion ist $s(t) = t + w$ mit $s'(t) = 1$. Ausführlich notiert lautet die Umformung:

$$\int_c^d f(t+w) dt = \int_c^d f(s(t)) s'(t) dt = \int_{s(c)}^{s(d)} f(x) dx = \int_{c+w}^{d+w} f(x) dx.$$

Zur Illustration wenden wir die Regel auch noch von rechts nach links an. Hier schreiben wir:

$$x = s(t) = t + w, \quad s'(t) = 1, \quad t = s^{-1}(x) = x - w,$$

$$\int_a^b f(x+w) dx = \int_{s^{-1}(a)}^{s^{-1}(b)} f(s(t)+w) s'(t) dt = \int_{a-w}^{b-w} f(t) dt.$$

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int f(x+w) dx = \int f(s(t)+w) s'(t) dt = \int f(t) dt = F(t) = F(x+w).$$

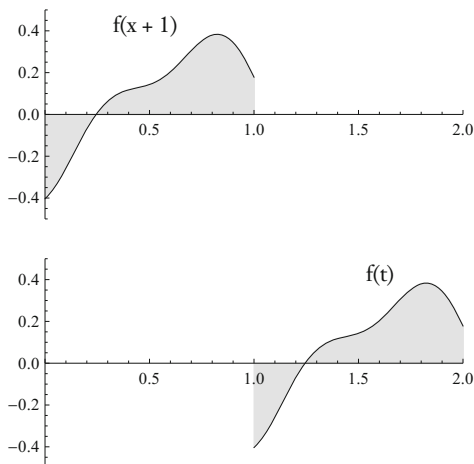


Illustration der Translationsregel für die Grenzen $a = 0$, $b = 1$ und die Translationskonstante $w = 1$. Die Inhalte der grauen Flächen sind gleich.

Beispiel 2: Skalierung

Für alle $w \neq 0$ gilt

$$\int_a^b f(wx) \, dx = \frac{1}{w} \int_{wa}^{wb} f(t) \, dt. \quad (\text{Skalierungsregel})$$

Hier wird die Substitution $x = s(t) = t/w$, $s'(t) = 1/w$, $t = wx$ verwendet.

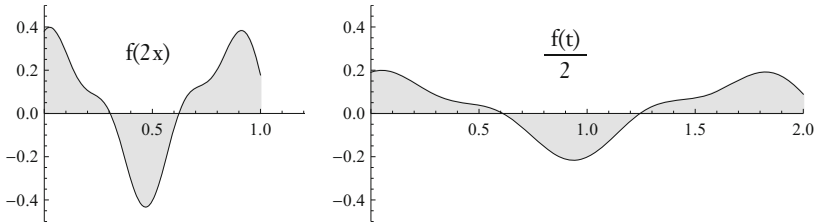


Illustration der Skalierung für $a = 0$, $b = 1$, $w = 2$. Der Graph links wird um den Faktor 2 waagrecht gestreckt und um den Faktor $1/2$ senkrecht gestaucht. Die grauen Flächen haben den selben Inhalt.

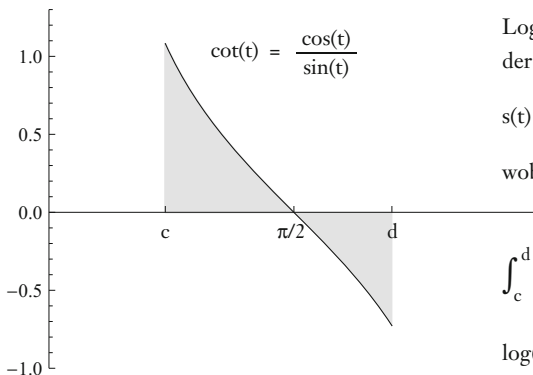
Beispiel 3: Logarithmische Ableitung

Für alle stetig differenzierbaren Funktionen $s : [c, d] \rightarrow]0, \infty[$ gilt

$$\int_c^d \frac{s'(t)}{s(t)} \, dt = \int_{s(c)}^{s(d)} \frac{1}{x} \, dx = \log(x) \Big|_{s(c)}^{s(d)} = \log(s(x)) \Big|_c^d.$$

(Für f gilt hier $f(x) = 1/x$.) Dies lässt sich auch mit Hilfe des Hauptsatzes direkt einsehen, wenn man mit der logarithmischen Ableitung

$$L(s) = (\log \circ s)' = \frac{s'}{s} \text{ vertraut ist.}$$



Logarithmische Ableitung mit der Funktion $s : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$s(t) = \sin(t) \text{ für alle } t,$$

wobei $c, d \in]0, \pi[$.

$$\int_c^d \cot(t) \, dt = \int_c^d \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \, dt =$$

$$\log(\sin(d)) - \log(\sin(c))$$

Beispiel 4: Kreisfläche

Sei $r > 0$. Wir betrachten die Kreisscheibe

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \}$$

mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt 0 und definieren $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für alle } x \in [-r, r].$$

Der Graph von f ist die obere Hälfte der Kreislinie von K . Der Inhalt $J(K)$ von K ist damit gleich $2I(f)$. Wir können diesen Wert mit Hilfe der Substitution

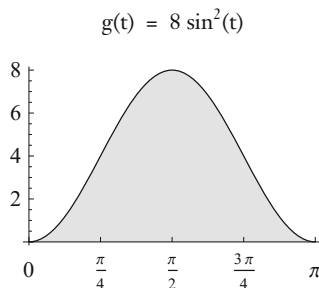
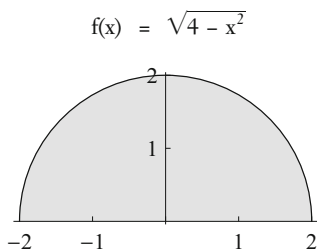
$$x = s(t) = r \cos(t), \quad s'(t) = -r \sin(t)$$

und dem oben bestimmten Integral über \sin^2 berechnen:

$$2I(f) = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = -2 \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2(t)} \, r \sin(t) \, dt =$$

$$2r^2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2(t)} \sin(t) \, dt = 2r^2 \int_0^{\pi} \sin^2(t) \, dt =$$

$$2r^2 \left[\frac{x - \cos(x) \sin(x)}{2} \right]_0^{\pi} = r^2 \pi.$$



Kreisflächenberechnung durch Substitution für den Radius $r = 2$.

Die beiden Flächen haben den selben Inhalt $r^2 \pi / 2 = 2\pi$.

Damit haben wir das klassische Problem der Berechnung einer Kreisfläche mit Hilfe des Integrationskalküls unter Einsatz der trigonometrischen Funktionen gelöst. Im Ausblick zu diesem Kapitel werden wir eine geometrische Methode besprechen, mit der die alten Griechen Kreisflächen approximierten. In Abschnitt 6 werden wir die Formel $r^2 \pi$ durch zweidimensionale Integration in Polarkoordinaten erhalten. Schließlich eignet sich auch die Leibnizsche Sektorformel, die wir in den Ergänzungen E7 kennenlernen werden, zur Berechnung von Kreisflächen.

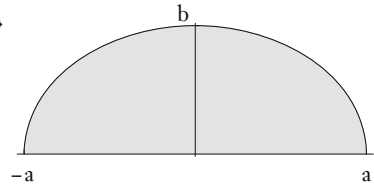
Beispiel 5: Fläche einer Ellipse

Seien $a, b > 0$. Wir betrachten die Fläche

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \leq 1 \right\}$$

einer Ellipse mit Mittelpunkt 0, deren Halbachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Ist $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch



$$f(x) = b \sqrt{1 - (x/a)^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{für alle } x \in [-a, a],$$

so ist der Graph von f die obere Hälfte der Ellipse, die nun als ein um dem Faktor b/a entlang der y -Achse skaliertes Kreis mit Radius a erscheint. Die Fläche $J(E)$ berechnet sich nach dem vorherigen Beispiel zu

$$I(E) = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{b}{a} a^2 \pi = ab\pi.$$

Beispiel 6: Unbestimmtes Integral der Kreisfunktion

Obige Berechnung der Kreisfläche lief von $-r$ bis r und die Grenzen wurden bei der Substitution durch Urbildsuche angepasst. Ist man an einer Stammfunktion von f interessiert, so verläuft die Substitution wie folgt. Mit

$$x = s(t) = r \cos(t), \quad s'(t) = -r \sin(t), \quad t = \arccos(x/r)$$

für $x \in [-r, r]$ gilt:

$$\int f(x) \, dx = \int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = - \int \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2(t)} \, r \sin(t) \, dt =$$

$$-r^2 \int \sin^2(t) \, dt = \frac{r^2}{2} (\cos(t) \sin(t) - t) =$$

$$\frac{r^2}{2} (\cos(\arccos(x/r)) \sin(\arccos(x/r)) - \arccos(x/r)) =$$

$$\frac{r^2}{2} \left(\frac{x}{r} \sqrt{1 - x^2/r^2} - \arccos(x/r) \right) = \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{r^2 \arccos(x/r)}{2}.$$

Dabei haben wir die für alle $y \in [-1, 1]$ gültige Formel

$$\sin^2(\arccos(y)) = 1 - \cos^2(\arccos(y)) = 1 - y^2$$

verwendet. Auswerten der Stammfunktion an der unteren Grenze $-r$ und oberen Grenze r liefert die Fläche $r^2\pi/2$ der oberen Kreishälfte.

Beispiel 7: Elimination von Sinus und Kosinus

Der Arkustangens ist eine Substitutionsfunktion mit Kultstatus. Er ist überall definiert, injektiv und besitzt eine rationale Ableitung. Aus $\cos(x)$ und $\sin(x)$ wird bei der Substitution $x = s(t) = \arctan(t)$:

$$(+)\quad \cos(\arctan(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin(\arctan(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

(Die erste Formel folgt aus $\cos(x) = (1 + \tan^2(x))^{-1/2}$ für $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, wenn man $x = \arctan(t)$ setzt; die zweite folgt mit $\sin(x) = \tan(x) \cos(x)$ aus der ersten.)

Um die beim Integrieren oft störenden Wurzelausdrücke in (+) zu eliminieren, betrachten wir die unscheinbare Variante

$$s(t) = 2 \arctan(t), \quad s'(t) = 2/(1+t^2), \quad t = \tan(x/2).$$

Im Zusammenspiel mit den Verdopplungsformeln

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t), \quad \sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

liefert (+):

$$(++) \quad \cos(2 \arctan(t)) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(2 \arctan(t)) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Damit gilt also:

Die Substitution $x = s(t) = 2 \arctan(t)$ verwandelt jeden Integranden, der aus $\sin(x)$ und $\cos(x)$ mit Hilfe der Grundrechenarten aufgebaut ist, in einen rationalen Integranden.

Manche Integrale lassen sich auf diese Weise einfach lösen. Ein Beispiel ist:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \cos(x)} dx &= \int \frac{s'(t)}{1 + \cos(s(t))} dt = \\ \int \frac{2}{(1+t^2)(1 + (1-t^2)/(1+t^2))} dt &= \int 1 dt = t = \tan(x/2). \end{aligned}$$

Die Elimination von Sinus und Kosinus ist jedoch kein Allheilmittel. Für das oben mit Hilfe von partieller Integration relativ leicht gefundene Integral über $\sin^2(x)$ liefert die Methode:

$$\int \sin^2(x) dx = \int \frac{8t^2}{(1+t^2)^3} dt = \frac{t(t^2-1)}{(1+t^2)^2} + \arctan(t),$$

wobei Partialbruchzerlegung, Tabellen oder der Computer zur Bestimmung der Stammfunktion eingesetzt werden. Einsetzen von $t = \tan(x/2)$ ergibt schließlich wie gewünscht $(x - \sin(x)\cos(x))/2$.

Beispiel 8: Stammfunktion des Sekans

Eine Stammfunktion von $1/\cos$ zu finden gelingt vielleicht am einfachsten mit den Hyperbelfunktionen und der Substitution

$$x = s(t) = \arctan(t), \quad s'(t) = 1/(1+t^2), \quad t = \tan(x)$$

wie in Beispiel 7. Die Umrechnung (+) liefert

$$\begin{aligned} \int \sec(x) dx &= \int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(\arctan(t)) (1+t^2)} dt = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \operatorname{arsinh}(t) = \operatorname{arsinh}(\tan(x)). \end{aligned}$$

Die Logarithmus-Darstellung $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ des Areasinus Hyperbolicus liefert die alternative Form

$$\operatorname{arsinh}(\tan(x)) = \log(\tan(x) + \sqrt{1+\tan^2(x)}) = \log(\tan(x) + \sec(x)).$$

Der Leser möge die Substitution noch einmal mit $x = s(t) = 2 \arctan(t)$ durchführen und (++) verwenden. Hier taucht der Areatangens Hyperbolicus auf und man erhält als Stammfunktion

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{artanh}(\tan(x/2)) &= \log(1 + \tan(x/2)) - \log(1 - \tan(x/2)) = \\ &= \log(\cos(x/2) + \sin(x/2)) - \log(\cos(x/2) - \sin(x/2)). \end{aligned}$$

Zur Integration der elementaren Funktionen

Wir sind nun in der Lage, viele symbolisch gegebene integrierbare Funktionen symbolisch zu integrieren. Dies ist aber nicht in allen Fällen möglich, und dass dem so ist, liegt nicht etwa an bislang noch unentdeckten Integrationsregeln. Liouville hat bereits im 19. Jahrhundert gezeigt, dass es keine elementare Stammfunktion von $\sin(x)/x$ gibt, wobei „elementar“ genauer „aus den rationalen Funktionen, den Wurzeln und den transzendenten Funktionen \exp , \log , \sin , \arcsin , \cos , \arccos , ... aufgebaut“ bedeutet. Gleiches gilt für $1/\log(x)$ und $\sin(x^2)$. Die Integration führt also aus der Menge der elementaren Funktionen heraus. Dieses Phänomen kennen wir bereits, wenn wir die rationalen Funktionen $1/x$ oder $1/(1+x^2)$ und $\log(x)$ bzw. $\arctan(x)$ betrachten. Eine Stammfunktion von f kann einen wesentlich höheren Komplexitätsgrad besitzen als f . Die elementaren Funktionen sind wie die rationalen Funktionen nicht reichhaltig genug, um alle ihre Stammfunktionen zu umschließen. Es ist aber algorithmisch entscheidbar, ob eine elementare Funktion f eine elementare Stammfunktion F besitzt, und F kann im positiven Fall auch algorithmisch gefunden werden. Der Computer kann also künstlerische Handfertigkeiten ersetzen. Eine „minimalistische Kunst des Integrierens“ bleibt aktuell, damit nicht bereits bei den einfachsten Integralen der große Bruder des Taschenrechners zu Hilfe gerufen wird. Und ein künstlerischer Einsatz der Integration wie im folgenden Zwischenabschnitt bleibt Menschensache.

Die Kreiszahl π ist irrational

Der erste Nachweis der Irrationalität von π gelang Johann Heinrich Lambert 1761 mit Hilfe von Kettenbrüchen. Im Jahr 1947 gab Ivan Niven den folgenden trickreichen Beweis mit Hilfe von Integration.

Satz (*Irrationalität der Kreiszahl π*)

π^2 ist irrational. Insbesondere ist π irrational.

Beweis

Annahme, π^2 ist rational. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\pi^2 = p/q$. Wir definieren $f_n, F_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ für alle n durch:

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \quad F_n(x) = q^n \sum_{k \leq n} (-1)^k \pi^{2(n-k)} f_n^{(2k)}(x).$$

Sei nun n beliebig. Für alle k gilt $f_n^{(k)}(0), f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$ und damit gilt auch $F_n(0), F_n(1) \in \mathbb{Z}$. Unter Verwendung von $f^{(k)} = 0$ für $k > 2n$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} F_n''(x) &= q^n \sum_{k \leq n-1} (-1)^k \pi^{2(n-k)} f_n^{(2(k+1))}(x) = \\ &= q^n \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \pi^{2(n-k+1)} f_n^{(2k)}(x) = \\ &= -q^n \pi^2 \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k \pi^{2(n-k)} f_n^{(2k)}(x) = -\pi^2 (F_n(x) - q^n \pi^{2n} f_n(x)). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} (F_n'(x) \sin(\pi x) - \pi F_n(x) \cos(\pi x))' &= (F_n''(x) + \pi^2 F_n(x)) \sin(\pi x) = \\ q^n \pi^{2n+2} f_n(x) \sin(\pi x) &= \pi^2 p^n f_n(x) \sin(\pi x). \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz ist also

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi p^n f_n(x) \sin(\pi x) dx &= \frac{1}{\pi} \left[F_n'(x) \sin(\pi x) - \pi F_n(x) \cos(\pi x) \right]_{x=0}^{x=1} = \\ -F_n(x) \cos(\pi x) \Big|_{x=0}^{x=1} &= F_n(0) + F_n(1) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Wegen $\sin(\pi x) \in [0, 1]$ und $f_n(x) \in [0, 1/n!]$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt aber

$$0 < \int_0^1 \pi p^n f_n(x) \sin(\pi x) dx < \frac{\pi p^n}{n!}.$$

Ist n hinreichend groß, so besitzt das Integral also einen Wert in $]0, 1[$, im

— *Widerspruch* zu $F_n(0) + F_n(1) \in \mathbb{Z}$.

Die Taylor-Formel mit integralem Restglied

In der Differentialrechnung hatten wir das Restglied im Satz von Taylor in der Lagrange-Form angegeben, in der gewisse nicht weiter spezifizierte Zwischenstellen auftauchten. Das Ergebnis lautete: Bei hinreichend guter Differenzierbarkeit von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = T_p^n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-p)^{n+1},$$

mit einem von x abhängigen Punkt ξ zwischen x und dem Entwicklungspunkt p und dem Taylor-Polynom $T_p^n f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n -ter Ordnung mit

$$T_p^n f(x) = \sum_{k \leq n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Lagrangesche Form hatte Anwendungen, aber sie bleibt durch die Darstellung des Restglieds unbefriedigend. Der Hauptsatz ermöglicht nun einen einfachen Beweis einer Formel, in der das Restglied durch ein Integral exakt erfasst wird. Dieser Beweis zählt zu den Juwelen der Analysis. Der Hauptsatz erscheint als der Spezialfall der Ordnung Null und die Taylor-Polynome werden durch partielle Integration induktiv aufgebaut, also durch den Beweis gefunden.

Satz (*Satz von Taylor, Integralform des Restglieds*)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar, und sei $p \in I$.

Dann gilt für alle $x \in I$:

$$f(x) = T_p^n f(x) + \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Das Lagrange-Restglied lässt sich aus dem integralen Restglied durch eine Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung gewinnen, sodass sich unsere alte Form aus der neuen rekonstruieren lässt.

Beweis

Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n .

Induktionsanfang $n = 0$:

Zu zeigen ist, dass für alle $x \in I$ gilt:

$$f(x) = f(p) + \frac{1}{0!} \int_p^x (x-t)^0 f^{(1)}(t) dt = f(p) + \int_p^x f'(t) dt.$$

Da f' stetig ist, folgt dies unmittelbar aus dem Hauptsatz.

Induktionsschritt von $n - 1$ nach n für $n \geq 1$:

Für $x \in I$ gilt nach Induktionsvoraussetzung und partieller Integration:

$$f(x) = T_p^{n-1} f(x) + \frac{1}{(n-1)!} \int_p^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt =$$

$$T_p^{n-1} f(x) - \int_p^x \left(\frac{(x-t)^n}{n!} \right)' f^{(n)}(t) dt =$$

$$T_p^{n-1} f(x) - \left[\frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!} \right]_{t=p}^{t=x} + \int_p^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt =$$

$$T_p^{n-1} f(x) + \frac{f^{(n)}(p)(x-p)^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt =$$

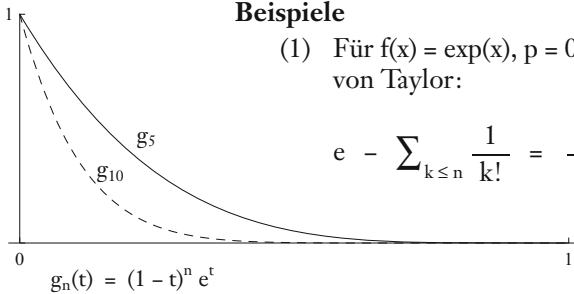
$$T_p^n f(x) + \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

—

Beispiele

- (1) Für $f(x) = \exp(x)$, $p = 0$ und $x = 1$ liefert der Satz von Taylor:

$$e - \sum_{k \leq n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

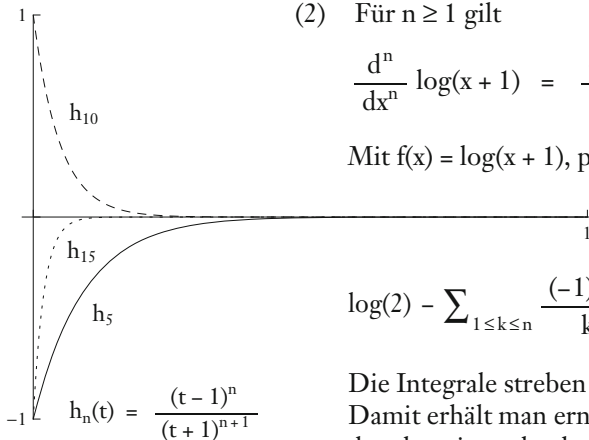


- (2) Für $n \geq 1$ gilt

$$\frac{d^n}{dx^n} \log(x+1) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Mit $f(x) = \log(x+1)$, $p = 0$, $x = 1$ erhalten wir

$$\log(2) - \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{(t-1)^n}{(t+1)^{n+1}} dt.$$



Die Integrale streben gegen 0 für $n \rightarrow \infty$.
Damit erhält man erneut den Grenzwert $\log(2)$ der alternierenden harmonischen Reihe.

Der Vertauschungssatz für Ableitungen

Wir hatten mit Methoden der Differentialrechnung bewiesen, dass wir konvergente Funktionenreihen unter bestimmten Bedingungen gliedweise differenzieren dürfen. Mit Hilfe des in Kapitel 1.3 bewiesenen Vertauschungssatzes für die Integration und des Hauptsatzes können wir nun zeigen:

Satz (*Vertauschungssatz für Ableitungen*)

Seien $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, die punktweise gegen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren. Die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen konvergiere gleichmäßig. Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$f' = \lim_n f'_n.$$

Beweis

Sei $g = \lim_n f'_n$. Dann ist g als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen stetig. Also existiert die Integralfunktion $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ von g zu einem beliebigen fest gewählten Startwert $s \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned} (+) \quad G(x) &= \int_s^x g = \int_s^x \lim_n f'_n = \lim_n \int_s^x f'_n = \\ &\lim_n (f_n(x) - f_n(s)) = f(x) - f(s). \end{aligned}$$

Beim dritten Gleichheitszeichen haben wir den Vertauschungssatz für die Integration verwendet und beim vorletzten den Hauptsatz I. Da G stetig differenzierbar ist, ist nach (+) auch $f - f(s)$ und damit f stetig differenzierbar. Nach dem Hauptsatz II ist G eine Stammfunktion von g . Also gilt

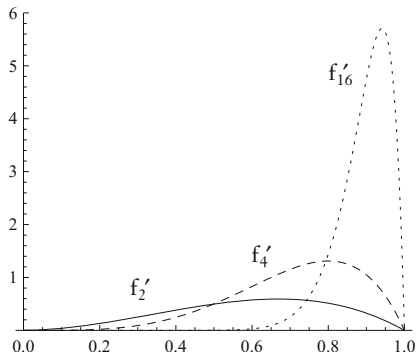
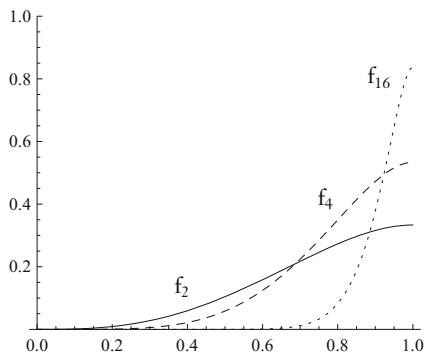
$$\text{—} \quad \lim_n f'_n(x) = g(x) = G'(x) = (f(x) - f(s))' = f'(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Aus dem Satz lässt sich, wie wir in den Übungen sehen werden, auch unser früheres Ergebnis über das gliedweise Differenzieren von Potenzreihen herleiten (vgl. Kapitel 4.6 in Band 1).

Liegt lediglich punktweise Konvergenz der Ableitungen vor, so kann die Vertauschbarkeit von Limesbildung und Differentiation verletzt sein, selbst bei stetiger Grenzfunktion der Ableitungen. Ein Gegenbeispiel liefern die Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = n^2 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Die folgenden Diagramme visualisieren einige Funktionen f_n der Folge und ihre Ableitungen f'_n .



Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert trotz der auftretenden Ausschläge punktweise gegen die Nullfunktion. Dagegen konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die im Punkt 1 unstetige und damit nicht differenzierbare Indikatorfunktion $1_{\{1\}}$ auf $[0, 1]$.

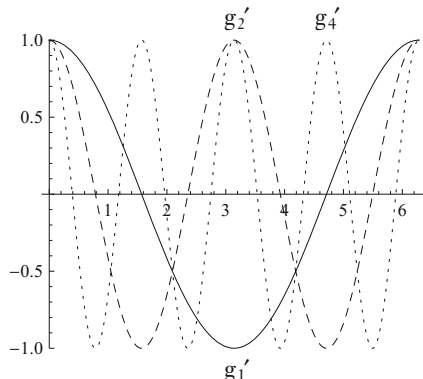
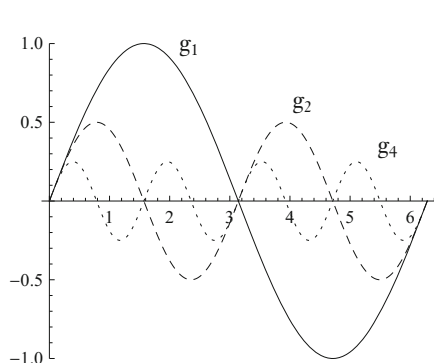
Weiter halten wir fest, dass aus der gleichmäßigen Konvergenz von stetig differenzierbaren Funktionen im Allgemeinen nicht einmal die punktweise und damit sicher nicht die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen gefolgt werden kann. Ein Gegenbeispiel liefern die Funktionen $g_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \quad \text{für alle } x \in [0, 2\pi] \text{ und } n \geq 1.$$

Es gilt $\lim_{n \geq 1} g_n = 0$ (gleichmäßig), aber

$$g'_n(x) = \cos(nx) \quad \text{für alle } x \in [0, 2\pi] \text{ und } n \geq 1,$$

sodass $(g'_n)_{n \geq 1}$ nicht punktweise konvergiert. Es genügt also nicht, die Funktionsfolge auf gleichmäßige Konvergenz zu überprüfen, wenn man den Satz anwenden möchte; man muss im Allgemeinen die Ableitungen betrachten.



Ausblick: Die Kreisberechnung bei Archimedes

Obige Bestimmung der Fläche eines Kreises erforderte ein vergleichsweise hohes Maß an Hilfsmitteln. Neben dem Hauptsatz und der Substitutionsregel haben wir vor allem auch die trigonometrischen Funktionen eingesetzt. Wir besprechen nun noch eine „sinusfreie“ Methode, mit der Archimedes die Kreisfläche berechnet hat. Dabei wird ein Kreis durch regelmäßige einbeschriebene und umschriebene n -Ecke approximiert, deren Flächen sich elementargeometrisch bestimmen lassen. Nützlich hierzu sind die drei klassischen Mittelwerte zweier positiver Größen:

Definition (*arithmetisches, geometrisches, harmonisches Mittel*)

Für alle reellen Zahlen $a, b > 0$ sei

$$A(a, b) = \frac{a + b}{2}, \quad (\text{arithmetisches Mittel})$$

$$G(a, b) = \sqrt{ab}, \quad (\text{geometrisches Mittel})$$

$$H(a, b) = \frac{2}{1/a + 1/b} = \frac{2ab}{a + b}. \quad (\text{harmonisches Mittel})$$

Die Mittel wachsen monoton in beiden Argumenten a und b und liegen stets im durch a und b definierten Intervall. Für $a = b$ sind alle Mittel gleich a und für $a < b$ gilt

$$A(a, b) - G(a, b) = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{2} > 0,$$

$$G(a, b) - H(a, b) = \sqrt{ab} \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{a + b} > 0,$$

sodass $A(a, b) > G(a, b) > H(a, b)$. (Merkregel: AGH wie im Alphabet.) Es gilt zum Beispiel

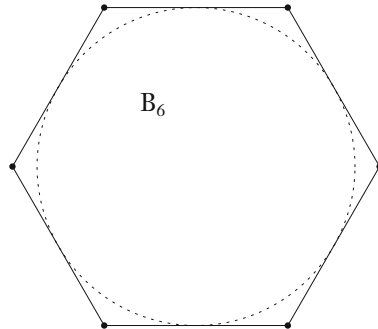
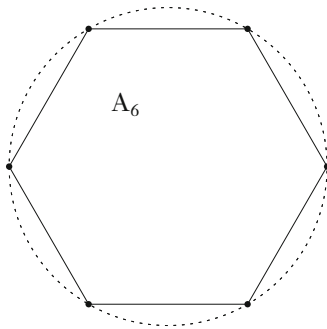
$$A(1, 9) = 5, \quad G(1, 9) = 3, \quad H(1, 9) = 9/5 = 1,8.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Kreisberechnung durchführen. Sei also K ein Kreis mit Radius r . Für alle $n \geq 3$ sei

A_n = „der Flächeninhalt eines in K einbeschriebenen regelmäßigen n -Ecks“,

B_n = „der Flächeninhalt eines K umschließenden regelmäßigen n -Ecks“.

Die folgenden Diagramme zeigen A_6 und B_6 .



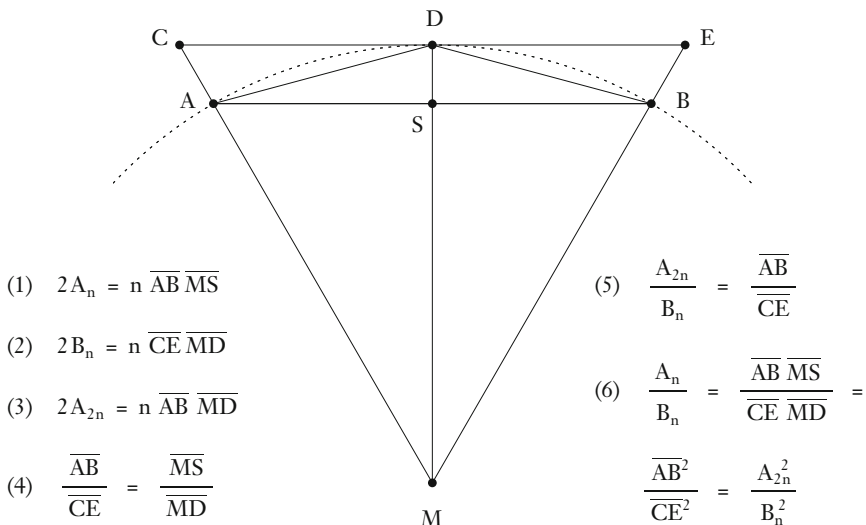
Die Zerlegung in 6 gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge bzw. Höhe r zeigt:

$$(+)\quad A_6 = r^2 \frac{3}{2} \sqrt{3}, \quad B_6 = r^2 2 \sqrt{3}.$$

Entscheidend sind nun die folgenden Rekursionsformeln für die Verdopplung der Eckenzahl:

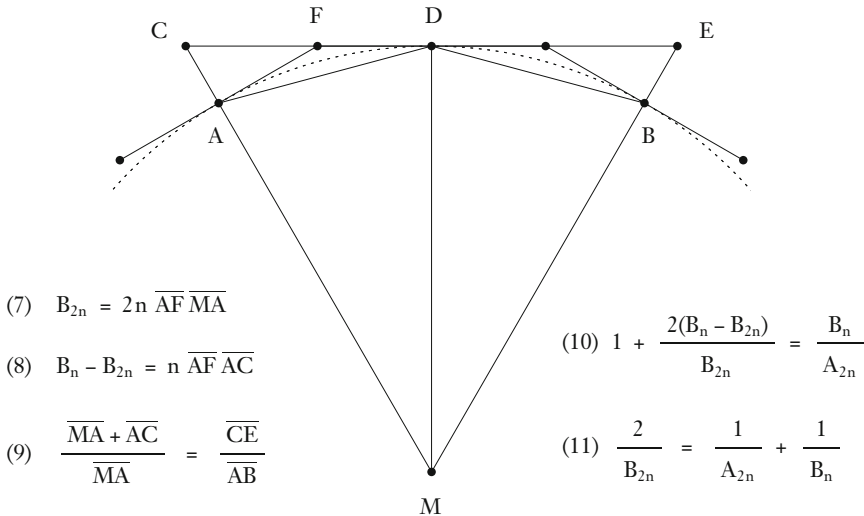
$$(++)\quad A_{2n} = G(A_n, B_n), \quad B_{2n} = H(A_{2n}, B_n).$$

Die erste Formel ergibt sich aus folgendem Diagramm:



Dabei haben wir die Dreiecksflächenformel „halbe Grundfläche mal Höhe“ für (1) und (2), die Formel $\overline{AB} \cdot \overline{MD}/2$ für die Fläche des Drachenvierecks $MADB$ für (3) und den Strahlensatz für (4) verwendet. Aus (1) – (4) folgen (5) und (6). Die Multiplikation von (6) mit B_n^2 liefert die erste Rekursionsformel.

Für die zweite Rekursionsformel betrachten wir:



Für (8) verwenden wir, dass $B_n - B_{2n}$ in $2n$ zu ACF kongruente Dreiecke zerfällt. Der Strahlensatz liefert (9). Die linke Seite in (10) folgt aus (7) – (9) und die rechte aus (5). Umformung von (10) liefert (11) und damit die Behauptung.

Ausgehend von (+) lassen sich mit Hilfe der Rekursionsformeln (++)

$$A_6, B_6, A_{12}, B_{12}, A_{24}, B_{24}, \dots, A_{6 \cdot 2^n}, B_{6 \cdot 2^n}, \dots$$

berechnen. Für den Radius $r = 1$ ergibt sich zum Beispiel

$$A_{48} = 3,1326286132\dots, B_{48} = 3,1460862151\dots$$

$$A_{6 \cdot 2^{10}} = 3,1415921059\dots, B_{6 \cdot 2^{10}} = 3,1415929273\dots$$

Für $r = 1$ definieren wir

$$\pi = \sup_n A_{6 \cdot 2^n} \quad (= 3,1415926535\dots)$$

Es gilt $\pi = \inf_n B_{6 \cdot 2^n}$ (Beweis als Übung). Für beliebige Radien r erhalten wir $r^2 \pi$ als Grenzwert der Approximation, da der Faktor r^2 in (+) durch die Rekursionsformeln weitervererbt wird.

Die Methode des Archimedes zur Berechnung der Kreisfläche liefert also die Formel $r^2 \pi$ mit einer Konstanten π , die als Grenzwert einer rekursiv definierten Folge definiert ist. Die Folge eignet sich auch zur numerischen Berechnung von π . Im Gegensatz zum Faktor $4/3$ bei der Quadratur der Parabel haben wir keinen einfachen Wert für π gefunden. Es gibt auch gar keinen: π ist nicht nur, wie wir oben gesehen haben, irrational, sondern, wie Ferdinand von Lindemann 1882 bewies, sogar transzendent und damit ist die Konstruktion von π mit Zirkel und Lineal unmöglich.

Kreisfläche und Kreisumfang

Ebenfalls dem Archimedes zugeschrieben wird eine anschauliche geometrische Argumentation, die den Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Umfang eines Kreises aufzeigt. Wir teilen hierzu einen Kreis K mit Radius r in $2n$ gleich große Sektoren S_1, \dots, S_{2n} (Kuchenstücke) und ordnen diese Sektoren wie in den Diagrammen rechts an.

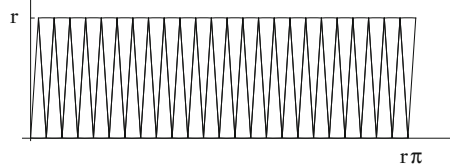
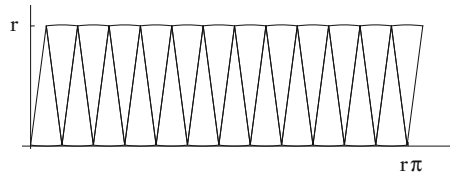
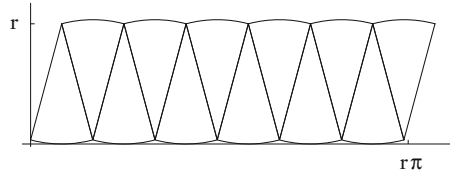
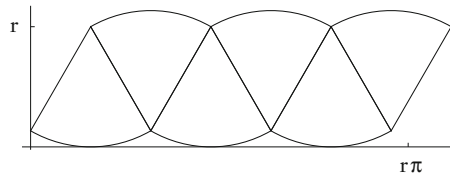
Die Figuren besitzen den Flächeninhalt $A = r^2 \pi$ und den Umfang $U + 2r$, wobei U der Umfang von K ist. Strebt n gegen unendlich, so nähern sich die Figuren einem Rechteck der Breite $U/2$ und Höhe r an. Damit ist

$$\frac{U}{2} r = A = r^2 \pi,$$

woraus sich

$$U = 2 r \pi$$

ergibt. Umgekehrt kann man so die Flächenformel $r^2 \pi$ erhalten, wenn man den Umfang $U = 2 r \pi$ bereits kennt.



6. Uneigentliche Integrale

Wir erweitern das Integral auf halboffene und offene Definitionsbereiche, die auch unbeschränkt sein können. Wir beweisen das Integralvergleichskriterium, das eine neue Methode zur Untersuchung der Konvergenz von unendlichen Reihen zur Verfügung stellt. Weiter besprechen wir die Euler-Mascheroni-Konstante, die sich als uneigentliches Integral definieren lässt. In einem Ausblick gehen wir auf die Gaußsche Glockenkurve und die Eulersche Gammafunktion näher ein.

Das uneigentliche Riemann-Integral

Wir erweitern die Definition des Integrals durch Grenzübergänge:

Definition (*uneigentliche Riemann-Integrale*)

Sei $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion mit $-\infty < a \leq b \leq \infty$. Dann setzen wir im Fall der Existenz:

$$I(f) = \int_a^b f = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f \in [-\infty, \infty].$$

Wir nennen dann die Funktion f *uneigentlich (Riemann-) integrierbar* und $I(f)$ das *uneigentliche (Riemann-) Integral* von f .

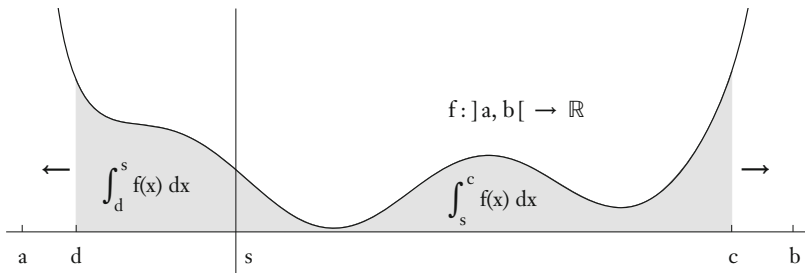
Analog wird das uneigentliche Riemann-Integral für eine lokal integrierbare Funktion $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a \leq b < \infty$ erklärt.

Schließlich definieren wir das uneigentliche Riemann-Integral für eine lokal integrierbare Funktion $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ im Fall der Existenz durch

$$I(f) = \int_a^b f = \int_a^s f + \int_s^b f \in [-\infty, \infty],$$

für ein beliebiges $s \in]a, b[$. Wir setzen hierbei voraus, dass die rechte Seite keine undefinierte Summe der Form $-\infty + \infty$ oder $\infty - \infty$ ist.

Dass die letzte Definition unabhängig von der verwendeten Zwischenstelle s ist, folgt aus der Aufspaltungseigenschaft.



Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ wird für $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ durch zwei unabhängige Grenzübergänge erklärt. Die Zwischenstelle s ist beliebig.

Die meisten der elementaren Eigenschaften des Integrals bleiben auch für die uneigentlichen Integrale erhalten, so etwa die Linearität, die Monotonie und die Aufspaltungseigenschaft. Dagegen lässt sich ein uneigentliches Integral im Allgemeinen nicht mehr als „Fläche des Positivteils minus Fläche des Negativteils“ auffassen. Entsprechende Beispiele werden wir in den Übungen diskutieren.

Auch der Jordan-Inhalt lässt sich für gewisse unbeschränkte Teilmengen P der Ebene definieren. Wir setzen hierzu im Fall der Existenz:

$$J(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(P \cap [-n, n]^2) \in [0, \infty].$$

Durch diese Erweiterung entspricht der Jordan-Inhalt nicht mehr vollkommen dem Riemann-Integral. Die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

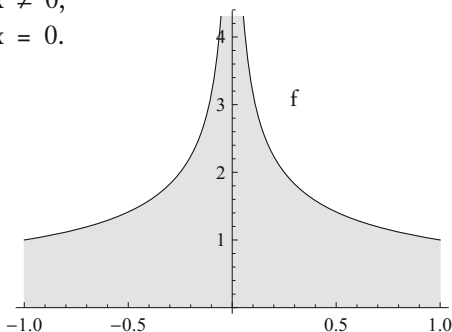
schließt zum Beispiel mit der x -Achse ein Jordan-messbares unbeschränktes P mit

$$J(P) = 2 \int_0^1 x^{-1/2} dx = 4$$

ein. Die Funktionen $f|_{]0, 1]}$

und $f|_{[-1, 0[}$ sind uneigentlich integrierbar, nicht aber f ,

da jede uneigentlich integrierbare Funktion per Definition auf jedem kompakten Intervall integrierbar und damit dort beschränkt ist. Eine nochmalige Erweiterung der Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals ist möglich. Wir verzichten hier auf eine Durchführung, erwähnen aber, dass Riemann in seiner Originalarbeit, in der er das heute nach ihm benannte Integral diskutiert hat, derartige Fälle zulässt und also die Funktion f integrieren würde.



Das Integralvergleichskriterium

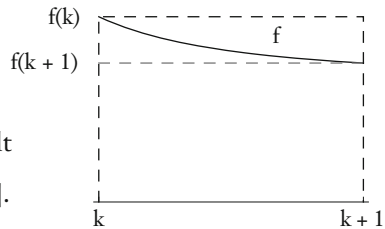
Als Anwendung der uneigentlichen Integration beweisen wir ein neues Kriterium zum Nachweis der Konvergenz oder Divergenz von Reihen.

Satz (*Integralvergleichskriterium*)

Sei $f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton fallend. Dann sind äquivalent:

(a) $\sum_n f(n)$ konvergiert.

(b) $I(f) < \infty$.



Beweis

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Da f monoton fällt, gilt

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) \text{ für alle } x \in [k, k+1].$$

Nach Monotonie des Integrals ist also

$$f(k) = f(k) \cdot 1 \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1) \cdot 1 = f(k+1).$$

Summation und die Aufspaltungseigenschaft ergeben, dass für alle n gilt:

$$\sum_{k \leq n} f(k) \geq \int_0^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{1 \leq k \leq n+1} f(k).$$

– Die erste Ungleichung zeigt „(a) impliziert (b)“, die zweite „(b) impliziert (a)“.

Ein entsprechender Satz gilt natürlich auch für monoton fallende Funktionen $f: [k, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ und Reihen $\sum_{n \geq k} f(n)$ für einen Startwert $k > 0$.

Beispiele

(1) Für $f: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ mit $f(x) = 1/x$ für alle $x \geq 1$ gilt

$$I(f) = \lim_{b \rightarrow \infty} \log(x) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \log(b) = \infty.$$

Nach dem Vergleichskriterium gilt also

$$\sum_{n \geq 1} f(n) = \sum_{n \geq 1} 1/n = \infty.$$

(2) Ist $s > 1$ und $f: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ mit $f(x) = 1/x^s$ für alle $x \geq 1$, so gilt

$$I(f) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-s}}{1-s} \Big|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-s} - 1}{1-s} < \infty,$$

da $1-s < 0$. Also gilt $\sum_{n \geq 1} 1/n^s < \infty$.

Die Euler-Mascheroni-Konstante

Bei der Diskussion der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n \geq 1} 1/n$ hatten wir erwähnt, dass die Partialsummen

$$s_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k}$$

dieser Reihe wie der natürliche Logarithmus \log wachsen, und dass stärker

$$\gamma = \lim_n (s_n - \log(n)) \quad (\text{Euler-Mascheroni-Konstante})$$

existiert (vgl. Kapitel 2.3 in Band 1). Dies wollen wir nun mit Hilfe von Integration beweisen. Das wesentliche Element der Argumentation ist die Formel

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \log(b).$$

Wir zeigen mit Hilfe dieser Formel und einer die Logarithmus-Reihe bemühen-den Abschätzung, dass $\lim_n (s_n - \log(n))$ existiert. Danach diskutieren wir einen äquivalenten Zugang, der uneigentliche Integrale verwendet.

Satz (*Existenz der Euler-Mascheroni-Konstante*)

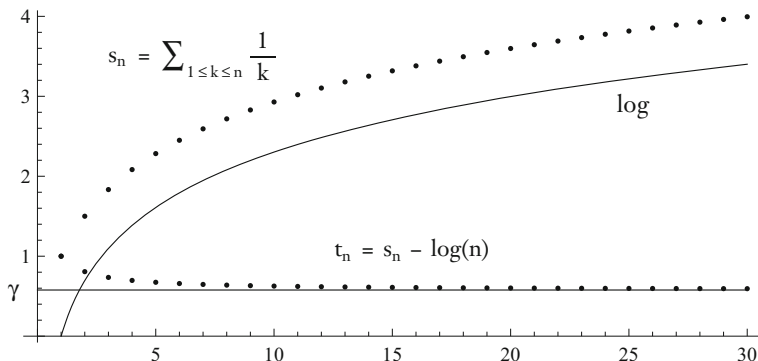
Für alle $n \geq 1$ seien

$$s_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k}, \quad t_n = s_n - \log(n).$$

Dann gilt

- (a) $t_n > 0$ für alle $n \geq 1$,
- (b) $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

Insbesondere existiert $\gamma = \inf_n t = \lim_n t_n$.



Beweis

zu (a): Sei $f: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ die Funktion mit $f(x) = 1/x$ für alle $x \geq 1$. Weiter sei $n \geq 1$ und p die Partition von $[1, n]$ der Länge $n - 1$ mit den Zerlegungspunkten $1, 2, \dots, n - 1$. Dann gilt

$$s_{n-1} = \sum_{1 \leq k < n} \frac{1}{k} = S_p f \geq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log(n).$$

Damit ist $s_n > s_{n-1} \geq \log(n)$ und folglich $t_n > 0$.

zu (b): Sei $n \geq 1$. Dann gilt unter Verwendung der Logarithmus-Reihe:

$$t_n - t_{n+1} = s_n - \log(n) - s_{n+1} + \log(n+1) =$$

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} =$$

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1/n^k}{k} - \frac{1}{n+1} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n+1} + \sum_{k \geq 3} \frac{1}{kn^k} =$$

$$\frac{n-1}{2n^2(n+1)} + \sum_{k \geq 3} \frac{1}{kn^k} > 0,$$

– denn der erste Summand ist nichtnegativ und die Summe rechts ist positiv nach dem Leibniz-Kriterium.

Wir zeigen nun, dass die Euler-Mascheroni-Konstante der Inhalt einer anschaulichen unbeschränkten Fläche ist. Ist $g: [1, \infty] \rightarrow [0, \infty[$ die Stufenfunktion $1/\text{floor}$ auf $[1, \infty[$, d.h.

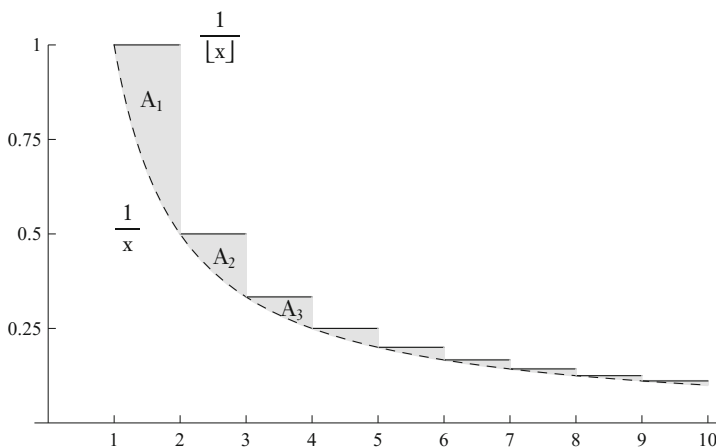
$$g(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{k} \quad \text{für alle } x \in [k, k+1[\text{ und } k \geq 1,$$

so gilt $g(x) \geq 1/x$ für alle $x \geq 1$ und

$$\begin{aligned} \lim_{n \geq 1} \int_1^n \frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} dx &= \lim_{n \geq 1} (s_{n-1} - \log(n)) = \\ &= \lim_{n \geq 1} \left(t_n - \frac{1}{n} \right) = \gamma. \end{aligned}$$

Da der Integrand nichtnegativ ist, wächst das Integral monoton in n und damit konvergiert die Folge $(t_n - 1/n)_{n \geq 1}$ monoton steigend gegen γ .

Die Überlegung zeigt, dass γ der Inhalt der im folgenden Diagramm grau dargestellten Fläche ist.



Dass der Inhalt $A_1 + A_2 + A_3 + \dots$ dieser Fläche endlich ist, kann man auch unabhängig von obigen Überlegungen ohne Verwendung der Logarithmusreihe einsehen. Es gilt

$$A_n \leq (g(n) - g(n+1)) \cdot 1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{für alle } n \geq 1$$

und damit

$$\sum_{n \geq 1} A_n \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Man kann also alternativ γ von vorneherein als die unendliche Summe der Einzelflächen A_n definieren, d. h., als das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} dx = \sum_{n \geq 1} A_n.$$

Dass $\gamma = \lim_{n \geq 1} t_n = \lim_{n \geq 1} s_n - \log(n)$ gilt, gewinnt man dann aus

$$\gamma = \lim_{n \geq 1} (t_n - 1/n) = \lim_{n \geq 1} t_n.$$

Die ersten Nachkommastellen von γ lauten:

$$\gamma = 0,5772156649015328606065120900824024310421593359399235988\dots$$

Es ist nicht bekannt, ob γ irrational ist. Die Konstante γ spielt in der analytischen Zahlentheorie eine wichtige Rolle, im Vergleich zu π , e und dem Goldenen Schnitt hält sie sich dagegen in geometrischen Figuren und der mathematischen Naturbeschreibung vornehm zurück.

Die Gaußsche Glockenkurve

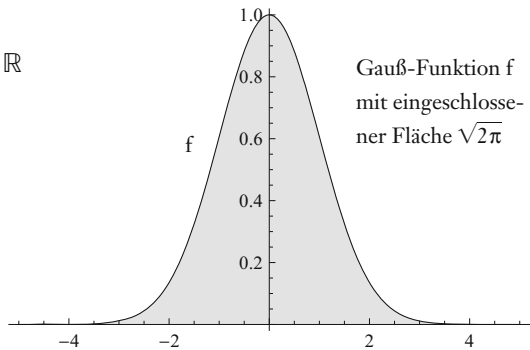
Zu den wichtigsten uneigentlichen Integralen gehört das Integral über die Gauß-Funktion oder Gaußsche Glockenkurve. Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine zentrale Rolle.

Definition (*Gauß-Funktion*)

Die *Gauß-Funktion* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) = e^{-x^2/2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

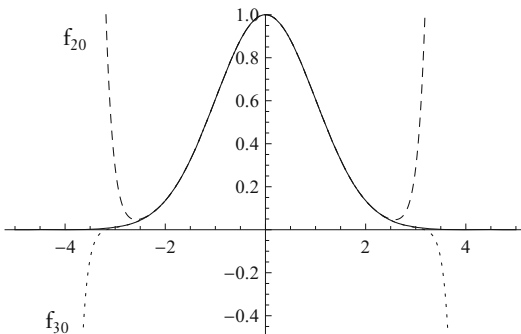
Dass das uneigentliche Integral über die Glockenkurve, auch *Fehlerintegral* genannt, existiert, lässt sich aufgrund des starken Abfalls der Funktion leicht einsehen. Dagegen ist die Berechnung weitaus schwieriger. Es gilt:



Satz (*Gauß-Integral oder Euler-Poisson-Integral*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Wir geben im Ausblick zu diesem Kapitel einen vergleichsweise elementaren Beweis dieses Satzes. Weiter führen wir dort die Eulersche Gammafunktion ein und zeigen, dass das Gauß-Integral bei einer systematischen Untersuchung dieser Funktion mit abfällt. Eine überraschend einfache, auf Siméon Poisson zurückgehende Berechnung des Fehlerintegrals ist unter Verwendung der mehrdimensionalen Integrationstheorie möglich. Wir werden den Beweis von Poisson in Abschnitt 6 kennenlernen.



Die Taylor-Polynome

$$T_0^n f(x) = \sum_{k \leq n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k k!}$$

erlauben eine numerische Berechnung des Fehlerintegrals.

Es gilt zum Beispiel

$$\int_{-3}^3 f_{30}(x) dx = 2,4996\dots,$$

$$\sqrt{2\pi} = 2,5066\dots$$

Die Zissoide des Diokles

Wir betrachten einen Halbkreis

$$g : [0, 2r] \rightarrow [0, \infty[$$

mit Radius r und Mittelpunkt $(r, 0)$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{r^2 - (x-r)^2} \\ &= \sqrt{x(2r-x)}. \end{aligned}$$

Die *Zissoide* (*Kissoide*)

$$f : [0, 2r[\rightarrow [0, \infty[$$

bzgl. g ist nun wie folgt definiert. Ist $x \in [0, 2r[$, so sei h die Gerade durch 0 und $A = (t, g(t))$, wobei

$$t = 2r - x.$$

Wir setzen nun

$$f(x) = h(x).$$

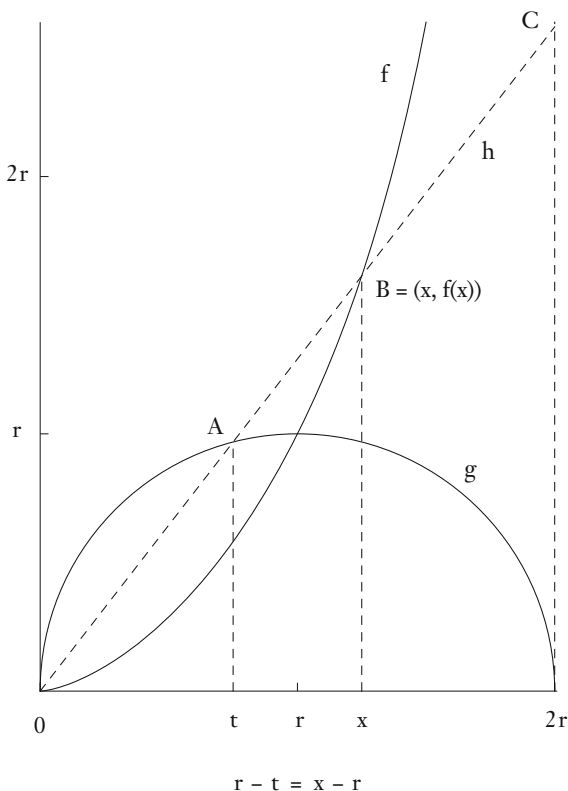
Die Gerade h besitzt die Steigung $g(t)/t = g(x)/t$. Damit ist

$$f(x) = h(x) = \frac{g(x)}{2r-x} x = \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} \quad \text{für alle } x \in [0, 2r[.$$

Aus dem Strahlensatz ergibt sich folgende Proportionseigenschaft:

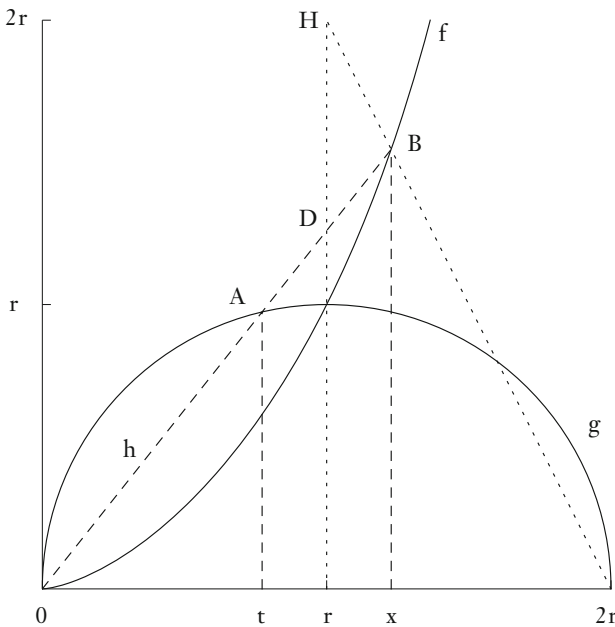
$$(+)\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{OB}} = \frac{2r-t}{x} = 1.$$

Diese Eigenschaft lässt sich auch zur Definition der Zissoide verwenden: Ist ein Punkt A auf dem Halbkreis gegeben, so ist der Punkt B auf der Geraden durch 0 und A so zu wählen, dass (+) gilt. Durchläuft A alle Punkte des Halbkreises, so durchläuft B alle Punkte der Zissoide. Führt man die Konstruktion für den ganzen Kreis durch, so erhält man die Graphen von f und $-f$ als Bild. Diese Figur erinnert (recht vage) an die Spitze eines Efeu-Blattes, was die Namensgebung motiviert (griech. *kissos* = Efeu).



Die Zissoide löst das Delische Problem

Ist ein Würfel der Kantenlänge r gegeben, so hat ein Würfel mit dem doppelten Volumen die Kantenlänge $a = \sqrt[3]{2} r$. Man weiß heute, dass sich die Größe a aus r nicht mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren lässt (Unlösbarkeit des Delischen Problems der Würfelverdopplung). Lässt man jedoch die Zissoide als Hilfsmittel zu, so ist dies, wie Diokles entdeckt hat, möglich. Wir verbinden hierzu den Punkt $H = (r, 2r)$ mit $(2r, 0)$ und erhalten so den Punkt $B = (x, f(x))$ auf der Zissoide. Die Gerade h durch 0 und B definiert nun die Punkte $A = (t, g(t))$ und $D = (r, (g(t) + f(x))/2)$. D ist, wie wir sehen werden, der „Delische Punkt“.



Die Gerade von $H = (r, 2r)$ nach $(2r, 0)$ hat die Steigung -2 und damit ist

$$f(x) = 2r - 2(x - r) = 2(2r - x) = 2t.$$

Nach Definition von f gilt also $4t^2 = f(x)^2 = x^3/t$, sodass

$$4t^3 = x^3.$$

Damit hat h die Steigung $f(x)/x = 2t/x = \sqrt[3]{2}$. Die mit Hilfe der Zissoide konstruierbare Strecke von 0 nach D besitzt also die gewünschte Länge $a = \sqrt[3]{2} r$. Startet man mit $H = (r, cr)$, so erhält man analog $\sqrt[3]{c} r$.

Die Zissoide ist (im Gegensatz etwa zur dritten Wurzel) konstruktiv in dem Sinne, dass zu jeder gegebenen Stelle p der Punkt $(p, f(p))$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Die Stelle x der Lösung des Delischen Problems ist allerdings nicht konstruierbar (es gilt $t = 2r/(1 + d)$, $x = 2rd/(1 + d)$ mit $d = \sqrt[3]{4}$).

Die Fläche unter der Zissoide

Die Zissoide ist von vielen Mathematikern untersucht worden. Pierre de Fermat untersuchte ihre Tangenten, Christiaan Huygens und John Wallis bestimmten den Inhalt der durch sie definierten unbeschränkten Fläche und Isaac Newton gab eine alternative Konstruktionsmethode an. Wir beweisen hier noch das Ergebnis von Huygens und Wallis.

Satz (Integral der Zissoide)

Für das uneigentliche Integral der Zissoide $f : [0, 2r[\rightarrow [0, \infty[$ gilt

$$\int_0^{2r} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow 2r} \int_0^b \left(\frac{x^3}{2r - x} \right)^{1/2} dx = \frac{3}{2} r^2 \pi.$$

Die Zissoide hat also die dreifache Fläche des ihr zugeordneten Halbkreises.

Beweis

Mit den Substitutionen

$$x = s(t) = t^2, \quad t = s(u) = \sqrt{2r} \sin(u)$$

und $\arcsin(1) = \pi/2$ erhalten wir

$$\lim_{b \rightarrow 2r} \int_0^b \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2r - x}} dx =$$

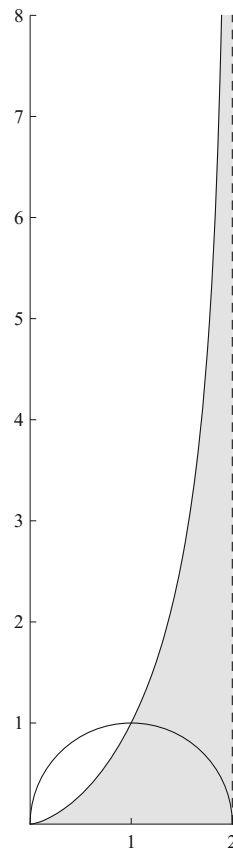
$$2 \lim_{b \rightarrow 2r} \int_0^{\sqrt{b}} \frac{t^4}{\sqrt{2r - t^2}} dt =$$

$$8r^2 \lim_{b \rightarrow 2r} \int_0^{\arcsin(\sqrt{b}/\sqrt{2r})} \sin^4(u) du =$$

$$8r^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4(u) du =$$

$$8r^2 \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du =$$

$$6r^2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 du = \frac{3}{2} r^2 \pi,$$



wobei wir die Rekursionsformel für die bestimmten Integrale über $\sin^n(x)$ von 0 bis $\pi/2$ verwendet haben (vgl. die Übungen in 1.5).

Ausblick: Gauß-Integral und Gamma-Funktion

Wir zeigen so elementar wie möglich:

Satz (*Gauß-Integral oder Euler-Poisson-Integral*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

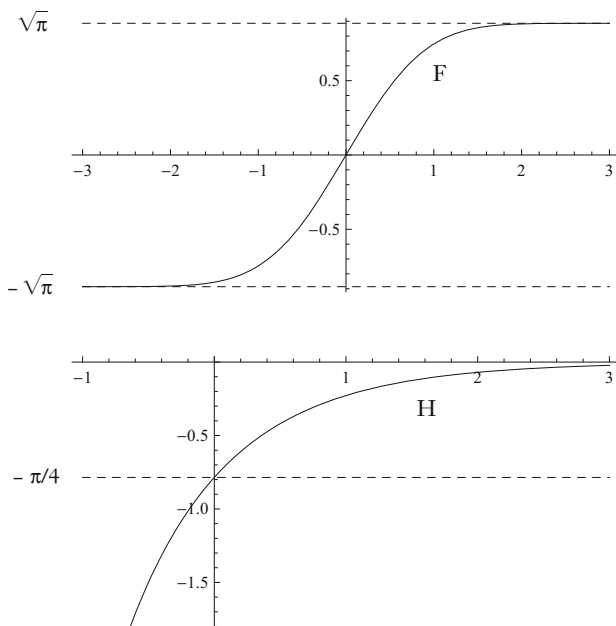
Der folgende trickreiche Beweis folgt einer Darstellung von Robert Weinstock aus dem Jahr 1990.

Beweis

Es genügt, das erste Integral zu berechnen (das zweite ergibt sich durch Skalierung von $x^2/2 = (x/\sqrt{2})^2$ (vgl. 1.5).) Wir definieren $F, H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad H(x) = - \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die sog. *Fehlerfunktion* F ist bis auf einen Faktor $1/2$ die Integralfunktion der Gauß-Funktion zum Startwert $s = 0$. Die Funktion H ist eine Hilfsfunktion. Der Wert $H(0)$ kann durch den Arkustangens bestimmt werden, wodurch π ins Spiel kommen wird. Weiter ist $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 0$.



Die Funktion H ist differenzierbar und die Ableitung von H ergibt sich durch Ableiten des Integranden in der Definition von H nach x (wir gehen unten hierauf gleich noch ein). Damit gilt:

$$H'(x) = \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} F(\sqrt{x}).$$

Folglich gilt für alle $b > 0$ nach dem Hauptsatz I und II:

$$\begin{aligned} H(b) - H(0) &= \int_0^b H'(x) dx = \int_0^b \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} F(\sqrt{x}) dx = \\ &= \int_0^{\sqrt{b}} 2 e^{-t^2} F(t) dt = \int_0^{\sqrt{b}} 2 F'(t) F(t) dt = \\ &= \int_0^{\sqrt{b}} F(t)^2 dt = F(\sqrt{b})^2 - F(0)^2 = F(\sqrt{b})^2. \end{aligned}$$

Wegen

$$H(0) = - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = - \arctan \Big|_0^1 = - \frac{\pi}{4}$$

gilt also

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F(\sqrt{b})^2 = \frac{\pi}{4} + \lim_{b \rightarrow \infty} H(b) = \frac{\pi}{4},$$

sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{b}} e^{-x^2} dx = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} F(\sqrt{b}) = \sqrt{\pi}.$$

Im Beweis haben wir H „unter dem Integral“ differenziert. Um diese Vertauschung von Limesbildung und Integration zu rechtfertigen, betrachten wir ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und eine Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt

$$\lim_n \frac{H(x+h_n) - H(x)}{h_n} = \lim_n \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} \frac{e^{-h_n(1+t^2)} - 1}{-h_n(1+t^2)} dt.$$

Die durch den Integranden rechts in der Variablen t bei festem x definierte Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$ konvergiert gleichmäßig (da der Bruch gleichmäßig gegen 1 konvergiert). Nach dem Vertauschungssatz in 1.3 kann also der Limes in das Integral hineingezogen werden, woraus die Behauptung folgt. Diese Vertauschbarkeit gilt auch in ähnlichen Fällen. Wir werden einen allgemeinen Satz hierzu in 3.4 beweisen.

Die Eulersche Gamma-Funktion

Eine wichtige Funktion der reellen und komplexen Analysis ist die Gamma-Funktion. Sie lässt sich durch ein uneigentliches Integral definieren:

Definition (*Gamma-Funktion*)

Die Eulersche *Gamma-Funktion* $\Gamma :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{für alle } x > 0.$$

Der Funktionswert $\Gamma(x)$ wird also durch ein von x abhängiges uneigentliches Integral definiert. Im Integranden „kämpft“ die Potenz t^{x-1} gegen die schnell abfallende Funktion e^{-t} an. Die Diagramme auf der folgenden Seite illustrieren die so entstehenden Produkte $t^{x-1} e^{-t}$ und die dadurch definierten Werte der Gamma-Funktion. Ist t hinreichend groß, so ist $t^{x+1} e^{-t} \leq 1$ und damit

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{-2}.$$

Dies zeigt, dass

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b t^{x-1} e^{-t} dt$$

existiert. Für alle $x > 0$ gilt zudem

$$(+)\quad \lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 t^{x-1} dt = \lim_{a \downarrow 0} \left. \frac{t^x}{x} \right|_{t=a}^{t=1} = \lim_{a \downarrow 0} \frac{1 - a^x}{x} = \frac{1}{x}.$$

Da $e^{-t} \leq 1$ für alle $t \geq 0$ gilt, zeigen diese Überlegungen, dass das uneigentliche Integral in der Definition der Gamma-Funktion für alle $x > 0$ existiert.

Eine Anwendung der Substitutionsregel erlaubt eine Darstellung mit Hilfe des Logarithmus:

Satz (*Logarithmus-Darstellung der Gamma-Funktion*)

Für alle $x > 0$ gilt

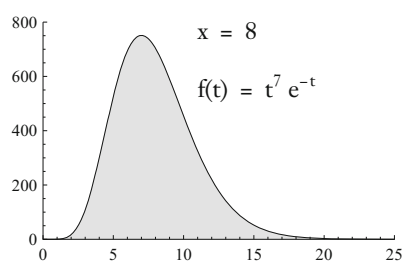
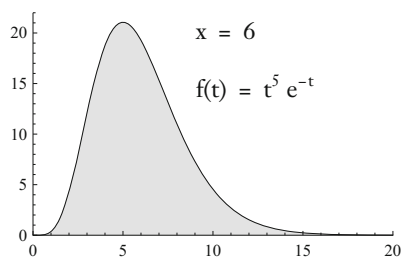
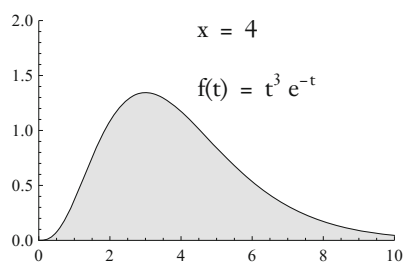
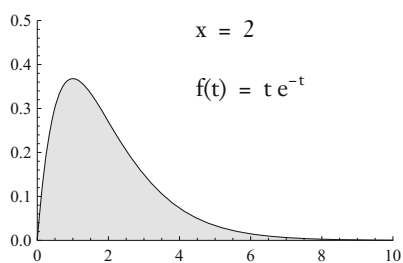
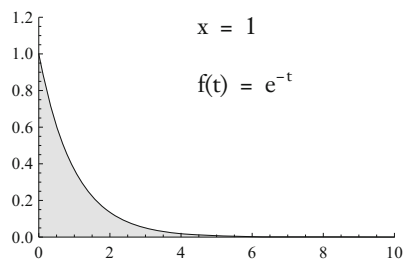
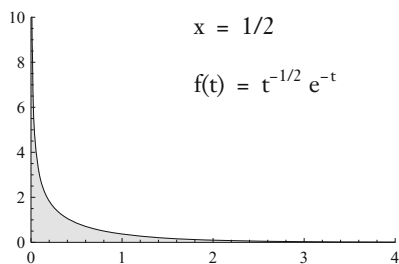
$$\Gamma(x) = \int_0^1 |\log(u)|^{x-1} du.$$

Beweis

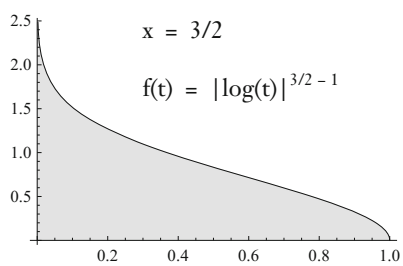
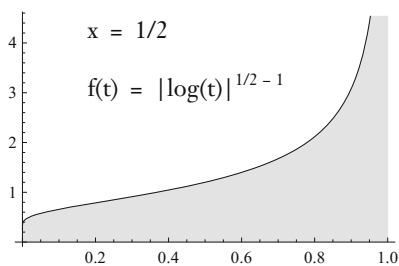
Sei $x > 0$. Mit der Substitution $t = s(u) = -\log(u)$, $s'(u) = -1/u$, gilt

$$\lim_{a \downarrow 0, b \rightarrow \infty} \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{a \downarrow 0, b \rightarrow \infty} \int_{e^{-a}}^{e^{-b}} - \frac{(-\log(u))^{x-1} u}{u} du =$$

$$\lim_{a \downarrow 0, b \rightarrow \infty} \int_{e^{-b}}^{e^{-a}} |\log(u)|^{x-1} du = \int_0^1 |\log(u)|^{x-1} du.$$



$\Gamma(x)$ ist der Inhalt der grauen unbeschränkten Flächen. Ist $x \in]0, 1[$, so strebt $f(t)$ gegen ∞ , wenn t gegen 0 strebt. Für $x > 1$ zeigen sich „Buckel“.



Zur Logarithmus-Darstellung der Gamma-Funktion

Die Funktionalgleichung

Aus unseren Überlegungen gewinnt man, dass

$$\lim_{x \downarrow 0} \Gamma(x) = \infty \text{ (nach (+) in etwa wie } 1/x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) = \infty.$$

Um den Verlauf der Gamma-Funktion genauer beschreiben zu können, beweisen wir mit Hilfe partieller Integration:

Satz (*Funktionalgleichung der Gamma-Funktion*)

Für alle $x > 0$ gilt

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \text{ für alle } x > 0. \quad (\text{Funktionalgleichung für } \Gamma)$$

Speziell ist also $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

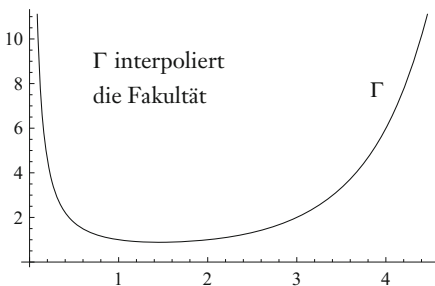
Sei $x > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \lim_{a \downarrow 0, b \uparrow \infty} \int_a^b t^x e^{-t} dt = \\ \lim_{a \downarrow 0, b \uparrow \infty} \left(-t^x e^{-t} \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b -x t^{x-1} e^{-t} dt \right) &= \\ 0 - 0 + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt &= x \Gamma(x). \end{aligned}$$

Damit ist die Funktionalgleichung bewiesen. Wegen

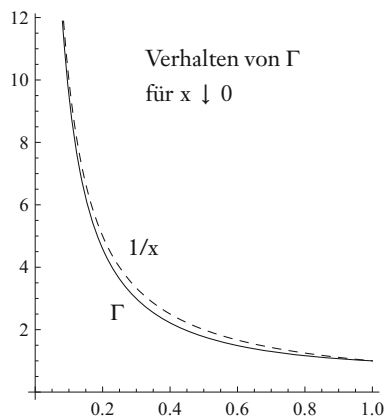
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=b} \right) = e^0 = 1$$

— ergibt sich induktiv, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle n .



$$\Gamma(1) = 0! = 1 \quad \Gamma(2) = 1! = 1$$

$$\Gamma(2) = 2! = 2 \quad \Gamma(4) = 3! = 6$$



Dass sich $\Gamma(x)$ wie $1/x$ verhält, wenn x von oben gegen Null strebt, hatten wir oben schon bemerkt. Die Funktionalgleichung erlaubt einen einfachen Beweis:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\Gamma(x)}{1/x} = \lim_{x \downarrow 0} x \Gamma(x) = \lim_{x \downarrow 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1.$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Gamma-Funktion ist:

Satz (*logarithmische Konvexität*)

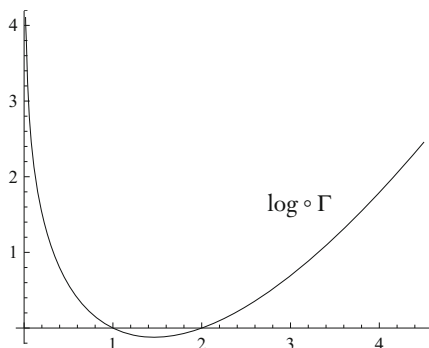
Die Funktion

$$\log \circ \Gamma :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

ist konvex.

Der Beweis kann mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung, die wir im zweiten Abschnitt kennenlernen werden, einfach geführt werden. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit einer Visualisierung.

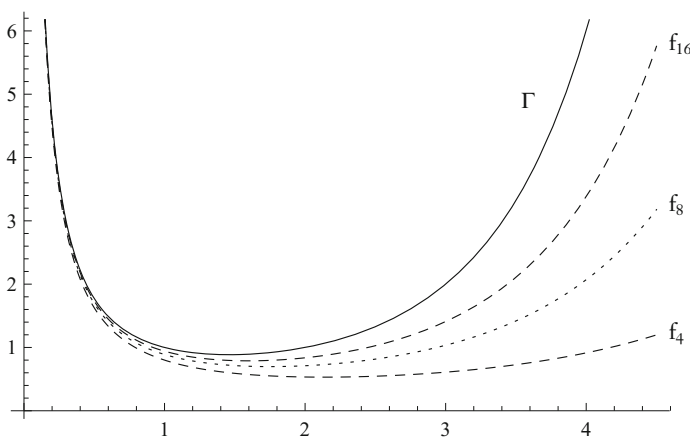
Aus der logarithmischen Konvexität gewinnt man die (bereits Euler bekannte) Darstellung:



Satz (*Gauß-Darstellung der Gamma-Funktion*)

Für alle $x > 0$ gilt

$$\Gamma(x) = \lim_n \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$



Γ und einige Approximationen f_n mit $f_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$ für alle $x > 0$.

Beweis

Sei $x > 0$, und sei $f = \log \circ \Gamma$. Nach der Funktionalgleichung gilt

$$f(x+1) = \log(\Gamma(x+1)) = \log(\Gamma(x)x) = \log(\Gamma(x)) + \log(x) = f(x) + \log(x)$$

und allgemeiner

$$(+_n) \quad f(x+n+1) = f(x) + \log(x(x+1) \dots (x+n)) \quad \text{für alle } n.$$

Für alle $p < q$ sei $a(p, q)$ die Steigung der Sekante von $\log \circ \Gamma$ bzgl. p und q .

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq x+1$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Da f konvex ist, gilt

$$a(n, n+1) \leq a(n+1, x+n+1) \leq a(n+k, n+k+1),$$

d.h.

$$f(n+1) - f(n) \leq \frac{f(x+n+1) - f(n+1)}{x} \leq f(n+k+1) - f(n+k).$$

Damit gilt

$$\log(n) \leq \frac{f(x) + \log(x(x+1) \dots (x+n)) - \log(n!)}{x} \leq \log(n+k),$$

wobei wir links und rechts $(+)_1$ sowie $(+)_n$ und $f(n+1) = \log(\Gamma(n+1)) = \log(n!)$ in der Mitte anwenden. Umformung liefert

$$0 \leq f(x) + \log(x(x+1) \dots (x+n)) - \log(n!) - x \log(n) \leq x \log(1+k/n).$$

Da dies für alle n gilt, folgt

$$\lim_n \left| f(x) - \log\left(\frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}\right) \right| \leq \lim_n x \log(1+k/n) = 0.$$

— Aus $f = \log \circ \Gamma$ und der Stetigkeit von $\exp = \log^{-1}$ folgt die Behauptung.

Im Beweis haben wir die Integraldefinition gar nicht verwendet, sondern nur einige Eigenschaften von Γ . Wir erhalten:

Korollar (Charakterisierungssatz von Bohr-Møllerup)

Sei $g :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ eine Funktion mit

$$(a) \quad g(1) = 1,$$

$$(b) \quad g(x+1) = x g(x) \quad \text{für alle } x > 0, \quad (\text{Funktionalgleichung})$$

$$(c) \quad \log \circ g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ ist konvex.} \quad (\text{logarithmische Konvexität})$$

Dann gilt $g = \Gamma$.

Beweis

Obiger Beweis bleibt mit g statt Γ gültig, da wir dort nur (a) – (c) bzw.

Folgerungen aus diesen Eigenschaften wie $g(n+1) = n!$ verwendet haben.

- Für g gilt also die Gauß-Darstellung und damit $g = \Gamma$.

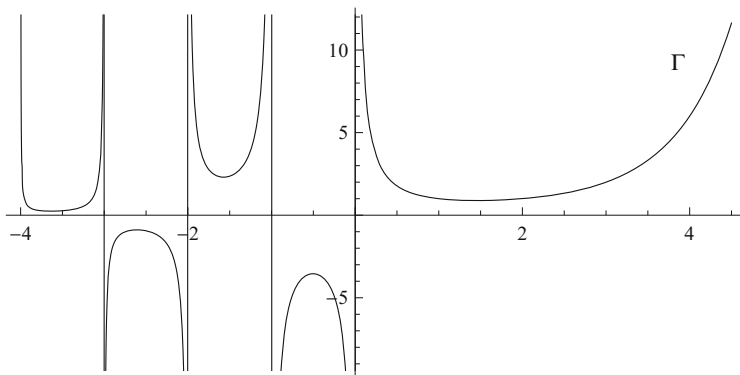
Dass auf (c) nicht verzichtet werden kann, zeigen Funktionen der Form $h\Gamma$, wobei $h :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ eine beliebige Funktion der Periode 1 mit $h(1) = 1$ ist.

Fortsetzung der Gamma-Funktion

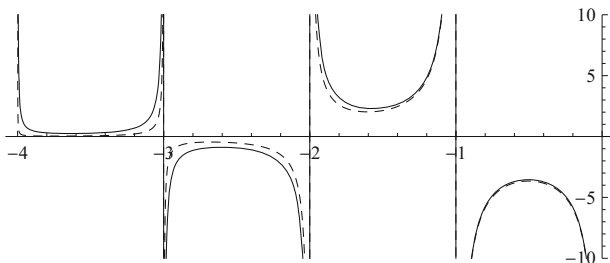
Die Funktionalgleichung erlaubt eine Fortsetzung der Gamma-Funktion nach $\mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$. Denn die Umformung

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

können wir zur Definition von Γ im Intervall $] -1, 0[$ dann zur Definition von Γ im Intervall $] -2, -1[$ usw. verwenden. Das folgende Diagramme zeigt die entstehende (wieder Γ genannte) Funktion $\Gamma : \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$.



Alternativ kann man die Gauß-Darstellung zur Definition von $\Gamma(x)$ für alle x verwenden, die keine negativen ganzen Zahlen sind.



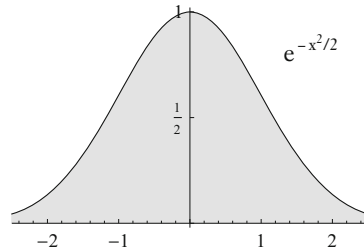
Γ und die Approximation f_4 der Gauß-Darstellung wie im Diagramm oben

Der Wert $\Gamma(1/2)$

Der Wert von Γ an der Stelle $1/2$ hängt eng mit dem Wert des Gauß-Integrals zusammen. Kennt man einen der beiden Werte, so kennt man auch den anderen. Denn mit der Substitution

$$x = s(t) = \sqrt{2t},$$

$$s'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}} = \frac{\sqrt{2}}{2} t^{-1/2}$$



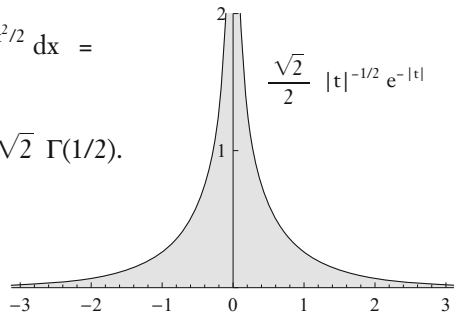
erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 2 \lim_{a \downarrow 0, b \uparrow \infty} \int_a^b e^{-x^2/2} dx =$$

$$\lim_{a \downarrow 0, b \uparrow \infty} \sqrt{2} \int_{a^2/2}^{b^2/2} t^{-1/2} e^{-t} dt = \sqrt{2} \Gamma(1/2).$$

Damit gilt also

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$



Aus der Funktionalgleichung ergeben sich weitere Werte:

$$\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma(5/2) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(7/2) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}.$$

Der Wert von Γ an der Stelle $1/2$ fließt auch aus einer weiteren bemerkenswerten Formel, die wir ohne Beweis angeben:

Satz (Eulerscher Ergänzungssatz)

Für alle $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ gilt

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Speziell gilt $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Die Gamma-Funktion erlaubt eine Fortsetzung ins Komplexe (genauer nach $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$). Das genauere Studium dieser faszinierenden Funktion ist eine Aufgabe der Funktionentheorie.

2. Abschnitt

Topologische Grundbegriffe

1. Lineare Punktmengen

In diesem Kapitel lernen wir eine Reihe grundlegender Begriffe der modernen Mathematik am Beispiel der reellen Zahlen kennen. Darunter fallen „offene Menge“, „Umgebung eines Punktes“, „abgeschlossene Menge“, „Inneres einer Menge“, „Abschluss einer Menge“ und „Rand einer Menge“. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, wie sich die Stetigkeit einer Funktion mit Hilfe dieser Begriffe formulieren lässt.

Einfache Mengen reeller Zahlen

Neben den Zahlenmengen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ hatten wir Teilmengen der reellen Zahlen bislang vor allem in Form von Definitions- und Wertebereichen von Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ kennengelernt. Die wichtigsten Beispiele waren offene, halboffene oder abgeschlossene Intervalle, die beschränkt oder unbeschränkt sein konnten, und endliche Vereinigungen derartiger Intervalle, wie etwa der Definitionsbereich $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ der Funktion f mit $f(x) = 1/x$ für alle $x \neq 0$. Im Folgenden wollen wir allgemeinere, aber immer noch in einem gewissen Sinne einfache Teilmengen der reellen Zahlen betrachten. Dabei nehmen wir einen „topologischen Standpunkt“ ein, der vor allem geometrische Struktureigenschaften im Blick hat. Ist ein beschränktes Intervall I gegeben, so fragt der Topologe nicht, wie lang das Intervall ist, sondern ob I seine Randpunkte enthält. Natürlich ist die Länge eines Intervalls eine wichtige mathematische Größe. Dass aber auch die topologische Frage ihre Berechtigung hat, wird der Leser sofort einsehen, wenn er die Intervalle $]0, 1[$ und $[0, 1]$ betrachtet und die unbeschränkte stetige Funktion g auf $]0, 1[$ mit $g(x) = 1/x$ mit dem Satz vergleicht, dass jede stetige Funktion auf $[0, 1]$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt und gleichmäßig stetig ist. Der Randpunkt 0 der Intervalle $]0, 1[$ und $[0, 1]$ ist ein kleiner – und für die Längenfrage sogar nichtiger – Unterschied mit großer Wirkung. Die genaue Analyse dieses Unterschieds führt in eine eigenartige Welt, in der der Begriff der Stetigkeit in einem besonders klaren und weitreichenden Licht erscheint, das uns zu neuen Entdeckungen einlädt. Wir gewinnen dort auch einen ersten Eindruck von der ungeheuren Komplexität der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{X \mid X \subseteq \mathbb{R}\}$ der reellen Zahlen. Bereits vergleichsweise einfach zu definierende Teilmengen des Kontinuums bergen Überraschungen und werfen schwierige Fragen auf.

Für den Anfänger ist die topologische Betrachtung oft nicht leicht nachvollziehbar. Die Grundbegriffe sind ungewohnt, die vertrauten Funktionen werden zunächst durch die Mengen verdrängt, das Ziel des Unterfangens mag nicht klar zu sehen sein, und die Beweise scheinen oft nur aus elementaren Umformungen zu bestehen, die zusammengenommen eine undurchsichtige Argumentation ergeben. Auch deswegen wird fürs Erste die reelle Zahlengerade zugrunde gelegt. Sie gibt der Anschauung Halt und ist ja auch der historische Nährboden der Topologie. Weiter darf man um Geduld bitten, denn das Neue braucht Zeit, um richtig gesehen zu werden.

Wir beginnen mit einigen Wiederholungen. Für jedes $\varepsilon > 0$ hatten wir die offene ε -Umgebung $U_\varepsilon(p)$ eines Punktes $p \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$U_\varepsilon(p) =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \mid p - \varepsilon < x < p + \varepsilon\}.$$

Die Menge $U_\varepsilon(p)$ können wir auch mit Hilfe des Abstands $|x - y|$ definieren:

$$U_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p| < \varepsilon\}.$$

Der über den Betrag definierte Abstand besitzt die folgenden Eigenschaften, die für alle reellen Zahlen x, y, z gültig sind:

- (a) $|x - y| = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (b) $|x - y| = |y - x|$, (Symmetrie)
- (c) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$. (Dreiecksungleichung)

Für das Folgende sind vielleicht noch einige Bemerkungen zur Verwendung von Bezeichnungen hilfreich.

Konventionen

Für einen Punkt oder eine Teilmenge von \mathbb{R} verwenden wir wie schon bisher bevorzugt p bzw. P als Bezeichnungen: „ p “ für „Punkt“ (engl. „point“) und „ P “ für „Punktmenge“ (engl. „point-set“). Sind p oder P vergeben, so sind x bzw. X gute Variable für Punkte und Punktmenge, etwa in

$$U_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p| < \varepsilon\}, \quad \mathcal{P}(P) = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \subseteq P\}.$$

Ist lediglich P vergeben, so verwenden wir p oder x als bevorzugte Punktvariable, etwa in

$$\mathbb{R} - P = \{p \in \mathbb{R} \mid p \notin P\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin P\} \quad \text{usw.}$$

Punktmenge eines bestimmten Typs werden häufig durch eigene Buchstaben angezeigt. Dies kennen wir schon für reelle Intervalle, die wir mit „ I “ bezeichnet hatten (daneben wird „ I “ aber auch für beliebige Indexmengen verwendet). Im Folgenden werden „signalisierende Buchstaben“ für sog. offene Mengen, Umgebungen und abgeschlossene Mengen hinzukommen.

Offene Mengen

Die anschauliche Eigenschaft, Randpunkte nicht zu enthalten, besitzen neben den offenen Intervallen $]a, b[$ beispielsweise auch die Mengen der Form $]a, b[\cup]c, d[$. Eine unendliche Vereinigung wie etwa

$$]0, 1[\cup]2, 3[\cup]4, 5[\cup \dots \cup]n, n+1[\cup \dots$$

hat ebenfalls diese topologische Struktur. Sie lässt sich allgemein mit Hilfe der ε -Umgebungen einfangen:

Definition (*offen*)

Ein $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, falls für alle $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Eine offene Menge enthält also mit jedem ihrer Punkte ein offenes Intervall, in dem dieser Punkt liegt. Ist U offen, so liegt anschaulich jedes Element von U in der Menge U und nicht an ihrem Rand. Insbesondere verhalten sich auf einer offenen Menge U definierte Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ in der Nähe eines $p \in U$ so, wie wir es von Funktionen, die auf offenen Intervallen definiert sind, gewohnt sind. Zum Beispiel sind die Funktionswerte $f(p \pm 1/n)$ für hinreichend große n definiert.

Unsere bevorzugten Buchstaben für offene Mengen sind U und V . Die Verwendung von „ O “ für „offen“ bzw. engl. „open“ ist nicht üblich.

Jede Menge $U_\varepsilon(p)$ ist offen. Allgemeiner sind alle offenen Intervalle $]a, b[$ mit $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ offen. Die leere Menge und \mathbb{R} sind offen. Die leere Menge ist die einzige endliche offene Menge. Stärker gilt: Ist $P \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar und nichtleer, so ist P nicht offen. Dies liegt daran, dass jede nichtleere offene Menge ein offenes Intervall $]a, b[$ mit $a < b$ enthält, und dass jedes derartige Intervall überabzählbar ist. Genauer zeigt die Überlegung, dass jede nichtleere offene Menge gleichmächtig zu \mathbb{R} ist.

Unmittelbar aus der Definition folgt:

Satz (*offene Mengen als Vereinigung von ε -Umgebungen*)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) U ist offen.
- (b) U ist eine Vereinigung von Mengen der Form $U_\varepsilon(p)$.
- (c) U ist eine Vereinigung von offenen Intervallen.

Wir werden gleich sehen, dass wir die Aussage (c) dieses Satzes noch verstärken können: Eine offene Menge U zerfällt in paarweise disjunkte (beschränkte oder unbeschränkte) Intervalle. Die offenen Teilmengen von \mathbb{R} haben also eine sehr anschauliche Struktur.

Ständig im Einsatz sind die folgenden Eigenschaften:

Satz (*Abgeschlossenheitseigenschaften der offenen Mengen*)

Sei I eine Menge, und seien $U_i \subseteq \mathbb{R}$ offen für alle $i \in I$. Dann gilt:

- (a) $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen.
- (b) Ist I endlich, so ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ offen.

Hier und im Folgenden verwenden wir die Konvention $\bigcap \emptyset = \mathbb{R}$, sodass die zweite Aussage auch dann gilt, wenn die Indexmenge I leer ist.

Beweis

zu (a): Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, und sei $p \in U$. Dann existiert ein $i \in I$ mit $p \in U_i$. Da U_i offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq U_i$. Wegen $U_i \subseteq U$ ist dann aber auch $U_\varepsilon(p) \subseteq U$. Dies zeigt, dass U offen ist.

zu (b): Sei $U = \bigcap_{i \in I} U_i$, und sei $p \in U$. Für alle $i \in I$ gibt es ein $\varepsilon_i > 0$ mit $U_{\varepsilon_i}(p) \subseteq U_i$. Aufgrund der Endlichkeit von I existiert

$$\varepsilon = \min_{i \in I} \varepsilon_i > 0.$$

Es gilt $U_\varepsilon(p) \subseteq U_{\varepsilon_i}(p) \subseteq U_i$ für alle $i \in I$, und damit ist $U_\varepsilon(p) \subseteq U$. Dies zeigt, dass U offen ist.

Insbesondere ist also $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ offen, falls U_0, U_1, U_2, \dots eine Folge offener Mengen ist. Die Aussage (a) gilt aber auch für die Vereinigung überabzählbar vieler offener Mengen.

In Kurzform lautet der Satz: Die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen. Dagegen ist das Komplement $U^c = \mathbb{R} - U$ einer offenen Menge U im Allgemeinen nicht mehr offen. Weiter zeigen zum Beispiel die offenen Mengen

$$U_n =]-1/n, 1/n[= U_{1/n}(0), \quad n \geq 1,$$

dass der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen nicht mehr offen sein muss. Es gilt $\bigcap_{n \geq 1} U_n = \{0\}$, und die Menge $\{0\}$ ist nicht offen.

Wir beweisen nun die angekündigte einfache Struktur der offenen Teilmengen von \mathbb{R} . Im Gegensatz zu den Abgeschlossenheitseigenschaften beruht sie auf der linearen Ordnung der reellen Zahlen, und sie wird sich deswegen nicht auf die mehrdimensionalen Kontinua \mathbb{R}^n oder auf allgemeinere metrische Räume übertragen.

Satz (*Darstellungssatz für offene Mengen in \mathbb{R}*)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist U die Vereinigung von abzählbar vielen paarweise disjunkten offenen Intervallen.

Beweis

Wir definieren für alle $x, y \in U$:

$$x \sim y, \text{ falls } [\min(x, y), \max(x, y)] \subseteq U.$$

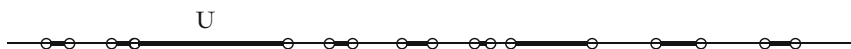
Dann ist \sim eine Äquivalenzrelation auf U , und die Faktorisierung

$$\mathcal{U} = \{x/\sim \mid x \in U\}$$

liefert eine Darstellung wie gewünscht:

- (a) Die Elemente von \mathcal{U} sind paarweise disjunkte nichtleere Mengen.
- (b) Jedes $U \in \mathcal{U}$ ist ein offenes Intervall.
- (c) \mathcal{U} ist abzählbar.

Zum Beweis von (c) wird benutzt, dass jedes nichtleere offene reelle Intervall eine rationale Zahl enthält, sodass es nur abzählbar viele paarweise disjunkte solche Intervalle geben kann. Die anderen Aussagen sind einfach zu zeigen.



Ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}$ zerfällt in abzählbar viele offene Intervalle.

Die Äquivalenzrelation des Beweises hat eine sehr anschauliche Bedeutung: Es gilt $x \sim y$ für $x, y \in U$, wenn wir entlang der reellen Zahlengeraden von x nach y gehen können, ohne dabei die Menge U zu verlassen. Ist zum Beispiel

$$U =]-\infty, 0[\cup]1, 2[\cup]4, 8[,$$

so sind die drei offenen Intervalle der Definition von U genau die Äquivalenzklassen von \sim . Allgemein heißen die Äquivalenzklassen von \sim die *Zusammenhangskomponenten* der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}$.

Umgebungen

Wir kommen nun zu einem weiteren Grundbegriff der Topologie. Er stellt eine Relation zwischen einer Menge und einem Punkt her.

Definition (*Umgebung, offene Umgebung eines Punktes*)

Seien $N \subseteq \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}$. Dann heißt N eine *Umgebung* von p , falls ein offenes U existiert mit $p \in U$ und $U \subseteq N$. Ist N eine Umgebung von p und ist N zudem offen, so heißt N eine *offene Umgebung* von p .

Eine Menge N ist also eine Umgebung eines Punktes p , wenn p ein Element von N ist und wir zudem eine offene Menge um p herumlegen können, ohne dabei N zu verlassen. Anstelle der Existenz eines offenen U mit $p \in U \subseteq N$ können wir gleichwertig fordern, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(p) \subseteq N$.

Der Buchstabe N steht für engl. *neighbourhood*. Da eine Umgebung von p immer eine offene Umgebung von p als Teilmenge enthält und im Deutschen „Umgebung“ mit „U“ beginnt, werden wir häufig auch den Buchstaben U für Umgebungen verwendet. Eine Umgebung eines Punktes muss aber selbst nicht offen sein. So sind zum Beispiel sowohl $]0, 1[$ als auch $[0, 1]$ Umgebungen des Punktes $1/4$. Dagegen ist $[0, 1]$ keine Umgebung von 0 oder von 1 .

Eine Menge der Form $U_\varepsilon(p)$ ist eine offene Umgebung aller ihrer Punkte. Denn für alle $x \in U_\varepsilon(p)$ ist $U_\delta(x) \subseteq U_\varepsilon(p)$ für $\delta = \min(|x - (p - \varepsilon)|, |x - (p + \varepsilon)|)$. Allgemein gilt:

Satz (*offene Mengen und Umgebungen*)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) U ist offen.
- (b) U ist eine Umgebung aller Elemente von U .

Wir hatten Umgebungen mit Hilfe offener Mengen definiert. Der Satz zeigt, dass wir umgekehrt auch die offenen Mengen definieren können, wenn wir wissen, was unter „Umgebung eines Punktes“ zu verstehen ist.

Ist $p \in \mathbb{R}$, so beschreiben die Umgebungen von p die lokale Topologie des Punktes p . Die reellen Zahlen sind homogen in dem Sinne, dass die lokale Topologie in jedem Punkt gleich aussieht. Für alle Punkte $p, q \in \mathbb{R}$ und alle $N \subseteq \mathbb{R}$ gilt für $t = q - p$:

N ist eine Umgebung von p *genau dann, wenn*
 $N + t$ ist eine Umgebung von q ,

wobei $N + t = \{x + t \mid x \in N\}$ die *Translation* von N um t ist. Ebenso gilt für alle $p \in \mathbb{R}$, $N \subseteq \mathbb{R}$ und $c \neq 0$:

N ist eine Umgebung von p *genau dann, wenn*
 cN ist eine Umgebung von p ,

wobei $cN = \{cx \mid x \in N\}$ die *Streckung* von N um den Faktor c ist.

Für jede Menge P lassen sich alle Punkte aufsammeln, für die P eine Umgebung darstellt:

Definition (*Inneres einer Menge, innerer Punkt*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$. Dann setzen wir:

$$\text{int}(P) = \{p \in \mathbb{R} \mid P \text{ ist eine Umgebung von } p\}.$$

Die Menge $\text{int}(P)$ heißt das *Innere* von P , und jedes $p \in \text{int}(P)$ heißt auch ein *innerer Punkt* von P .

Hier steht „int“ für engl. „interior“. Neben $\text{int}(P)$ ist auch die Bezeichnung P° üblich.

Beispiele

$$\text{int}([0, 1]) =]0, 1[, \quad \text{int}([0, 1] - \{1/2\}) =]0, 1[- \{1/2\},$$

$$\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad \text{int}(\mathbb{Q}) = \text{int}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset, \quad \text{int}(P) = \emptyset \text{ für } P \text{ abzählbar.}$$

Für die Bildung des Inneren gilt:

Satz (*Eigenschaften des Inneren*)

Für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\text{int}(P) = \bigcup \{ U \subseteq P \mid U \text{ offen} \}.$
- (b) $\text{int}(P)$ ist die größte offene Teilmenge von P , d.h.:
 - (i) $\text{int}(P)$ ist offen.
 - (ii) Ist $U \subseteq P$ offen, so ist $U \subseteq \text{int}(P)$.
- (c) $\text{int}(P) = P$ genau dann, wenn P ist offen.
- (d) $\text{int}(\text{int}(P)) = \text{int}(P).$

Abgeschlossene Mengen

Da die offenen Mengen nicht abgeschlossen unter Komplementbildung sind, erhalten wir durch die Komplementbildung einen neuen Mengentyp:

Definition (*abgeschlossen*)

Ein $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathbb{R} - A$ offen ist.

Bevorzugte Buchstaben für abgeschlossene Mengen sind A, B, C (das an engl. „closed“ erinnernde „C“ wird aber auch für die Cantor-Menge verwendet, die wir unten definieren werden). Weiter ist auch F für franz. „fermé“ üblich.

Die leere Menge und \mathbb{R} sind abgeschlossen, da \mathbb{R} und \emptyset offen sind. Sie bilden damit Beispiele für Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind. Darüber hinaus gibt es keine weiteren derartigen Mengen: Ist $P \subseteq \mathbb{R}$ offen und abgeschlossen, so ist $P = \emptyset$ oder $P = \mathbb{R}$. Diese Tatsache werden wir im nächsten Kapitel für einen topologischen Beweis des Zwischenwertsatzes verwenden.

Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist abgeschlossen, da sein Komplement die Vereinigung zweier offener Mengen ist. Daneben sind auch die Intervalle der Form $] -\infty, b]$ und $[a, \infty[$ abgeschlossen. Jede endliche Menge ist abgeschlossen, und auch die Mengen \mathbb{N} und \mathbb{Z} sind abgeschlossen. Während den offenen Mengen also nur die Mächtigkeiten 0 und „überabzählbar“ zukommen, können die abgeschlossenen Mengen also endlich, abzählbar unendlich oder überabzählbar sein. Dies ist ein erstes Beispiel für die bemerkenswerte Tatsache, dass abgeschlossene Mengen komplizierter sind als offene Mengen. Und es erheben sich nichttriviale Fragen wie etwa:

Ist jede überabzählbare abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gleichmächtig zu \mathbb{R} ?

Die Antwort ist „ja“, aber der Beweis ist im Gegensatz zur analogen Frage für die offenen Mengen nicht mehr einfach.

Für die abgeschlossenen Mengen gelten die dualen Eigenschaften der offenen Mengen:

Satz (*Abgeschlossenheitseigenschaften der abgeschlossenen Mengen*)

Sei I eine Menge, und seien $A_i \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen für alle $i \in I$. Dann gilt:

- (a) $\bigcap_{i \in I} A_i$ ist abgeschlossen.
- (b) Ist I endlich, so ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Die zweite Aussage ist für abzählbare Vereinigungen im Allgemeinen nicht mehr richtig:

Beispiel

Die Menge $P = \{1/n \mid n \geq 1\}$ ist die abzählbare Vereinigung der abgeschlossenen Mengen $A_n = \{1/n\}$, $n \geq 1$, aber P ist nicht abgeschlossen. Der Menge „fehlt“ der Punkt 0. Die Menge $P \cup \{0\}$ ist dagegen abgeschlossen, denn das Komplement dieser Menge zerfällt in die offenen Intervalle

$$]-\infty, 0[, \quad]1, \infty[, \quad]1/2, 1[, \quad]1/3, 1/2[, \quad \dots$$

Wir erinnern in diesem Zusammenhang an den Begriff des Häufungspunktes einer Menge:

Definition (*Häufungspunkt einer Menge*)

Seien $P \subseteq \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}$. Dann heißt p ein *Häufungspunkt* von P , falls für alle Umgebungen U von p gilt:

$$(U - \{p\}) \cap P \text{ ist nichtleer.} \quad (\text{Häufungspunktbedingung})$$

Tatsächlich enthält eine Umgebung U eines Häufungspunktes p von P immer sogar unendlich viele Punkte von P , sodass man auch „ $U \cap P$ ist unendlich“ statt „ $U \cap P$ enthält einen von p verschiedenen Punkt“ in der Definition verwenden kann. Will man aber zeigen, dass ein Punkt $p \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von P ist, so genügt es, für jede (ohne Einschränkung offene) Umgebung U von p ein einziges von p verschiedenes x zu finden, das in $P \cap U$ liegt. Die Bedingung der Definition lässt sich später zudem unverändert für topologische Räume übernehmen.

Wir betonen noch einmal, dass Häufungspunkte zu P gehören können oder nicht. Die Null ist ein Häufungspunkt von $]0, 1[$ und von $[0, 1]$. Allgemein ist ein Punkt p genau dann ein Häufungspunkt von $P - \{p\}$, wenn p ein Häufungspunkt von $P \cup \{p\}$ ist.

Wir zeigen nun, dass sich die Komplementbildung der offenen Mengen mit Hilfe von Häufungspunkten formulieren lässt.

Satz (*Häufungspunkt-Charakterisierung der Abgeschlossenheit*)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) A ist abgeschlossen.
- (b) Für alle $p \in \mathbb{R}$ gilt: Ist p ein Häufungspunkt von A , so ist $p \in A$.

Beweis

(a) *impliziert* (b): Sei p ein Häufungspunkt von A . Für alle Umgebungen U von p ist dann $U \cap A$ nichtleer, also U keine Teilmenge von $\mathbb{R} - A$. Da $\mathbb{R} - A$ offen ist, ist also $p \notin \mathbb{R} - A$ und damit $p \in A$.

(b) *impliziert* (a): Sei $p \in \mathbb{R} - A$. Dann gibt es eine Umgebung U von p mit $U \cap A = \emptyset$, da sonst p ein Häufungspunkt von A wäre und $p \in A$ gelten würde. Aber $U \cap A = \emptyset$ ist gleichwertig zu $U \subseteq \mathbb{R} - A$. Also ist $\mathbb{R} - A$ eine Umgebung von p . Da dies für alle $p \in \mathbb{R} - A$ gilt, ist $\mathbb{R} - A$ offen und damit A abgeschlossen.

Eine Menge ist also genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält. Leicht einzusehen ist die folgende Variante des Charakterisierungssatzes für Folgen:

Satz (*Folgen-Charakterisierung der abgeschlossenen Mengen*)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) A ist abgeschlossen.
- (b) Jede Cauchy-Folge in A konvergiert in A , d. h., ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit $x_n \in A$ für alle n , so gilt $\lim_n x_n \in A$.

Historisch wurden die abgeschlossenen Mengen sogar vor den offenen Mengen untersucht. Die auf Georg Cantor zurückgehende Bezeichnung „abgeschlossen“ wird durch die beiden Charakterisierungssätze motiviert. Abgeschlossene Mengen sind abgeschlossen unter der Bildung von Häufungspunkten und Grenzwerten. Heute stehen in der Topologie in der Regel die offenen Mengen (oder gleichwertig die Umgebungen) an der Spitze. Sie sind, wie wir schon angedeutet haben und bei der Diskussion der Cantor-Menge noch einmal sehen werden, einfacher als die abgeschlossenen Mengen. Da die offenen Mengen aber die Komplemente der abgeschlossenen Mengen sind, kann man prinzipiell auch mit den abgeschlossenen Mengen beginnen. Setzen wir

$$\mathcal{U} = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid U \text{ offen} \}, \quad \mathcal{A} = \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ abgeschlossen} \},$$

so gilt $\mathcal{U} = \{ \mathbb{R} - A \mid A \in \mathcal{A} \}$, $\mathcal{A} = \{ \mathbb{R} - U \mid U \in \mathcal{U} \}$. Es gilt jedoch nicht, dass $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathcal{A} = \{ X \subseteq \mathbb{R} \mid X \notin \mathcal{A} \}$, und ebenso ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}) - \mathcal{U}$ nicht richtig, man betrachte etwa das Intervall $]0, 1]$, das weder zu \mathcal{U} noch zu \mathcal{A} gehört. Den Bereich $\mathcal{P}(\mathbb{R}) - (\mathcal{U} \cup \mathcal{A})$ der Teilmengen von \mathbb{R} , die weder offen noch abgeschlossen sind, werden wir im Ausblick genauer untersuchen.

Die Punktmengenableitung

Eine weitere topologische Operation ist das Aufsammeln aller Häufungspunkte einer Menge:

Definition (*Cantorsche Punktmengenableitung*)

Für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir:

$$P' = \{ p \in \mathbb{R} \mid p \text{ ist ein Häufungspunkt von } P \}.$$

Die Menge P' heißt die (*Cantorsche*) *Ableitung* von P .

Beispiele

- (1) Für jede endliche Menge P gilt $P' = \emptyset$. Ebenso ist $\mathbb{Z}' = \emptyset$. Ist P unendlich und beschränkt, so gilt $P' \neq \emptyset$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß.
- (2) Ist P dicht in \mathbb{R} , d. h., gilt $P \cap U_\varepsilon(p) \neq \emptyset$ für alle $p \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so gilt $P' = \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\mathbb{Q}' = (\mathbb{R} - \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$ und $\mathbb{A}' = (\mathbb{R} - \mathbb{A})' = \mathbb{R}$.

Die Menge \mathbb{Q} zeigt, dass eine abzählbare Menge überabzählbar viele Häufungspunkte besitzen kann. Weiter zeigen \mathbb{Q} und $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, dass zwei disjunkte Mengen dieselbe Ableitung besitzen können.

Nach dem obigen Satz ist eine Menge P reeller Zahlen genau dann abgeschlossen, wenn $P' \subseteq P$ gilt. Weiter gilt:

Satz (*Eigenschaften der Ableitungsoperation*)

Für alle $P, Q \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $P'' \subseteq P'$, d. h., P' ist abgeschlossen,
- (b) $P \subseteq Q$ impliziert $P' \subseteq Q'$,
- (c) $(P \cup Q)' = P' \cup Q'$,
- (d) $(P \cap Q)' \subseteq P' \cap Q'$.

Mit Hilfe der Ableitungsoperation können wir eine Abschlussoperation für Mengen einführen:

Definition (*Abschluss einer Menge*)

Für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir

$$\text{cl}(P) = P \cup P'.$$

Die Menge $\text{cl}(P)$ heißt der *Abschluss* von P .

Hier steht „cl“ für engl. „closure“. Neben $\text{cl}(P)$ ist auch \overline{P} üblich.

Beispiele

- (1) $\text{cl}([0, 1[) = [0, 1]$, $\text{cl}(\mathbb{Q}) = \text{cl}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
- (2) $\text{cl}(\{1/n \mid n \geq 1\}) = \{1/n \mid n \geq 1\} \cup \{0\}$.
- (3) Ist U offen, so gilt $U \subseteq U'$ und damit ist $\text{cl}(U) = U'$.
- (4) Ist A abgeschlossen, so gilt $A' \subseteq A$ und damit ist $\text{cl}(A) = A$.

Es ist instruktiv, die Definition des Abschlusses mit Hilfe von Umgebungen zu formulieren und sie mit der des Inneren zu vergleichen. Für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{cl}(P) = \{p \in \mathbb{R} \mid \text{für alle Umgebungen } U \text{ von } p \text{ gilt } U \cap P \neq \emptyset\},$$

$$\text{int}(P) = \{p \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt eine Umgebung } U \text{ von } p \text{ mit } U \subseteq P\}.$$

Ist $\mathcal{E}_{\text{cl}}(p, P)$ die definierende Eigenschaft für $\text{cl}(P)$ und $\mathcal{E}_{\text{int}}(p, P)$ die für $\text{int}(P)$ in diesen Darstellungen, so gilt für alle $p \in \mathbb{R}$ und $P \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathcal{E}_{\text{cl}}(p, P) \text{ genau dann, wenn } \text{non } \mathcal{E}_{\text{int}}(p, \mathbb{R} - P).$$

Aus dieser logischen Umformung gewinnt man:

Satz (Inneres und Abschluss)

Für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\text{int}(P) = \mathbb{R} - \text{cl}(\mathbb{R} - P) = \text{cl}(P^c)^c$,
- (b) $\text{cl}(P) = \mathbb{R} - \text{int}(\mathbb{R} - P) = \text{int}(P^c)^c$.

Die Bildung des Inneren und des Abschlusses sind also duale Operationen, und damit lässt sich eine Eigenschaft einer Operation in eine Eigenschaft der anderen übersetzen. Auf diese Weise oder natürlich auch durch direkten Nachweis erhalten wir:

Satz (Eigenschaften der Abschlussoperation)

Für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\text{cl}(P) = \bigcap \{A \supseteq P \mid A \text{ ist abgeschlossen}\}$.
- (b) $\text{cl}(P)$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von P , d. h.:
 - (i) $\text{cl}(P)$ ist abgeschlossen.
 - (ii) Ist $A \supseteq P$ abgeschlossen, so ist $\text{cl}(P) \subseteq A$.
- (c) $\text{cl}(P) = P$ genau dann, wenn P ist abgeschlossen.
- (d) $\text{cl}(\text{cl}(P)) = \text{cl}(P)$.

Für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\text{int}(P) \subseteq P \subseteq \text{cl}(P)$. Die Mengen links und rechts der Menge P sind hierbei die besten offenen bzw. abgeschlossenen Approximationen an P .

Perfekte Mengen

Beim Übergang von P zu P' gehen genau die Punkte von P verloren, die keine Häufungspunkte von P sind. Wir definieren:

Definition (*isolierter Punkt*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$, und sei $p \in P$. Dann heißt p ein *isolierter Punkt* von P , falls eine Umgebung U von p existiert mit $P \cap U = \{p\}$.

Nach Definition gilt also

$$P - P' = \{p \in P \mid p \text{ ist ein isolierter Punkt von } P\}.$$

Beispiele

Ist P endlich, so ist jedes Element von P ein isolierter Punkt. Ebenso ist jeder Punkt von \mathbb{Z} isoliert. Das Intervall $[0, 1[$ hat keine isolierten Punkte. Ist $P = \{1/n \mid n \geq 1\} \cup \{0\}$, so sind alle Punkte bis auf 0 isoliert.

Die abgeschlossene Menge $P = \{1/n \mid n \geq 1\} \cup \{0\}$ der Beispiele ist nicht perfekt im Sinne der folgenden Definition:

Definition (*perfekt*)

Ein $P \subseteq \mathbb{R}$ heißt *perfekt*, falls P abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte besitzt.

Alle abgeschlossenen – beschränkten oder unbeschränkten – Intervalle sind perfekt. Insbesondere sind \emptyset und \mathbb{R} perfekt. Weiter sind die perfekten Mengen abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen und Schnitten. Aus der Charakterisierung der abgeschlossenen Mengen erhalten wir:

Satz (*Ableitungscharakterisierung der perfekten Mengen*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) P ist perfekt.
- (b) $P' = P$.

Der neugierige Leser wird vielleicht fragen:

*Die Eigenschaft „ $P' \subseteq P$ “ heißt „abgeschlossen“ und „ $P' = P$ “ heißt „perfekt“.
Hat nicht auch die Eigenschaft „ $P \subseteq P'$ “ eine Bedeutung?*

In der Tat! Die Eigenschaft „ $P \subseteq P'$ “ besagt, dass jeder Punkt von P ein Häufungspunkt von P ist. Mengen mit dieser Eigenschaft nennt man *in sich dicht*. Beispiele sind alle offenen Mengen sowie \mathbb{Q} und $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ für alle $a < b$. Die perfekten Mengen sind genau die Mengen, die abgeschlossen und in sich dicht sind.

Randpunkte und Rand einer Menge

Mit Hilfe des Umgebungsbegriffs können wir auch definieren, was wir unter einem Randpunkt einer Menge verstehen wollen:

Definition (*Randpunkt*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$. Ein $p \in \mathbb{R}$ heißt ein *Randpunkt* von P , falls für jede Umgebung U von p Punkte $x, y \in U$ existieren mit $x \in P$ und $y \notin P$.

Umgebungen von Randpunkten enthalten also immer sowohl Punkte der Menge als auch Punkte ihres Komplements. In ε -Formulierung lautet die Bedingung:

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(p) \cap P \neq \emptyset$ und $U_\varepsilon(p) - P \neq \emptyset$.

Beispiele

Ist P endlich, so ist jedes Element von P ein Randpunkt von P . Der Punkt 1 ist ein Randpunkt von $[0, 1]$, $]0, 1[$, $[0, 1[$ und $[0, 2] - \{1\}$, obwohl er anschaulich nicht unbedingt „am Rand“ der letzten Menge liegt.

Sammeln von Randpunkten definiert eine weitere topologische Operation:

Definition (*Rand*)

Für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ heißt

$$\text{bd}(P) = \{p \in \mathbb{R} \mid p \text{ ist ein Randpunkt von } P\}$$

der *Rand* von P .

Hier steht „bd“ für engl. „boundary“. Neben $\text{bd}(P)$ ist auch ∂P üblich. Es gilt:

Satz (*Eigenschaften des Randes*)

Für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$(a) \text{ bd}(P) = \text{cl}(P) - \text{int}(P) = \text{cl}(P) \cap (\mathbb{R} - \text{int}(P)),$$

$$(b) \text{ bd}(P) = \text{cl}(P) \cap \text{cl}(\mathbb{R} - P) = \text{bd}(\mathbb{R} - P).$$

Die Darstellungen zeigen den Rand als Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen und trivialisieren den Nachweis seiner Abgeschlossenheit. Sie sind ein schönes Beispiel für die „elementarmagischen“ Umformulierungen der Topologie.

Für offene U und abgeschlossene A gelten:

$$\text{bd}(U) = \text{cl}(U) - \text{int}(U) = (U \cup U') - U = U' - U,$$

$$\text{bd}(A) = \text{cl}(A) - \text{int}(A) = A - \text{int}(A).$$

Topologische Operatoren

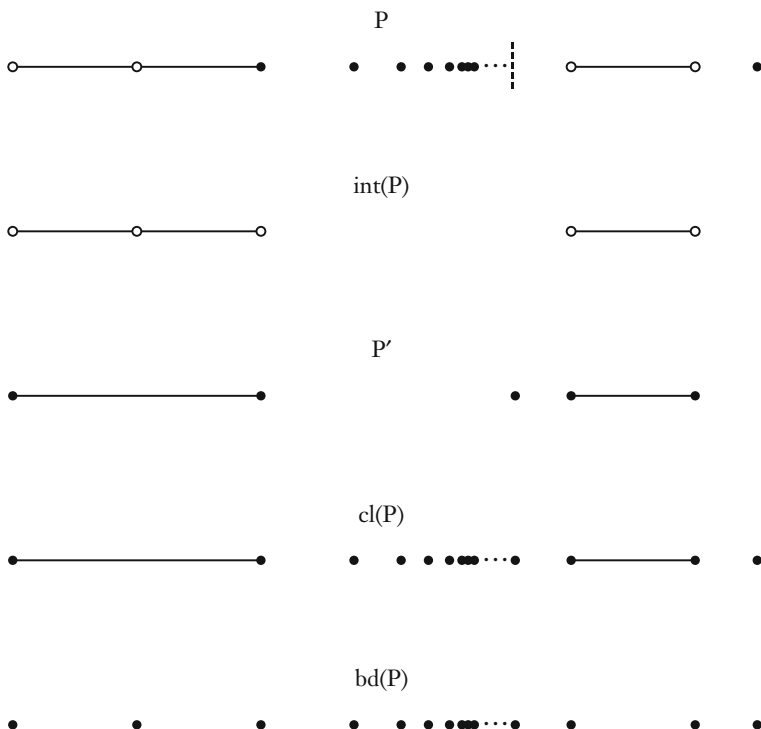
Mit $\text{int}(P)$, $\text{cl}(P)$ und $\text{bd}(P)$ haben wir drei topologische Operationen kennengelernt, die für jede Teilmenge P von \mathbb{R} erklärt sind. Wir können

$$\text{int}, \text{cl}, \text{bd} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

schreiben, d. h., wir können int , cl und bd als Funktionen auffassen, die auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiert sind und Werte in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ annehmen. Das Gleiche gilt für die Punktableitung, die eine Teilmenge P von \mathbb{R} in die Teilmenge P' von \mathbb{R} überführt.

Wir vergleichen die Operatoren noch einmal durch ε -Bedingungen und ein Diagramm.

$p \in \text{int}(P)$	$\exists \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(p) \subseteq P$
$p \in P'$	$\forall \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(p) \cap (P - \{p\}) \neq \emptyset$
$p \in \text{cl}(P)$	$\forall \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(p) \cap P \neq \emptyset$
$p \in \text{bd}(P)$	$\forall \varepsilon > 0 \ (U_\varepsilon(p) \cap P \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(p) - P \neq \emptyset)$



Cantor-Menge und Cantor-Funktion

Jede nichtleere offene Menge U enthält ein Intervall positiver Länge, d. h., es gibt $a < b$ mit $]a, b[\subseteq U$. Wir betrachten folgende Frage:

Enthält jede überabzählbare abgeschlossene Menge ein Intervall positiver Länge?

Die Antwort ist nein. Ein Gegenbeispiel liefert eine von Cantor entdeckte Menge, die durch wiederholtes Entfernen von offenen mittleren Drittelintervallen von $[0, 1]$ definiert werden kann. Wir setzen hierzu

$$C_0 = [0, 1]$$

und entfernen aus C_0 das offene mittlere Drittelintervall $]1/3, 2/3[$. Wir erhalten so

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

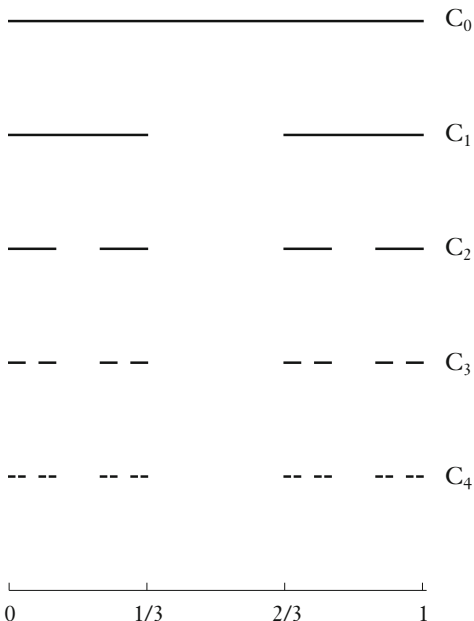
Nun entfernen wir aus C_1 die beiden offenen mittleren Drittelintervalle und erhalten

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

So fortfahrend erhalten wir abgeschlossene Teilmengen

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$$

des Intervalls $[0, 1]$. Wir definieren nun:



Definition (Cantor-Menge)

Die Menge $C = \bigcap_n C_n$ heißt die *Cantor-Menge*.

Die wichtigsten Eigenschaften der Cantor-Menge sind:

Satz (über die Cantor-Menge)

- (a) C ist perfekt.
- (b) C ist überabzählbar. Genauer gilt $|C| = |\mathbb{R}|$.
- (c) C enthält kein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$.
- (d) $\text{bd}(C) = C$.

Beweis

zu (a): Da alle C_n abgeschlossen sind, ist auch ihr Durchschnitt C abgeschlossen. Ist P die Menge der Randpunkte der Intervalle der Mengen C_n , so ist $P \subseteq C$ und jedes Element von C ist ein Häufungspunkt von P , sodass $P' = C$. Damit ist C perfekt.

zu (b): Für alle 0-1-Folgen $(b_n)_{n \geq 1}$ definieren wir Teilintervalle D_n der Mengen C_n , indem wir $D_0 = C_0$ setzen und rekursiv D_{n+1} als das linke oder rechte Drittelintervall von D_n definieren, je nach dem, ob $b_n = 0$ oder $b_n = 1$ gilt. Jeder 0-1-Folge können wir so ein Element von C zuordnen, nämlich das eindeutige Element im Durchschnitt aller Intervalle D_n . Diese Zuordnung liefert eine Bijektion zwischen allen 0-1-Folgen und C . Da es zudem eine Bijektion zwischen \mathbb{R} und allen 0-1-Folgen gibt, ist C gleichmächtig zu \mathbb{R} .

zu (c): Sei $\varepsilon > 0$, und sei n derart, dass $(2/3)^n < \varepsilon$. Dann enthält C_n kein Intervall der Länge ε . Also enthält auch $C \subseteq C_n$ kein solches Intervall.

zu (d): Nach (a) und (c) gilt

$$\text{—} \quad \text{bd}(C) = \text{cl}(C) - \text{int}(C) = C - \emptyset = C.$$

Die Cantor-Menge lässt sich auch mit Hilfe der 3-adischen Entwicklung reeller Zahlen elegant darstellen:

Satz (3-adische Darstellung der Cantor-Menge)

$$C = \{ x \in [0, 1] \mid x \text{ besitzt eine 3-adische Darstellung, in der nur die Ziffern 0 und 2 vorkommen} \} =$$

$$\{ \sum_{k \geq 1} a_k / 3^k \mid (a_k)_{k \geq 1} \text{ ist eine Folge in } \{ 0, 2 \} \}.$$

Zum Beweis des Satzes ordnet man in Analogie zum Beweis von (b) jedem Element x von C eine 0-2-Folge zu, die den links-rechts-Pfad beschreibt, der innerhalb der Mengen C_n zu x führt. Wir diskutieren diese Darstellung in den Ergänzungen E4 genauer.

Die Cantor-Menge taucht in vielen topologischen und maßtheoretischen Fragestellungen als Generator für Gegenbeispiele auf. Sie lässt sich zum Beispiel zur Konstruktion von Peano-Kurven verwenden (vgl. den Ausblick in 3.1). Hier betrachten wir noch eine Anwendung für die Integrationstheorie.

Cantor-Menge und Riemann-Integral

Die Indikator-Funktion $1_C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ der Cantor-Menge ist keine Regelfunktion, da keine Treppenfunktion im offenen $1/2$ -Schlauch um 1_C liegt (oder da der Grenzwert $\lim_{x \downarrow 0} 1_C(x)$ nicht existiert). Für das Riemann-Integral ist die Funktion 1_C überraschenderweise noch zugänglich:

Satz (*Riemann-Integral über I_C*)

Die Indikatorfunktion $1_C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ der Cantor-Menge ist integrierbar mit $I(1_C) = 0$. Allgemeiner gilt dies für $1_P : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $P \subseteq C$.

Damit ist C eine überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen der Riemann-Jordan-Länge $L(C) = I(1_C) = 0$.

Beweis

Für alle n ist die Treppenfunktion $1_{C_n} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit $I(1_{C_n}) = (2/3)^n$, sodass

$$(+)\ \lim_n I(1_{C_n}) = 0.$$

Ist nun $P \subseteq C$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es ein n mit $I(1_{C_n}) < \varepsilon$. Dann ist aber

$$0 \leq s 1_P \leq S 1_P \leq S 1_C \leq S 1_{C_n} = I(1_{C_n}) < \varepsilon.$$

– Hieraus folgen alle Behauptungen.

Entscheidend für das Argument ist, dass sich Längen der entfernten Intervalle zu 1 aufsummieren (dies ist äquivalent zu (+)). Entfernen wir in einer analogen Konstruktion Teilintervalle mit einer Gesamtlänge kleiner als 1, so ist die Indikatorfunktion der verbleibenden Menge nicht mehr Riemann-integrierbar.

Mit Hilfe des Satzes können wir ein offenes Problem aus dem ersten Abschnitt lösen. Wir verwenden dabei die Sprechweise

„es gibt M -viele x mit der Eigenschaft $\mathcal{E}(x)$ “.

Dies bedeutet, dass $|M| = |\{x \mid \mathcal{E}(x)\}|$.

Korollar (*Mächtigkeit der Riemann-integrierbaren Funktionen*)

Es gibt $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ -viele Riemann-integrierbare Funktionen auf $[0, 1]$. Insbesondere ist nicht jede Riemann-integrierbare Funktion ein punktwiser Limes von Treppenfunktionen.

Beweis (*Skizze*)

Die erste Aussage folgt aus dem vorangehenden Satz, da $|\mathcal{P}(C)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.

Zum Zusatz: Es gibt \mathbb{R} -viele Treppenfunktionen auf $[0, 1]$, da jede Treppenfunktion durch eine endliche Folge von reellen Zahlen gegeben ist (Zerlegungspunkte und Werte), und da die Menge aller endlichen Folgen in \mathbb{R} die Mächtigkeit von \mathbb{R} hat. Damit gibt es $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ -viele Folgen von Treppenfunktionen. Da $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$ gilt, gibt es nur \mathbb{R} -viele derartige Folgen, und damit gibt es höchstens \mathbb{R} -viele Funktionen auf $[0, 1]$, die ein punktwiser Limes von Treppenfunktionen sind.

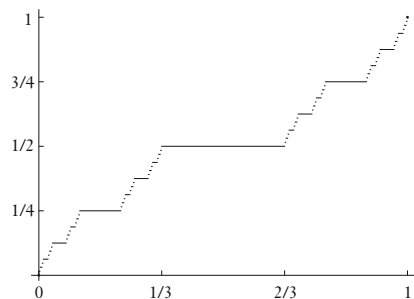
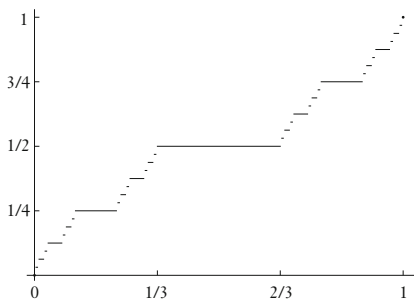
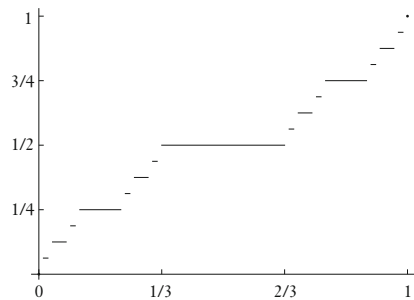
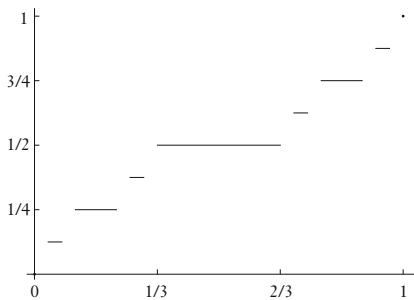
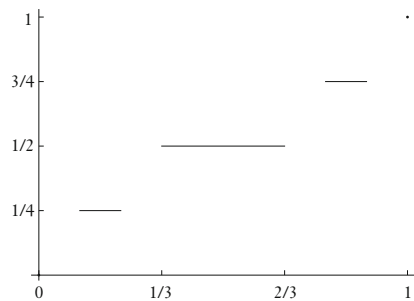
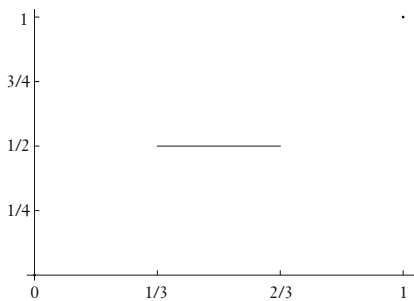
Aus der Sicht der Mächtigkeitstheorie ist der Unterschied zwischen dem Riemann-Integral und dem Regelintegral also enorm: Es gibt nur $|\mathbb{R}|$ -viele Regelfunktionen, aber $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|$ -viele Riemann-integrierbare Funktionen.

Die Cantor-Funktion

Mit Hilfe der Cantor-Menge lässt sich die Cantor-Funktion oder Teufelstreppe $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definieren. Wir bauen f schrittweise auf. Zunächst setzen wir $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Nun betrachten wir die Abschlüsse der in der Konstruktion von C entfernten Drittelintervalle, also die Intervalle

$$I_0 = [1/3, 2/3], \quad I_1 = [1/9, 2/9], \quad I_2 = [7/9, 8/9], \quad I_3 = [1/27, 2/27], \quad \dots$$

und definieren f rekursiv auf diesen Intervallen: Wir setzen f konstant gleich c auf I_n , wobei c das arithmetische Mittel der bereits definierten Funktionswerte der beiden Stellen ist, die unmittelbar links und rechts von I_n liegen. Die Funktion f ist also konstant gleich $1/2$ auf $[1/3, 2/3]$, konstant gleich $1/4$ auf $[1/9, 2/9]$, konstant gleich $3/4$ auf $[7/9, 8/9]$ usw. Die folgenden Diagramme visualisieren diese Konstruktion.



Damit haben wir eine monoton steigende Funktion

$$f: J \rightarrow [0, 1], \quad J = \{0, 1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

konstruiert. Der Wertebereich dieser Funktion ist $\{k/2^n \mid n \in \mathbb{N}, k \leq n\}$ und damit dicht in $[0, 1]$. Wir setzen nun f nach $[0, 1]$ fort vermöge

$$f(x) = \sup_{t < x, t \in J} f(t) = \inf_{t > x, t \in J} f(t) \quad \text{für alle } x \in [0, 1] - J.$$

Die Menge $[0, 1] - J$ ist die Cantor-Menge C ohne die Punkte 0 und 1 und ohne die Randpunkte der I_n .

Definition (*Cantor-Funktion oder Teufelstreppe*)

Die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ heißt die *Cantor-Funktion* oder *Teufelstreppe*.

Aus der Konstruktion ergibt sich:

Satz (*Eigenschaften der Cantor-Funktion*)

- (a) f ist monoton steigend.
- (b) f nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an.
- (c) f ist stetig.
- (d) f ist in allen Punkten $x \in [0, 1] - C$ differenzierbar mit Ableitung 0.
- (e) f ist in 0, 1 und den Randpunkten der entfernten Drittelintervalle nicht differenzierbar.

Die Menge $[0, 1] - C$ hat den Riemann-Jordan-Länge 1 und dort verschwindet die Ableitung von f . Die Teufelstreppe ist also „fast überall“ flach, und dennoch steigt sie stetig von 0 nach 1. Als stetige Funktion auf $[0, 1]$ ist die Cantor-Funktion sogar gleichmäßig stetig. Dagegen ist sie nicht Lipschitz-stetig und stärker auch nicht absolutstetig (vgl. Kapitel 3.2 in Band 1).

Die Konstruktion der Cantor-Funktion lässt sich in verschiedenen Varianten durchführen. Interpoliert man die in den obigen Diagrammen dargestellten Graphen linear, so ergeben sich monotone und stückweise lineare Funktionen $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, die gleichmäßig gegen f konvergieren. Damit erscheint f als gleichmäßiger Limes einer einfachen Funktionenfolge. Weiter lässt sich die Cantor-Funktion auch direkt mit Hilfe von 2- und 3-adischen Darstellungen definieren. Hierzu definieren wir für jede Folge $(a_k)_{k \geq 1}$ in $\{0, 1, 2\}$ eine Folge $(b_k)_{k \geq 1}$ in $\{0, 1\}$, indem wir (1) alle a_k -Glieder nach der ersten 1 gleich 0 setzen (gibt es keine 1, so tun wir nichts), (2) jede 2 durch eine 1 ersetzen. So wird aus $(0, 2, 2, 0, 1, 1, 0, 2, \dots)$ zum Beispiel $(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$. Dann gilt

$$f\left(\sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{3^k}\right) = \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{2^k} \quad \text{für alle Folgen } (a_k)_{k \geq 1} \text{ in } \{0, 1, 2\}.$$

Wir besprechen diese Darstellung ebenfalls in den Ergänzungen E4.

Ausblick: **G_δ -, F_σ -Mengen und Bairescher Kategoriensatz**

Die offenen und abgeschlossenen Mengen bilden zwei Typen von Teilmengen von \mathbb{R} . Bereits die einfachen halboffenen Intervalle der Form $]a, b]$ und $[a, b[$ gehören nicht zu diesen Typen. Gleiches gilt für die Menge \mathbb{Q} . Die nächste Komplexitätsstufe für Mengen reeller Zahlen erhalten wir durch die Bildung von abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten:

Definition (G_δ - und F_σ -Mengen)

Ein $P \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine G_δ -Menge, falls offene U_n , $n \in \mathbb{N}$, existieren mit

$$P = \bigcap_n U_n.$$

Analog heißt ein $P \subseteq \mathbb{R}$ eine F_σ -Menge, falls abgeschlossene A_n , $n \in \mathbb{N}$, existieren mit

$$P = \bigcup_n A_n.$$

Das kleine „ δ “ erinnert an „Durchschnitt“ und das kleine „ σ “ an „Summe“. „ G “ steht für „Gebiet“, eine traditionelle deutschsprachige Bezeichnung für (nichtleere) offene Mengen. Schließlich steht „ F “ für franz. „fermé“, abgeschlossen. Die Bezeichnung stammen von Felix Hausdorff.

Alle halboffenen Intervalle $]a, b]$ und $[a, b[$ sind sowohl G_δ -Mengen als auch F_σ -Mengen. Jede abzählbare Menge $P = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine F_σ -Menge, da

$$P = \bigcup_n \{p_n\}, \text{ mit abgeschlossenen Mengen } \{p_n\}.$$

Ebenso ist jedes P , dessen Komplement $\mathbb{R} - P$ abzählbar ist, eine G_δ -Menge. Speziell ist \mathbb{Q} eine F_σ -Menge und $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ eine G_δ -Menge.

Es gilt:

Satz (elementare Eigenschaften der G_δ - und F_σ -Mengen)

(a) Jede offene und jede abgeschlossene Menge ist sowohl eine G_δ -Menge als auch eine F_σ -Menge.

(b) Ist P eine G_δ -Menge, so ist $\mathbb{R} - P$ eine F_σ -Menge.

Ist Q eine F_σ -Menge, so ist $\mathbb{R} - Q$ eine G_δ -Menge.

(c) Sind P_n , $n \in \mathbb{N}$, G_δ -Mengen, so ist $\bigcap_n P_n$ eine G_δ -Menge.

Sind Q_n , $n \in \mathbb{N}$, F_σ -Mengen, so ist $\bigcup_n Q_n$ eine F_σ -Menge.

(d) Sind P_0, \dots, P_n G_δ -Mengen, so ist $\bigcup_{k \leq n} P_k$ eine G_δ -Menge.

Sind Q_0, \dots, Q_n F_σ -Mengen, so ist $\bigcap_{k \leq n} Q_k$ eine F_σ -Menge.

Der Bairesche Kategoriensatz

Bislang ist nicht klar, ob die G_δ - und die F_σ -Mengen zusammenfallen. Dies ist aber nicht der Fall. Hierzu beweisen wir:

Satz (Bairescher Kategoriensatz)

Seien A_n , $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossene Mengen, die keine Intervalle positiver Länge enthalten. Dann enthält auch $\bigcup_n A_n$ kein Intervall positiver Länge.

Beweis

Sei $[a, b]$ ein Intervall mit $a < b$. Wir konstruieren rekursiv Intervalle $[a_n, b_n]$ mit $a_n < b_n$ mit den Eigenschaften:

- (a) $[a, b] \supseteq [a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$,
- (b) $[a_n, b_n] \cap A_n = \emptyset$ für alle n .

Derartige Intervalle existieren, denn ist $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ konstruiert für ein $n \geq 0$ (mit der Festsetzung $[a_{-1}, b_{-1}] = [a, b]$), so gibt es nach Voraussetzung ein $x_n \in]a_{n-1}, b_{n-1}[$ mit $x_n \notin A_n$. Dieses x_n ist kein Häufungspunkt von A_n , da A_n abgeschlossen ist. Also ist $[x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon]$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ disjunkt von A_n und damit ein Intervall $[a_n, b_n]$ wie gewünscht.

Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung gibt es ein $x^* \in \bigcap_n [a_n, b_n]$.

Dann ist $x^* \in [a, b]$, und nach (b) ist $x^* \notin \bigcup_n A_n$, da $x^* \in [a_n, b_n]$ für alle n .

– Also ist $[a, b]$ keine Teilmenge von $\bigcup_n A_n$.

Bevor wir den Baireschen Kategoriensatz anwenden, wollen wir ihn noch etwas umformulieren. Hierzu definieren wir:

Definition (nirgends dicht, irgendwo dicht, mager)

Ein $P \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nirgends dicht*, falls $\text{int}(\text{cl}(P)) = \emptyset$. Andernfalls heißt P *irgendwo dicht*. Ein $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *mager*, falls es nirgends dichte P_n gibt mit $M = \bigcup_n P_n$.

Die Bedingung „ $\text{int}(\text{cl}(P)) = \emptyset$ “ besagt genau, dass der Abschluss von P kein Intervall positiver Länge enthält. Damit erhalten wir:

Satz (Bairescher Kategoriensatz, Umformulierung)

Eine mager Menge besitzt ein leeres Inneres. Insbesondere ist jedes Intervall positiver Länge nicht mager.

Beweis

Ist $M = \bigcup_n P_n$ mit nirgends dichten P_n , so ist $M \subseteq \bigcup_n \text{cl}(P_n)$ und die

– Mengen $A_n = \text{cl}(P_n)$ sind wie im Kategoriensatz.

Ist P nirgends dicht, so gilt dies auch für jede Teilmenge von P . Analoges gilt für die mageren Mengen. Weiter sind die nirgends dichten Mengen abge-

geschlossen unter endlichen Vereinigungen. Die mageren Mengen sind abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen. Ein P ist genau dann nirgends dicht, wenn $\text{cl}(P)$ nirgends dicht ist. Dagegen ist der Abschluss einer mageren Menge im allgemeinen nicht mager, denn eine magere Menge kann dicht sein: Durchläuft $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ alle rationalen Zahlen und ist $P_n = \{q_n\}$ für alle n , so ist jedes P_n nirgends dicht, aber die magere Menge $\bigcup_n P_n = \mathbb{Q}$ ist dicht in \mathbb{R} .

Ist U offen und dicht, so ist U^c nirgends dicht. Hieraus erhält man:

Satz (*Bairescher Kategoriensatz, duale Formulierung*)

Ein abzählbarer Durchschnitt von offenen dichten Mengen ist dicht.

Beweis

Ist $D = \bigcap_n U_n$ mit offenen und dichten U_n , so ist $D^c = \bigcup_n U_n^c$ mit nirgends dichten Mengen U_n^c . Also ist D^c mager. Nach dem Kategoriensatz ist $\text{int}(D^c) = \emptyset$ und damit ist D dicht.

Aus der dualen Formulierung folgt umgekehrt die erste Version: Denn ist $M = \bigcup_n P_n$ mager, so ist $M \subseteq \bigcup_n \text{cl}(M_n)$. Also ist $M^c \supseteq \bigcap_n \text{cl}(P_n)^c$ dicht und damit $\text{int}(M) = \emptyset$.

Wir betrachten nun einige Anwendungen des Kategoriensatzes. Wir beginnen mit der oben aufgeworfenen Frage:

Verschiedenheit der F_σ - und G_δ -Mengen

Satz (*Komplexität von \mathbb{Q} und $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$*)

Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen ist eine F_σ -Menge, aber keine G_δ -Menge. Ebenso ist die Menge $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen eine G_δ -Menge, aber keine F_σ -Menge.

Beweis

Als abzählbare Menge ist \mathbb{Q} eine F_σ -Menge, und damit ist $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ eine G_δ -Menge. Wir zeigen, dass $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ keine F_σ -Menge ist. Dann ist \mathbb{Q} keine G_δ -Menge. *Annahme*, es gilt

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

für abgeschlossene Mengen A_n . Da \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} ist, ist jedes A_n nirgends dicht (sonst enthielte $A_n = \text{cl}(A_n)$ ein Intervall positiver Länge und damit ein Element von \mathbb{Q}). Folglich sind auch die Mengen

$$B_n = A_n \cup \{q_n\},$$

nirgends dicht, wobei $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ eine Aufzählung aller rationalen Zahlen ist. Dann gilt aber

$$\bigcup_n B_n = \bigcup_n (A_n \cup \{q_n\}) = \bigcup_n A_n \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R},$$

— *im Widerspruch zum Baireschen Kategoriensatz.*

Es ist instruktiv, den Beweis mit der dualen Version des Kategoriensatzes zu wiederholen: *Annahme*, es gilt $\mathbb{Q} = \bigcap_n U_n$ mit offenen U_n . Dann ist jedes U_n eine Obermenge von \mathbb{Q} und damit dicht. Dann gilt aber $\emptyset = \bigcap_n (U_n - \{q_n\})$ mit offenen dichten Mengen $U_n - \{q_n\}$, *Widerspruch*.

Allgemein zeigt das Argument, dass jede abzählbare dichte Teilmenge von \mathbb{R} eine F_σ -, aber keine G_δ -Menge ist.

Überabzählbarkeit echter Intervalle

Der Bairesche Kategoriensatz zeigt auf neue Art und Weise:

Satz (*Überabzählbarkeit reeller Intervalle*)

Seien $a < b$. Dann ist $[a, b]$ überabzählbar.

Beweis

Da jede Einermenge $\{x\}$ nirgends dicht ist, hat nach dem Baireschen Kategoriensatz jede abzählbare Menge ein leeres Inneres. Damit gilt

– $[a, b] \neq \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a, b]$.

Strenge Monotonie des Integrals

Mit Hilfe des Kategoriensatzes können wir eine Frage beantworten, die sich unmittelbar nach der Einführung des Integrals gestellt hatte:

Satz (*strenge Monotonie des Integrals*)

Seien $a < b$ und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit $f < g$. Dann ist $I(f) < I(g)$.

Beweis

Sei $h = g - f$. Dann ist $h : [a, b] \rightarrow]0, \infty[$. Wegen $I(h) = I(g) - I(f)$ genügt es zu zeigen, dass $I(h) > 0$. Wir setzen hierzu

$$M_n = \{x \in [a, b] \mid h(x) \geq 1/n\} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Wegen $\bigcup_{n \geq 1} M_n = [a, b]$ gibt es nach dem Baireschen Kategoriensatz ein $n^* \geq 1$ derart, dass M_{n^*} irgendwo dicht ist. Seien also $c < d$ in $[a, b]$ mit

$$(+)\quad [c, d] \subseteq \text{cl}(M_{n^*}).$$

Sei $h^* = h|_{[c, d]}$. Dann gilt

$$I(h) \geq I(h^*) = S h^* \geq \frac{d - c}{n^*} > 0,$$

wobei wir (+) und die Definition des Oberintegrals bei der zweiten Abschätzung verwenden: Da M_{n^*} dicht in $[c, d]$ und $h(x) \geq 1/n^*$ auf M_{n^*} ist,

– ist jede Darboux'sche Obersumme $S_p h^*$ größergleich $(d - c)/n^*$.

Topologische Begriffe (mit $P \subseteq \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}$)	
$U_\varepsilon(p)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x - p < \varepsilon\}$
P offen	$\forall p \in P \exists \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(p) \subseteq P$
P Umgebung von p	$\exists \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(p) \subseteq P$ $\exists U \subseteq P \ (p \in U \wedge U \text{ offen})$
p Häufungspunkt von P	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in P \ (x \neq p \wedge x \in U_\varepsilon(p))$
p isolierter Punkt von P	$\exists \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(p) \cap P = \{p\}$
P'	$\{p \in \mathbb{R} \mid p \text{ Häufungspunkt von } P\}$
P dicht	$\forall p \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ P \cap U_\varepsilon(p) \neq \emptyset$ $P' = \mathbb{R}$
P abgeschlossen	$P^c \text{ ist offen}$ $P' \subseteq P$
P perfekt	$P' = P$
P in sich dicht	$P \subseteq P'$
$\text{int}(P)$	$\{p \in \mathbb{R} \mid P \text{ ist Umgebung von } p\}$
$\text{cl}(P)$	$P \cup P'$
p Randpunkt von P	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x, y \in U_\varepsilon(p) \ (x \in P \wedge y \notin P)$
$\text{bd}(P)$	$\{p \in \mathbb{R} \mid p \text{ ist Randpunkt von } P\}$ $\text{cl}(P) - \text{int}(P)$
P nirgends dicht	$\text{int}(\text{cl}(P)) = \emptyset$
P G_δ -Menge	$P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ mit } U_n \text{ offen}$
P F_σ -Menge	$P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ mit } A_n \text{ abgeschlossen}$

Beispiele	
$U_\varepsilon(p)$	$U_1(2) =]1, 3[$
P offen	$\emptyset, \mathbb{R},]0, 1[,]0, 1[\cup]2, \infty[, \mathbb{R} - \{0\}$
P Umgebung von p	$]0, 1[$ ist Umgebung von $1/2$ und $1/10$, aber keine Umgebung von 0 oder von 1
p Häufungspunkt von P	0 ist Häufungspunkt von $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
p isolierter Punkt von P	alle $p \in \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sind isoliert
P'	$(]0, 1[\cup \{2\})' = [0, 1], \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$
P dicht	$\mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \mathbb{A}, \mathbb{R} - \mathbb{Z}, \mathbb{R},$ $\mathbb{R} - C$ mit der Cantor-Menge C
P abgeschlossen	$[0, 1], [0, 1] \cup \{2\}, [0, 1] \cup [2, \infty[$ $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$
P perfekt	$[0, 1],$ Cantor-Menge C, \mathbb{R}
P in sich dicht	$\emptyset, \mathbb{Q} \cap [0, 1[, \mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
$\text{int}(P)$	$\text{int}(]0, 1]) =]0, 1[, \text{int}(\mathbb{Q}) = \text{int}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$
$\text{cl}(P)$	$\text{cl}([0, 1]) = \text{cl}([0, 1] - \mathbb{Q}) = [0, 1]$
p Randpunkt von P	0 und 1 sind Randpunkte von $]0, 1[$
$\text{bd}(P)$	$\text{bd}([0, 1]) = \text{bd}(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$ $\text{bd}([0, 2] - \{1\}) = \{0, 1, 2\}, \text{bd}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
P nirgends dicht	$\emptyset, \mathbb{Z}, \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\},$ Cantor-Menge C
P G_δ -Menge	$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} - \{q_n\})$
P F_σ -Menge	$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\},$ wobei $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

2. Topologische Stetigkeit

Wir formulieren den Begriff der Stetigkeit einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $P \subseteq \mathbb{R}$ topologisch. Die ε - δ -Stetigkeit lässt sich mit Hilfe des Umgebungsbegriffs ausdrücken, und wir erhalten so verschiedene Urbild-Bedingungen, die die Stetigkeit von f einfangen. Weiter gelangen wir zu einer Formulierung der Stetigkeit, die sich als Präzisierung der Anschauung des „Erhalts von Nähe“ lesen lässt.

Relativbegriffe

Wir wollen unsere Begriffsbildungen nun noch von \mathbb{R} auf eine beliebige Punktmenge $P \subseteq \mathbb{R}$ relativieren. Der Leser denke hierbei zum Beispiel wieder an ein Intervall oder eine Vereinigung von Intervallen. Die Menge P ist ein reduziertes „Universum“, dessen Teilmengen wir untersuchen. In den Stetigkeitsformulierungen wird P der Definitionsbereich einer reellen Funktion sein.

Definition (*relativ offene Mengen*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt ein $V \subseteq P$ *offen in P* oder *relativ offen bzgl. P* , falls ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}$ existiert mit $V = U \cap P$.

Beispielsweise ist $[0, 1[$ offen in $P = [0, 2]$, da $[0, 1[=]-1, 1[\cap P$. Dagegen ist $[0, 1/2]$ nicht offen in $[0, 2]$. Für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ ist P offen in P , da $P = P \cap \mathbb{R}$ für die offene Menge \mathbb{R} gilt. Auch die leere Menge ist stets offen in P . Allgemein übernimmt das Mengensystem

$$\mathcal{V} = \{ U \cap P \mid U \in \mathcal{U} \} = \{ U \cap P \mid U \text{ ist offen in } \mathbb{R} \}$$

die Rolle der offenen Mengen. Ist $P = \mathbb{R}$, so fällt die Offenheit von U in P mit Offenheit von U zusammen. Dies gilt für alle folgenden Relativierungen.

An die Stelle der ε -Umgebungen $U_\varepsilon(p)$ treten die entsprechenden Schnitte mit der Grundmenge P . Setzen wir

$$U_\varepsilon^P(p) = U_\varepsilon(p) \cap P, \quad (\text{relative } \varepsilon\text{-Umgebung von } p)$$

so ist eine Menge $U \subseteq P$ genau dann offen in P , wenn für alle $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon^P(p) \subseteq U$.

Alle anderen topologischen Begriffsbildungen leiten sich nun wie früher aus dem Begriff der offenen Menge ab. Der Umgebungsbegriff relativiert sich zum Beispiel wie folgt:

Definition (*relative Umgebungen*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$. Weiter seien $N \subseteq P$ und $p \in P$. Dann heißt N eine *Umgebung* von p *in* P oder *relativ zu* P , falls ein in P offenes U existiert mit $p \in U \subseteq N$. Ist N offen in P , so heißt N eine *offene Umgebung* von p in P .

Gleichwertig zur Existenz eines relativ offenen U mit $p \in U \subseteq N$ ist die Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon^P(p) \subseteq N$. Relative Umgebungen eines Punktes enthalten also wieder eine offene ε -Umgebung, wobei die ε -Umgebung aus der Sicht der Menge P betrachtet wird.

Ist P offen, so fallen die relative Offenheit und der relative Umgebungsbegriff mit den Begriffen für \mathbb{R} zusammen: Die in P offenen Mengen sind in diesem Fall genau die offenen Teilmengen von P , und die Umgebungen eines $p \in P$ relativ zu P sind genau die Umgebungen von p , die Teilmengen von P sind.

Relativ abgeschlossene Mengen können wir wieder über Komplemente einführen:

Definition (*relativ abgeschlossene Mengen*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt ein $A \subseteq P$ *abgeschlossen in* P oder *relativ abgeschlossen bzgl.* P , falls $P - A$ offen in P ist.

Beispielsweise sind $]0, 1/2]$ und $\{1/n \mid n \geq 1\}$ abgeschlossen in $P =]0, 1]$ und ebenso in $Q = [-1, 1] - \{0\}$. Der Punkt 0 „fehlt“ diesen Mengen nur aus der Sicht von \mathbb{R} , aus der Sicht von P oder Q gibt es diesen Punkt nicht.

Gleichwertig zur Abgeschlossenheit von A in P ist die Existenz einer abgeschlossenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A = B \cap P$. Denn es gilt:

A ist abgeschlossen in P *genau dann, wenn*

es gibt ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $P - A = U \cap P$ *genau dann, wenn*

es gibt ein abgeschlossenes $B \subseteq \mathbb{R}$ mit $P - A = (\mathbb{R} - B) \cap P$ *genau dann, wenn*

es gibt ein abgeschlossenes $B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A = B \cap P$.

Aus der Schnitt-Darstellung folgt, dass für alle $Q \subseteq P$ die Menge $\text{cl}(Q) \cap P$ die kleinste in P abgeschlossene Obermenge von Q ist. Damit ist ein $A \subseteq P$ genau dann abgeschlossen in P , wenn

$$A = \text{cl}(A) \cap P = (A \cup A') \cap P = A \cup (A' \cap P),$$

d. h., wenn $A' \cap P \subseteq A$. Es gilt also folgende Häufungspunkt-Charakterisierung:

Ein $A \subseteq P$ ist genau dann abgeschlossen in P , wenn jeder Häufungspunkt von A , der in P liegt, zu A gehört.

Gleichwertig ist, dass jede Folge in A , die in P konvergiert, einen Grenzwert in A besitzt. Für $P =]0, 1]$ und die in P abgeschlossene Menge $A =]0, 1/2]$ ist diese Bedingung für eine Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P nicht verletzt, da eine solche Folge in P nicht konvergiert.

Auch die topologischen Operatoren lassen sich nach P relativieren, indem wir in den Definitionen die Relativbegriffe einsetzen. Wir erhalten so Operatoren $\text{int}^P, (\cdot)^P, \text{cl}^P, \text{bd}^P : \mathcal{P}(P) \rightarrow \mathcal{P}(P)$. Für alle $Q \subseteq P$ gilt

$$\text{int}^P(Q) = \{ p \in P \mid Q \text{ ist eine Umgebung von } p \text{ in } P \} =$$

$$\{ p \in P \mid \text{es gibt ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon^P(p) \subseteq Q \},$$

$$Q'^P = Q' \cap P,$$

$$\text{cl}^P(Q) = Q \cup Q'^P = \text{cl}(Q) \cap P,$$

$$\text{bd}^P(Q) = \text{cl}^P(Q) - \text{int}^P(Q).$$

Für die Operatoren int^P und bd^P gilt keine Schnittdarstellung wie für die relative Ableitung und den relativen Abschluss. Für $P = [0, 1]$ ist zum Beispiel

$$\text{int}^P([0, 1]) = [0, 1] \neq]0, 1[= \text{int}([0, 1]) \cap P,$$

$$\text{bd}^P([0, 1]) = \emptyset \neq \{0, 1\} = \text{bd}([0, 1]) \cap P.$$

Allgemein gilt $\text{int}^P(P) = \text{cl}^P(P) = P$ und damit $\text{bd}^P(P) = \emptyset$. Eine offene und zugleich abgeschlossene Menge besitzt keine Randpunkte.

Die topologische Umgebungsstetigkeit

Mit unseren topologischen Begriffen können wir nun die Stetigkeit einer Funktion neu formulieren. Der Leser kann beim ersten Lesen annehmen, dass P offen ist (etwa $P = \mathbb{R}$), sodass die relativen Zusätze „in P “ wegfallen.

Satz (*Umgebungsformulierung der Stetigkeit in einem Punkt*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p \in P$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist stetig im Punkt p .
- (b) Für jede Umgebung N von $f(p)$ ist $f^{-1}[N]$ eine Umgebung von p in P .
- (c) Für jede offene Umgebung U von $f(p)$ ist $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von p in P .
- (d) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $f^{-1}[U_\varepsilon(f(p))]$ eine Umgebung von p in P .

Beweis

(a) impliziert (b):

Sei also f stetig im Punkt p , und sei N eine Umgebung von $f(p)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(p)) \subseteq N$. Aufgrund der Stetigkeit von f in p gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft:

(+) Für alle $x \in P$ mit $|x - p| < \delta$ gilt $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Dies ist gleichbedeutend mit:

(++) Für alle $x \in U_\delta(p) \cap P$ gilt $f(x) \in U_\varepsilon(f(p))$.

Also gilt

$$U_\delta(p) \cap P \subseteq f^{-1}[U_\varepsilon(f(p))] \subseteq f^{-1}[N],$$

und damit ist $f^{-1}[N]$ eine Umgebung von p in P .

(b) impliziert (c), (c) impliziert (d):

Jede offene Umgebung von $f(p)$ ist eine Umgebung von $f(p)$ und jede ε -Umgebung von $f(p)$ ist eine offene Umgebung von $f(p)$.

(d) impliziert (a):

Wir zeigen die ε - δ -Stetigkeit von f im Punkt p . Sei also $\varepsilon > 0$, und sei

$$N = f^{-1}[U_\varepsilon(f(p))] = \{x \in P \mid |f(x) - f(p)| < \varepsilon\}.$$

Nach Voraussetzung ist N eine Umgebung von p in P . Also existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(p) \cap P \subseteq N$. Dann gilt:

Für alle $x \in U_\delta(p) \cap P$ gilt $f(x) \in U_\varepsilon(f(p))$.

Also gilt wie gewünscht:

— Für alle $x \in P$ mit $|x - p| < \delta$ ist $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Der Beweis besteht im Wesentlichen aus einer Übersetzung der ε - δ -Stetigkeit in die topologische Sprache. Dennoch ist das Ergebnis zumindest psychologisch neu. Die Formulierungen (b) und (c) reden, ganz ohne ε , nur über Umgebungen. Wir haben eine Erhaltungseigenschaft entdeckt, die man der ε - δ -Formulierung nicht unbedingt gleich ansieht. Sie ist keine Eigenschaft von f selbst, sondern eine Eigenschaft der durch f definierten Urbildoperation

$$f^{-1}[\cdot] : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(P).$$

Die Stetigkeit von f bedeutet, dass $f^{-1}[\cdot]$ den Umgebungsbegriff respektiert. Die Bedingung (c) besagt, dass es genügt, offene Umgebungen zu betrachten, und (d) besagt, dass es sogar genügt, die die offenen Mengen erzeugenden ε -Umgebungen zu betrachten.

Wir halten fest, dass die Bildoperation einer stetigen Funktion den Umgebungsbegriff im Allgemeinen nicht respektiert. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = x^2$ für alle x und

$$U = U_1(0) =]-1, 1[,$$

so ist U eine Umgebung der 0, aber $f[U] = [0, 1[$ ist keine Umgebung des Bildpunktes $f(0) = 0$.

Die Urbildformulierung der Stetigkeit in allen Punkten

Aus der eben gewonnenen punktweisen Erkenntnis erhalten wir eine besonders griffige Formulierung der Stetigkeit in allen Punkten:

Satz (*Urbildformulierung der Stetigkeit*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist stetig.
- (b) Für alle offenen U ist $f^{-1}[U]$ offen in P .

Beweis

(a) impliziert (b):

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Weiter sei $p \in f^{-1}[U]$. Dann ist U eine Umgebung von $f(p)$. Aufgrund der Stetigkeit von f im Punkt p ist also $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von p in P . Dies zeigt, dass die Menge $f^{-1}[U]$ eine Umgebung in P aller ihrer Punkte und damit offen in P ist.

(b) impliziert (a):

Sei $p \in P$. Weiter sei U eine offene Umgebung von $f(p)$. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}[U]$ offen in X und damit eine Umgebung von p in X . Nach der Umgebungsformulierung ist also f stetig im Punkt p .

Die Stetigkeit einer Funktion bedeutet also in Kurzfassung:

Die Urbilder offener Mengen sind offen.

Das „offen“ am Ende des Satzes ist dabei genauer als „offen relativ zum Definitionsbereich der Funktion“ zu verstehen. Anstelle offener Mengen kann man gleichwertig abgeschlossene Mengen betrachten, sodass man die Stetigkeit einer Funktion also auch durch

Die Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

zum Ausdruck bringen kann (Beweis als Übung). Auch hier kann „Urbild“ nicht durch „Bild“ ersetzt werden. Der Arkustangens liefert ein Beispiel: Er ist stetig, bildet aber die abgeschlossene Menge $[0, \infty[$ auf die Menge $[0, \pi/2[$ ab, die nicht abgeschlossen ist. Wir werden später jedoch zeigen, dass die Bilder abgeschlossener beschränkter Mengen unter einer stetigen Funktion wieder abgeschlossen und beschränkt sind.

Warnung

Der Urbild-Erhalt der Offenheit gilt im Allgemeinen nicht mehr lokal: Die Indikatorfunktion $1_{]-1,1]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist zum Beispiel stetig im Punkt 0, aber für die offene Menge $U =]1/2, 3/2[$ ist $f^{-1}[U] =]-1, 1[$ nicht offen. Ebenso ist $f^{-1}[\text{cl}(U)] =]-1, 1]$ nicht abgeschlossen.

Zur Illustration beweisen wir mit Hilfe der topologischen Charakterisierung zwei uns schon bekannte Sätze, nämlich den Satz über die Verknüpfung stetiger Funktionen und den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

Satz (*Verknüpfung stetiger Funktionen*)

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $h = g \circ f$ stetig.

Beweis

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, und seien $V = g^{-1}[U]$, $W = f^{-1}[V]$. Dann ist V aufgrund der Stetigkeit von g und weiter W aufgrund der Stetigkeit von f offen. Also
 — ist $h^{-1}[U] = f^{-1}[g^{-1}[U]] = W$ offen.

Der Leser beweise zur Übung eine Version dieses Satzes für stetige Funktionen $f : P \rightarrow \mathbb{R}, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f[P] \subseteq Q$. Hier werden die Relativbegriffe verwendet. Eine punktweise Version erhält man durch Betrachtung von Umgebungen.

In unserem zweiten Beispiel wird die Eleganz und Stärke der topologischen Argumentation besonders deutlich. Die Tatsache, dass \emptyset und \mathbb{R} die einzigen Mengen in \mathbb{R} sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, bildet das Herz des Arguments.

Satz (*Zwischenwertsatz für stetige Funktionen*)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und seien $a < b$. Dann nimmt f jeden Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis

Annahme, c liegt nicht im Wertebereich von f . Wir setzen:

$$U_1 =]-\infty, c[, \quad U_2 =]c, \infty[, \quad V_1 = f^{-1}[U_1], \quad V_2 = f^{-1}[U_2].$$

Aufgrund der Stetigkeit von f sind V_1 und V_2 offen. Weiter sind V_1 und V_2 disjunkt und nichtleer. Nach Annahme gilt $\mathbb{R} = V_1 \cup V_2$. Aber \mathbb{R} ist keine Vereinigung zweier disjunkter offener nichtleerer Mengen, da sonst beide
 — Mengen nichtleer und zugleich offen und abgeschlossen wären.

Den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ erhält man aus der Version des Satzes durch stetige Fortsetzung von f auf ganz \mathbb{R} (konstant gleich $f(a)$ auf $]-\infty, a[$ und konstant gleich $f(b)$ auf $]b, \infty[$). Alternativ kann man den Beweis auch für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe der Relativbegriffe führen. Die einzigen offenen und zugleich abgeschlossenen Mengen in $[a, b]$ sind \emptyset und $[a, b]$, und damit ist $[a, b]$ keine disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer Mengen, die offen in $[a, b]$ sind.

Unser Verständnis der Unmöglichkeit des stetigen Überspringens von Werten wird durch den neuen Beweis noch einmal vertieft: Eine stetige Funktion kann einen zusammenhängenden Definitionsbereich verformen, aber nicht zerreißen. Wir werden im nächsten Kapitel den Begriff des Zusammenhangs einer Punktmenge präzisieren und genauer untersuchen.

Stetigkeit als Erhalt von Nähe

Wir wollen schließlich noch eine weitere topologische Formulierung der Stetigkeit diskutieren, die der Anschauung des „Erhalts von Nähe“ besonders entgegenkommt. Eine Besonderheit dieser Formulierung ist zudem, dass sie Bilder und keine Urbilder verwendet und ohne Relativbegriffe auskommt. Zur Formulierung ist folgende Sprechweise nützlich:

Definition (*nabe bei*)

Seien $p \in \mathbb{R}$ und $P \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist p *nabe bei* P , falls $p \in \text{cl}(P)$.

Neben Elementen von P sind noch die Häufungspunkte und Randpunkte *nabe bei* P , da

$$\text{cl}(P) = P \cup P' = P \cup \text{bd}(P).$$

Weiter ist ein Punkt p genau dann *nabe bei* P , wenn es eine Folge in P gibt, die (in \mathbb{R}) gegen p konvergiert. Wir zeigen nun:

Satz (*Erhalt von Nähe unter stetigen Abbildungen*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p \in P$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist stetig im Punkt p .
- (b) Für alle $X \subseteq P$ gilt: Ist p *nabe bei* X , so ist $f(p)$ *nabe bei* $f[X]$.

Hier sind keine Relativbegriffe notwendig. Ist X nicht abgeschlossen, so ist $\text{cl}(X)$ im Allgemeinen keine Teilmenge von X . Jedoch ist „ $p \in \text{cl}(X)$ “ für alle $p \in P$ äquivalent zu „ $p \in \text{cl}(X) \cap P$ “.

Beweis

(a) *impliziert* (b):

Sei $X \subseteq P$ derart, dass p *nabe bei* X ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $\lim_n x_n = p$. Da f limesstetig im Punkt p ist, gilt $\lim_n f(x_n) = f(p)$. Wegen $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq f[X]$ ist also $f(p)$ *nabe bei* $f[X]$.

(b) *impliziert* (a):

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_n x_n = p$. *Annahme*, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(p)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft:

$$(+)\quad |f(y_n) - f(p)| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } n.$$

– Wegen $\lim_n y_n = p$ ist $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *nabe bei* p . Nach Voraussetzung ist dann aber $\{f(y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *nabe bei* $f(p)$, im *Widerspruch* zu (+).

So wie sich die topologische Umgebungsstetigkeit als Umformulierung der ε - δ -Stetigkeit ansehen ließ, so lässt sich der Erhalt der Nähe als Umformulierung der Limesstetigkeit ansehen. Wir geben aber noch einen zweiten Beweis, der die Limesstetigkeit nicht benutzt, sondern das Ergebnis mit Hilfe von Umgebungen rein topologisch gewinnt. Dabei verwenden wir, dass p genau dann nahe bei X ist, wenn $\mathbb{R} - X$ keine Umgebung von p ist.

Zweiter Beweis des Satzes

(a) impliziert (b):

Sei $X \subseteq P$. Wir zeigen die Implikation in (b) indirekt. Es gelte also $f(p) \notin \text{cl}(f[X])$. Dann ist $U = \mathbb{R} - \text{cl}(f[X])$ eine Umgebung von $f(p)$. Aufgrund der Stetigkeit von f in p ist also $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von p in P . Also gibt es ein offenes $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $p \in V$ und

$$f[V \cap P] \cap \text{cl}(f[X]) = \emptyset.$$

Insbesondere ist dann $V \cap X = \emptyset$ und damit $p \notin \text{cl}(X)$.

(b) impliziert (a):

Annahme, f ist nicht stetig in p . Dann gibt es eine Umgebung U von $f(p)$ derart, dass $f^{-1}[U]$ keine Umgebung von p in P ist. Dann ist p nahe bei $A = P - f^{-1}[U]$. Nach Voraussetzung ist also $f(p)$ nahe bei $f[A]$. Damit ist $\mathbb{R} - f[A]$ keine Umgebung von $f(p)$, im Widerspruch zu $U \subseteq \mathbb{R} - f[A]$.

Damit haben wir eine Vielzahl topologischer Begriffsbildungen und Ergebnisse anhand der vertrauten reellen Zahlen kennengelernt. Der Leser, der die Topologie von \mathbb{R} durchdacht hat, ist gut vorbereitet, diese Begriffe auf allgemeinere Räume zu übertragen. Diese Verallgemeinerung ist eines der Themen des folgenden Kapitels.

Ausblick: Stetigkeitsmengen

Wir beginnen mit einer Definition.

Definition (*Stetigkeitsmenge*)

Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$\text{cont}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig in } x\}$$

die Menge der Stetigkeitsstellen von f . Ein $P \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine *Stetigkeitsmenge*, falls es ein $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $P = \text{cont}(f)$.

Es gilt zum Beispiel

$$\text{cont}(f) = \mathbb{R} \quad \text{für alle stetigen } f,$$

$$\text{cont}(1_{\mathbb{Q}}) = \emptyset, \quad \text{cont}(1_{\{0\}}) = \mathbb{R} - \{0\},$$

$$\text{cont}(\text{id } 1_{\mathbb{Q}}) = \{0\}, \quad \text{cont}(\text{id } 1_{\mathbb{Q} \cap [0, \infty[}) =]-\infty, 0].$$

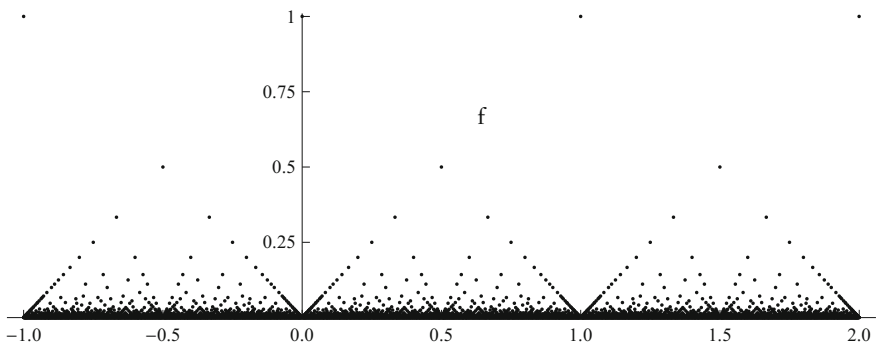
Wir fragen:

Welche topologische Komplexität haben die Stetigkeitsmengen?

Die Beispiele zeigen, dass offene und abgeschlossene Mengen und auch halboffene Intervalle als Stetigkeitsmengen auftreten. Komplexitätsstufen, die alle diese Mengen umfassen, sind die F_{σ} - und G_{δ} -Mengen (vgl. den Ausblick im letzten Kapitel). Umfassen diese Mengen die Stetigkeitsmengen? Und wenn ja: Sind alle F_{σ} - und G_{δ} -Mengen Stetigkeitsmengen? Zur Beantwortung dieser Fragen betrachten wir die G_{δ} -Menge $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen. Sie ist tatsächlich eine Stetigkeitsmenge:

Definition (*Thomae-Funktion*)

Die *Thomae-Funktion* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x) = 0$, falls $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, und $f(m/n) = 1/n$ für gekürzte Brüche $m/n \in \mathbb{Q}$ mit $n \geq 1$.



Die Stetigkeitsstellen der Thomae-Funktion sind genau die irrationalen Zahlen. Allgemein lässt sich in Anlehnung an die Definition der Thomae-Funktion für jede G_δ -Menge

$$P = \bigcap_n U_n, \quad U_n \text{ offen für alle } n,$$

eine Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konstruieren, die P als Stetigkeitsmenge besitzt. Wir diskutieren dies in den Übungen. Damit gilt:

Jede G_δ -Menge ist eine Stetigkeitsmenge.

Überraschenderweise gilt auch die Umkehrung: Jede Stetigkeitsmenge ist eine G_δ -Menge. Zum Beweis müssen wir für eine gegebene Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ offene Mengen U_n finden mit

$$\text{cont}(f) = \bigcap_n U_n.$$

Ein Blick auf die Umgebungsstetigkeit legt die Mengen

$$V_n = \{ p \in \mathbb{R} \mid \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(p) \mid |f(x) - f(p)| < 1/2^n \}$$

nahe. Es gilt

$$\text{cont}(f) = \bigcap_n V_n,$$

jedoch sind die Mengen V_n im Allgemeinen leider nicht offen. Für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(0) = 0, \quad f(q) = 1/2 \quad \text{für } q \in \mathbb{Q}^*, \quad f(x) = -1/2 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

gilt zum Beispiel $V_0 = \{0\}$, denn für $p = 0$ ist jedes $\delta > 0$ geeignet, während für jedes $p \neq 0$ in jeder δ -Umgebung von p Stellen x mit $|f(p) - f(x)| = 1$ liegen. Eine Variation der Definition der Mengen V_δ führt jedoch zum Ziel. Hierzu beobachten wir:

Satz (*kleine Bilder von Umgebungen*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $p \in P$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

Für alle $x, y \in U_\delta(p)$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Beweis

Sei $\delta > 0$ derart, dass $|f(x) - f(p)| < \varepsilon/2$ für alle $x \in U_\delta(p)$. Dann ist δ wie gewünscht, denn nach der Dreiecksungleichung gilt

$$- \quad |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(p)| + |f(p) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in U_\delta(p).$$

Damit können wir nun zeigen:

Satz (*Stetigkeitsmengen sind G_δ -Mengen*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $\text{cont}(f)$ eine G_δ -Menge.

Beweis

Für alle n sei

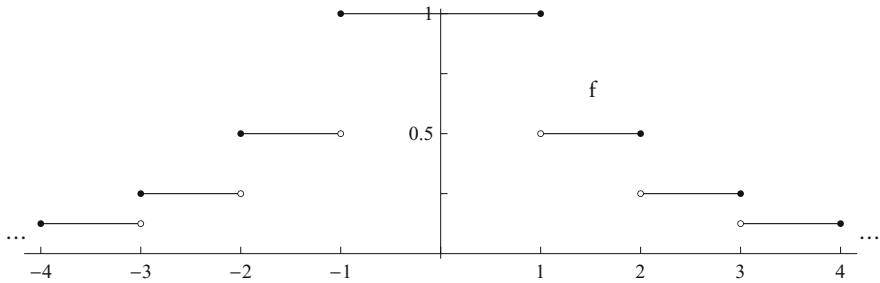
$$U_n = \{ p \in \mathbb{R} \mid \exists \delta > 0 \forall x, y \in U_\delta(p) \mid f(x) - f(y) < 1/2^n \}.$$

Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}$:

- (a) $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq \dots$
- (b) U_n ist offen für alle n .
- (c) f ist stetig in p genau dann, wenn $p \in U_n$ für alle n .

— Folglich ist $\text{cont}(f) = \bigcap_n U_n$ eine G_δ -Menge.

Das folgende Diagramm zeigt eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{cont}(f) = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^*$, für die die im Beweis betrachteten Mengen U_n leicht zu bestimmen sind.



$$U_0 = \mathbb{R}, \quad U_1 = \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \quad U_2 = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}, \quad \dots$$

Da \mathbb{Q} keine G_δ -Menge ist, gibt es nach dem Satz keine Funktion f auf \mathbb{R} , die in allen rationalen Punkten stetig, in allen irrationalen Punkten aber unstetig ist. Der Leser vergleiche dies mit der Thomae-Funktion.

Wir fassen zusammen:

Die G_δ -Mengen sind genau die Stetigkeitsmengen und die F_σ -Mengen genau die Unstetigkeitsmengen der reellen Funktionen.

Ein bemerkenswertes Resultat, das unser Verständnis des Stetigkeitsbegriffs in einer ganz neuartigen Weise erweitert!

Die Komplexitätsanalysen lassen sich noch fortsetzen. So sind zum Beispiel die Differenzierbarkeitsmengen $\text{diff}(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar in } x \}$ reeller Funktionen Durchschnitte von abzählbar vielen F_σ -Mengen. Man nennt derartige Mengen auch $F_{\sigma, \delta}$ -Mengen. Sie bilden eine echte Obermenge der F_σ - und G_δ -Mengen.

3. Metrische Räume

Die Abstandsfunktion $|x - y|$ auf \mathbb{R} hatten wir an vielen Stellen zur Definition von Grundbegriffen der Analysis verwendet. Konvergente Folgen, Cauchy-Folgen, die ε - δ -Stetigkeit, die offenen Grundmengen $U_\varepsilon(p)$ und weiter die offenen Teilmengen von \mathbb{R} ließen sich mit Hilfe des Abstands zweier reeller Zahlen definieren. In diesem Kapitel führen wir nun Abstandsfunktionen auf beliebigen Mengen ein. Wir gelangen so zu den metrischen Räumen und können unsere für die reellen Zahlen aufgebaute Begriffswelt zu Grenzwerten, Stetigkeit und topologischen Strukturen in allgemeiner Form ohne große Mühe neu errichten.

Abstände und Normen

Wie lässt sich der intuitive Begriff eines „Abstands“ oder einer „Metrik“ axiomatisch fassen? Ist X eine Menge, so soll ein „Abstand“ auf X eine Funktion d sein, die jedem Punktepaar $\{x, y\}$ aus X eine reelle Zahl a größergleich Null zuordnet, die dann der Abstand von x und y bzgl. d heißt. Sicher soll x von sich selbst den Abstand Null haben, und umgekehrt ist es wünschenswert, dass x und y nur dann den Abstand Null aufweisen, wenn $x = y$ gilt. Anstelle von ungeordneten Paaren $\{x, y\} = \{y, x\}$ können wir auch geordnete Paare $(x, y) \in X^2$ betrachten und dann fordern, dass unsere Abstandsfunktion für (x, y) und (y, x) das gleiche Ergebnis liefert. Es soll also die Symmetrie $d(x, y) = d(y, x)$ gelten, die nur ein Ausdruck dafür ist, dass wir lieber mit (x, y) als mit $\{x, y\}$ arbeiten. Wir halten also fest:

Ein „Abstand“ auf einer Menge X ist eine Funktion $d : X^2 \rightarrow [0, \infty[$, sodass für alle $x, y \in X$ unter anderem gilt:

$$d(x, y) = 0 \text{ genau dann, wenn } x = y,$$

$$d(x, y) = d(y, x).$$

Ein Blick auf die $\varepsilon/2$ -Argumentation, wie sie etwa im Beweis der Eindeutigkeit des Grenzwerts einer Folge auftaucht, zeigt, dass die Dreiecksungleichung eine bedeutende Struktureigenschaft des Abstands zweier reeller Zahlen ist. Wir werden auf sie auch in unserem allgemeinen Abstandsbegriff nicht verzichten wollen und fordern also, dass immer $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ gilt. Es ist bemerkenswert, dass wir mit diesen drei Bedingungen den Abstandsbegriff schon hinreichend scharf gefasst haben. Wir definieren:

Definition (*Abstand, Metrik, metrischer Raum*)

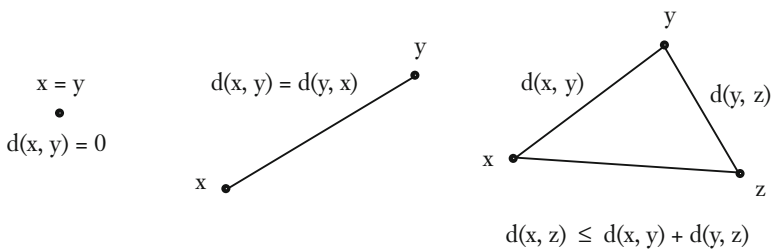
Sei X eine Menge, und sei $d : X^2 \rightarrow [0, \infty[$ eine Funktion. Dann heißt d eine *Metrik* oder ein *Abstand* auf X , falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$(a) \quad d(x, y) = 0 \text{ genau dann, wenn } x = y, \quad (\text{Nullbedingung})$$

$$(b) \quad d(x, y) = d(y, x), \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(c) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Das Paar (X, d) heißt dann ein *metrischer Raum*.



Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiel 1

Sei X eine Menge. Wir definieren für alle $x, y \in X$:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Dann ist d eine Metrik auf X , die sog. *diskrete Metrik* auf X .

Beispiel 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir setzen

$$d_1(x, y) = \min(1, d(x, y)) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Dann ist d_1 eine Metrik auf X . Kurz schreiben wir hierfür $d_1 = \min(1, d)$. Ebenso wird durch $d_2 = d/(1 + d)$, d.h.

$$d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{für alle } x, y \in X$$

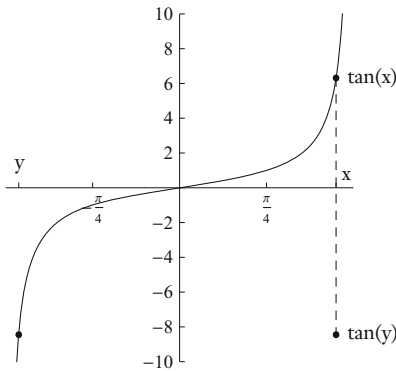
eine Metrik auf X erklärt. Beide Metriken haben lediglich Werte in $[0, 1]$.

Beispiel 3

Sei $X =]-\pi/2, \pi/2[$. Für alle $x, y \in X$ setzen wir

$$d(x, y) = |\tan(x) - \tan(y)|$$

Dann ist d eine Metrik auf dem beschränkten Intervall X , deren Wertebereich das unbeschränkte Intervall $[0, \infty[$ ist.



$$d(x, y) = |\tan(x) - \tan(y)|$$

Die Tangens-Metrik d
auf $] -\pi/2, \pi/2[$. Es gilt
 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} d(x, -x) = \infty$.

Beispiel 4

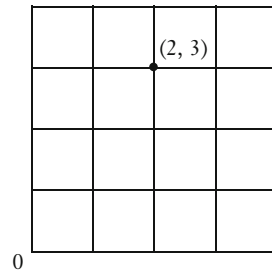
Sei $n \geq 1$. Für alle $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$d_{\text{euk}}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

$$d_{\text{max}}(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|),$$

$$d_{\sigma}(x, y) = \sum_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

Dann sind d_{euk} , d_{max} und d_{σ} Metriken auf $X = \mathbb{R}^n$. Sie heißen die *euklidische Metrik*, die *Maximummetrik* bzw. die *Summenmetrik* auf dem \mathbb{R}^n .



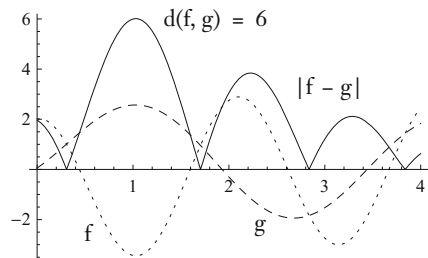
Für $x = (2, 3)$ ist $d_{\text{euk}}(0, x) = \sqrt{13}$,
 $d_{\text{max}}(0, x) = 3$ und $d_{\sigma}(0, x) = 5$.

Beispiel 5

Sei $V = \{f : P \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$,
 P beliebig. Für $f, g \in V$ sei

$$d(f, g) = \sup_{x \in P} |f(x) - g(x)|.$$

Dann ist d eine Metrik auf V ,
die sog. *Supremumsmetrik* oder
uniforme Metrik auf V . Analoges
gilt für beschränkte komplexe
Funktionen auf der Menge P .



Beispiel 6

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $Y \subseteq X$. Dann ist die Menge Y ,
versehen mit der Einschränkung von d auf Y^2 , ein metrischer Raum. Wir
bezeichnen diesen Raum kurz mit (Y, d) und nennen ihn einen *metrischen
Teilraum* von (X, d) . So ist etwa der Raum $(\mathcal{C}([a, b]), d)$ aller stetigen
Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ein metrischer Teilraum
des metrischen Raums (V, d) aus dem letzten Beispiel für $P = [a, b]$.

Produkte von metrischen Räumen

Eine wichtige allgemeine Konstruktionsmethode für metrische Räume ist die Produktbildung. Sind $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ metrische Räume, so können wir auf dem kartesischen Produkt $X = X_1 \times \dots \times X_n$ mit Hilfe von d_1, \dots, d_n verschiedene Metriken definieren, sog. Produktmetriken. Die folgende Definition stellt zwei Möglichkeiten vor.

Definition (*Metrisierung endlicher Produkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien (X_k, d_k) metrische Räume für $1 \leq k \leq n$. Weiter sei

$$X = X_1 \times \dots \times X_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in X_k \text{ für alle } 1 \leq k \leq n \}.$$

Dann setzen wir für alle $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in X$:

$$d_{\max}(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} d_k(x_k, y_k),$$

$$d_{\sigma}(x, y) = \sum_{1 \leq k \leq n} d_k(x_k, y_k).$$

Wir nennen d_{\max} die *Maximumsmetrik* und d_{σ} die *Summenmetrik* der Metriken d_1, \dots, d_n . Weiter schreiben wir

$$(X, d_{\max}) = \prod_{1 \leq k \leq n}^{\max} (X_k, d_k) \text{ bzw. } (X, d_{\sigma}) = \prod_{1 \leq k \leq n}^{\sigma} (X_k, d_k).$$

Man weist leicht nach, dass d_{\max} und d_{σ} Metriken auf X sind. Die Konstruktion liefert also metrische Räume (X, d_{\max}) und (X, d_{σ}) .

Beispiele

- (1) Die Metriken d_{\max} und d_{σ} aus Beispiel 4 sind die Maximums- bzw. Summenmetrik der Räume $(X_k, d_k) = (\mathbb{R}, d)$ für alle $1 \leq k \leq n$, mit der euklidischen Metrik d auf \mathbb{R} .
- (2) Sei X eine Menge, und sei d die diskrete Metrik auf X . Weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$:

$$d_{\max}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_k = y_k \text{ für alle } k, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$d_{\sigma}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = |\{k \mid x_k \neq y_k\}|.$$

Damit ist also d_{\max} die diskrete Metrik auf X^n , während die Metrik d_{σ} zählt, an wievielen Koordinaten sich zwei n -Tupel unterscheiden.

Im Ausblick zu diesem Kapitel werden wir auch unendliche Produkte von metrischen Räumen einführen. Hier wenden wir uns nun weiteren Konstruktionen zu, die Metriken aus geometrischen Strukturen gewinnen.

Abstände aus Normen

Viele metrische Räume entstehen aus Vektorräumen. Hierzu definieren wir:

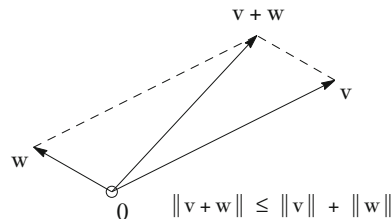
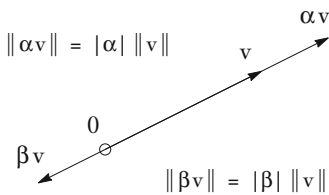
Definition (Norm)

Sei V ein K -Vektorraum mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Dann heißt eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty[$ eine *Norm* auf V und V ein *normierter Vektorraum*, falls für alle Vektoren $v, w \in V$ und alle Skalare $\alpha \in K$ gilt:

$$(a) \quad \|v\| = 0 \text{ impliziert } v = 0, \quad (\text{Nullbedingung})$$

$$(b) \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \quad (\text{Skalierung})$$

$$(c) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|. \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$



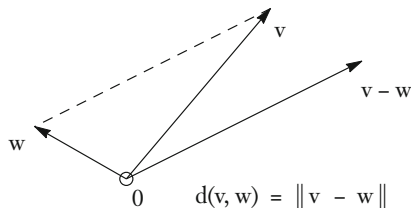
Wegen $\|0\| = \|0v\| = 0 \|v\| = 0$ gilt immer auch die Umkehrung in (a). Jede Norm auf einem Vektorraum V liefert eine Metrik auf V :

Definition (von einer Norm induzierte Metrik)

Sei V ein normierter Vektorraum, und sei $d : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $v, w \in V$ definiert durch

$$d(v, w) = \|v - w\|.$$

Dann heißt d die von der Norm *induzierte Metrik* auf V .



In der Tat ist d eine Metrik auf V . Speziell gilt

$$d(0, v) = \|v - 0\| = \|v\|,$$

sodass die Norm eines Vektors immer sein Abstand zum Nullvektor ist. Der Abstand bleibt unter Translationen erhalten, denn für alle $v, w, t \in V$ gilt

$$d(v + t, w + t) = \|v + t - w - t\| = \|v - w\| = d(v, w).$$

Die p-Normen

Zu den wichtigsten Normen gehören:

Definition (*p-Normen*)

Sei $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Dann setzen wir für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$:

$$\|x\|_1 = \sum_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad (\text{Summennorm, 1-Norm})$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{euklidische Norm, 2-Norm})$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|. \quad (\text{Maximumsnorm, } \infty\text{-Norm})$$

Weiter definieren wir für eine reelle Zahl $p \geq 1$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{1 \leq k \leq n} |x_k|^p \right)^{1/p}. \quad (p\text{-Norm})$$

Die wichtigsten Fälle sind, wie in der Definition hervorgehoben, $p = 1$, $p = 2$ und $p = \infty$, und der Leser kann sich auf diese Fälle konzentrieren. Es ist aber instruktiv, diese Normen unter einem allgemeinen Dach zu behandeln. Warum die Maximumsnorm mit dem Index ∞ versehen wird und als p -Norm gilt, klärt:

Bemerkung

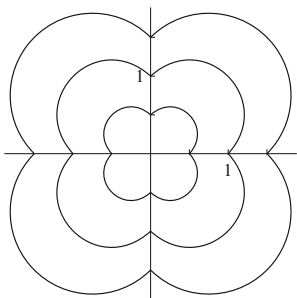
Für alle $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{C}^n$ gilt mit $s = \|x\|_\infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = s \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} |x_k/s|^p \right)^{1/p} = s \cdot 1 = \|x\|_\infty.$$

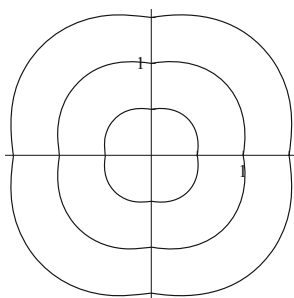
Denn es gilt $|x_k/s| \leq 1$ für alle k , sodass die Summe für alle p im Intervall $[1, n]$ liegt. Damit konvergiert die Summe hoch $1/p$ für $p \rightarrow \infty$ gegen 1.

Die folgenden Diagramme illustrieren die p -Normen für die sechs p -Werte 1, $3/2$, 2, 3, 10 und ∞ im \mathbb{R}^2 . Gezeigt sind die deformierten Kreise

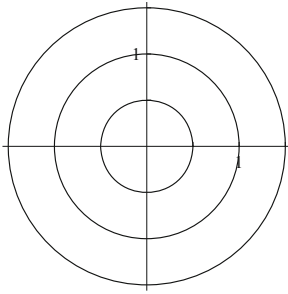
$$M_{p,r} = \{ \|(x, y)\|_p \mid \|(x, y)\|_2 = r \}, \text{ wobei } r = 1/2, 1, 3/2.$$



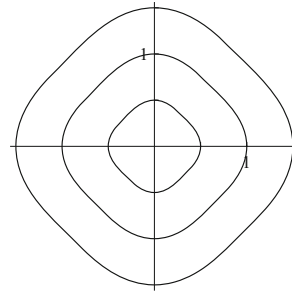
1-Norm



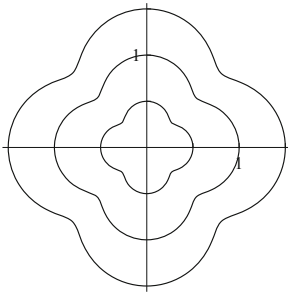
1,5-Norm



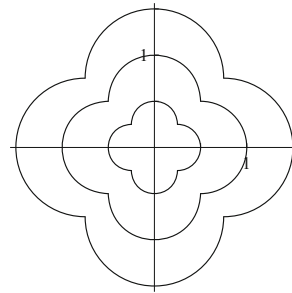
2-Norm



3-Norm



10-Norm


 ∞ -Norm

Dass die Abbildungen $\|\cdot\|_p$ für alle $p \geq 1$ tatsächlich Normen sind, ist keineswegs trivial. Für $p = 2$ wird zum Beweis der Dreiecksungleichung die Ungleichung von Cauchy-Schwarz verwendet,

$$|\langle z, w \rangle| = \left| \sum_{1 \leq k \leq n} \overline{z_k} w_k \right| \leq \|z\|_2 \|w\|_2 \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Für $p \geq 1$ brauchen wir die allgemeinere Hölder-Ungleichung:

Satz (Hölder-Ungleichung)

Für $n \geq 1$, $z, w \in \mathbb{C}^n$ und alle reellen $p, q \geq 1$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt

$$\sum_{1 \leq k \leq n} |z_k w_k| \leq \|z\|_p \|w\|_q.$$

Beweis

Es genügt, die Aussage für z, w mit $\|z\|_p = \|w\|_q = 1$ zu beweisen. Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel (vgl. 4.4 in Band 1 mit $\lambda_1 = 1/p$, $\lambda_2 = 1/q$, $x_1 = |z_k|^p$, $x_2 = |w_k|^q$) gilt:

$$|z_k| |w_k| \leq \frac{1}{p} |z_k|^p + \frac{1}{q} |w_k|^q \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n.$$

Also ist

$$\sum_{1 \leq k \leq n} |z_k w_k| \leq \frac{1}{p} \|z\|_p^p + \frac{1}{q} \|w\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die Fälle $p = 1$, $p = 2$ und $p = \infty$ führen zu uns bereits bekannten Metriken: Die 1-Norm induziert die Summenmetrik, die 2-Norm die euklidische Metrik und die ∞ -Norm die Maximumsmetrik auf dem \mathbb{R}^n bzw. auf dem \mathbb{C}^n .

Nützliche für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{C}^n$ gültige Abschätzungen sind:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\leq \sqrt{n} \|x\|_2 & \|x\|_1 &\leq n \|x\|_\infty \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 & \|x\|_2 &\leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 & \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \end{aligned}$$

Statt $\|x\|_2$ schreiben wir oft kurz $\|x\|$. Ist nichts Weiteres gesagt, so sind die Räume \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n mit der euklidischen Norm versehen.

Die p -Normen können wir nicht nur für die endlich-dimensionalen Vektorräume \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n , sondern auch für unendlich-dimensionale Funktionenräume einführen. Die Summe wird dabei durch ein Integral ersetzt.

Definition (L^p -Normen auf $\mathcal{C}([a, b])$)

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, und sei $V = \mathcal{C}([a, b])$ der Vektorraum der stetigen (reell- oder komplexwertigen) Funktionen auf $[a, b]$. Weiter sei $p \geq 1$. Dann setzen wir für alle $f \in V$:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (L^p\text{-Norm})$$

Weiter sei wieder

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\sup} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (L^\infty\text{-Norm, Supremumsnorm})$$

Der L^∞ -Norm sind wir bereits bei der Diskussion der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen begegnet (vgl. Kapitel 3.6 in Band 1). Sie induziert die Supremumsmetrik auf $\mathcal{C}([a, b])$.

Die L^2 -Norm darf als die kontinuierliche Version der euklidischen Metrik gelten, und sie spielt für Funktionenräume eine entsprechend wichtige Rolle.

Beispiel

Wir betrachten den reellen Vektorraum $V = \mathcal{C}([0, 1])$ und den Vektor $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Dann gilt

$$\|f\|_1 = 1/2, \quad \|f\|_2 = \sqrt{1/3}, \quad \|f\|_{\sup} = 1.$$

Normen aus Skalarprodukten

Viele reelle oder komplexe Vektorräume sind mit einem Skalarprodukt versehen und damit automatisch auch mit einer Norm:

Definition *(von einem Skalarprodukt induzierte Norm)*

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$ mit $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ das Skalarprodukt des Raumes. Dann heißt die Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \text{für alle } v \in V$$

die von dem Skalarprodukt auf V *induzierte Norm*.

Beispiele

(1) Das kanonische Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{1 \leq k \leq n} x_k y_k, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

auf dem \mathbb{R}^n induziert die euklidische Norm. Analoges gilt für das kanonische Skalarprodukt auf dem \mathbb{C}^n ,

$$\langle z, w \rangle = \sum_{1 \leq k \leq n} \overline{z_k} w_k, \quad z = (z_1, \dots, z_n), \quad w = (w_1, \dots, w_n).$$

(2) Das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

induziert die L^2 -Norm auf dem reellen Vektorraum $\mathcal{C}([a, b])$.

Mit dem Skalarprodukt des zweiten Beispiels werden wir uns bei der Untersuchung von Fourier-Reihen noch genauer beschäftigen.

Wir haben also die Abstufungen:

$$\text{Skalarprodukt} \hookrightarrow \text{Norm} \hookrightarrow \text{Metrik}.$$

Dagegen stammt nicht jede Metrik von einer Norm und auch nicht jede Norm von einem Skalarprodukt (vgl. die folgende Sektion). Wir werden später sehen, dass wir auf der rechten Seite auch noch

$$\text{Metrik} \hookrightarrow \text{Topologische Begriffsbildungen, Stetigkeit}$$

hinzufügen können. Auch hier wird gelten, dass nicht alle topologischen Kontexte von einer Metrik stammen.

Die Implikationen zeigen, dass ein mit einem Skalarprodukt versehener Vektorraum einen ausgezeichneten Rahmen für metrische und topologische Untersuchungen bildet. Die Analysis und die lineare Algebra geben sich hier die Hand.

Parallelogrammgleichung und Polarisation

Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen Skalarprodukten und Normen genauer. Als erstes zeigen wir:

Satz (*binomische Formeln, Polarisationsformel, Rekonstruktion aus der Norm*)

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, und sei $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm. Dann gelten für alle $v, w \in V$ im Fall $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$:

Binomische Formeln für \mathbb{R} bzw. \mathbb{C}

$$\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 \pm 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \quad \text{bzw.}$$

$$\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2.$$

Polarisationsformel für \mathbb{R} bzw. \mathbb{C}

$$4\langle v, w \rangle = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \quad \text{bzw.}$$

$$4\langle v, w \rangle = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|iv + w\|^2 - i\|iv - w\|^2.$$

Insbesondere sind Skalarprodukte, die dieselbe Norm induzieren, gleich.

Beweis

Es genügt, den allgemeineren unitären Fall $K = \mathbb{C}$ zu betrachten. Nach den Eigenschaften eines Skalarprodukts gilt für alle $v, w \in V$:

$$\|v \pm w\|^2 = \langle v \pm w, v \pm w \rangle = \langle v, v \rangle \pm \langle v, w \rangle \pm \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle =$$

$$\|v\|^2 \pm \langle v, w \rangle \pm \overline{\langle v, w \rangle} + \|w\|^2 = \|v\|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2.$$

Mit Hilfe der binomischen Formeln erhalten wir

$$(+)\quad 4\operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2.$$

Die Formel (+) und die Darstellung

$$\langle v, w \rangle = \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) + i\operatorname{Im}(\langle v, w \rangle) = \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) + i\operatorname{Re}(\langle iv, w \rangle).$$

liefert die Polarisationsformel für \mathbb{C} . Sie zeigt, dass sich das Skalarprodukt aus der induzierten Norm rekonstruieren lässt. Hieraus ergibt sich der

– **Zusatz.**

Als dritte binomische Formel erhalten wir für $K = \mathbb{C}$

$$\langle v + w, v - w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, -w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, -w \rangle =$$

$$\|v\|^2 - \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} - \|w\|^2 = \|v\|^2 - 2i\operatorname{Im}(\langle v, w \rangle) - \|w\|^2.$$

Für $K = \mathbb{R}$ reduziert sich die rechte Seite zu $\|v\|^2 - \|w\|^2$.

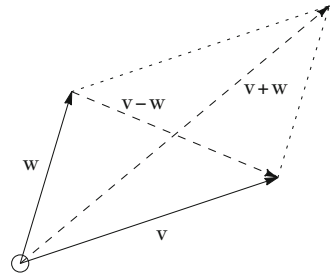
Durch den Satz erhebt sich die Frage, ob die Polarisationsformel ein Skalarprodukt nicht nur rekonstruieren, sondern sogar definieren kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn eine gegebene Norm folgende Eigenschaft erfüllt:

Definition (*Parallelogrammgleichung*)

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf V erfüllt die *Parallelogrammgleichung*, falls für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Der Name der Identität ist durch die euklidische Ebene motiviert, vgl. das Diagramm rechts. Es gilt nun:



Satz (*Skalarprodukt = Norm + Parallelogrammgleichung*)

Sei V ein K -Vektorraum mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Dann gilt:

- (a) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$ ein Skalarprodukt auf V , so erfüllt die induzierte Norm die Parallelogrammgleichung.
- (b) Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V , die die Parallelogrammgleichung erfüllt, so wird durch die Polarisationsformel ein Skalarprodukt auf V definiert. Die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm ist $\|\cdot\|$.

Beweis (*Skizze*)

zu (a): Folgt durch Addition aus den beiden binomischen Formeln

$$\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2.$$

zu (b): Wir nehmen $K = \mathbb{C}$ an. Wird $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit Hilfe der Polarisationsformel definiert, so gilt für alle $v, w \in V$:

- (i) $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$ und damit $\langle v, v \rangle > 0$ für $v \neq 0$,
- (ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$,
- (iii) $\langle iv, w \rangle = -i \langle v, w \rangle$.

Mit Hilfe der Parallelogrammgleichung weist man nun nach, dass $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$. Nun zeigt man $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ schrittweise für Skalare λ in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. (Der letzte Schritt folgt aus der Stetigkeit der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\lambda) = \langle \lambda v, w \rangle$, $g(\lambda) = \lambda \langle v, w \rangle$). Zusammen mit (i) bis (iii) sind dann alle Axiome eines Skalarprodukts gezeigt. Aus (i) ergibt sich der Zusatz.

Es ist bemerkenswert, dass sich Skalarprodukte durch Normen, die mit der Parallelogrammgleichung ein „viertes Axiom“ erfüllen, charakterisieren lassen. Ein Beweis oder eine Widerlegung dieses Axioms bringt ans Licht, ob eine Norm von einem Skalarprodukt abstammt oder nicht. Unter den p -Normen erfüllt zum Beispiel nur die 2-Norm die Parallelogrammgleichung.

Normen für Matrizen

Matrizen liefern weitere wichtige Beispiele für Normen. Sie kommen insbesondere in der mehrdimensionalen Differentiation zum Einsatz.

Definition (*Matrixnormen*)

Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $m, n \geq 1$, und sei $\mathbb{K}^{m \times n}$ der \mathbb{K} -Vektorraum aller reellen bzw. komplexen $(m \times n)$ -Matrizen. Weiter seien $p, q \in [1, \infty]$.

Dann setzen wir für alle $A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{K}^{m \times n}$:

$$\|A\|_{p,q} = \sup \{ \|Ax\|_q \mid x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_p \leq 1 \}, \quad (p\text{-}q\text{-Matrixnorm})$$

$$\|A\| = \|A\|_{2,2}, \quad (\text{Spektralnorm})$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|^2}. \quad (\text{Frobenius-Norm})$$

Wir werden in 2.6 sehen, dass das Supremum der Definition ein Maximum ist.

Die Matrix-Normen $\|\cdot\|_{p,q}$ normieren auch die Vektorräume $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ aller linearen Abbildungen $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$: Die Norm von $f \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ wird als die Norm der f darstellenden Matrix bzgl. der kanonischen Basen definiert.

Der Leser beachte, dass die Frobenius-Norm die euklidische Norm von A ist, wenn wir A als Vektor der Länge $m \cdot n$ mit den Komponenten a_{ij} lesen.

Satz (*Eigenschaften der Matrix-Normen*)

Für alle $p, q, r \in [1, \infty]$ gilt:

$$(c) \quad \|A\|_{p,q} = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_q = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p},$$

$$(d) \quad \|Ax\|_q \leq \|A\|_{p,q} \|x\|_p,$$

$$(e) \quad \|AB\|_{p,q} \leq \|A\|_{r,q} \|B\|_{p,r}, \quad A (m \times d)\text{-Matrix}, B (d \times n)\text{-Matrix},$$

$$(f) \quad \|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|, \quad (\text{Maximumsnorm})$$

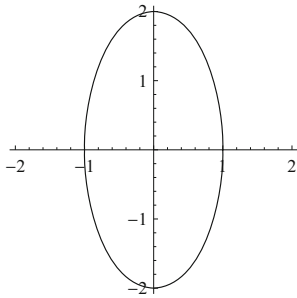
$$(g) \quad \|A\|_{1,1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq m} |a_{ij}|, \quad (\text{Spaltensummennorm})$$

$$(h) \quad \|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|. \quad (\text{Zeilensummennorm})$$

Beispiel

Wir betrachten $n = m = 2$ und die Drehmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist $Ax \in \mathbb{R}^2$ der um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn gedrehte Vektor x . Es gilt

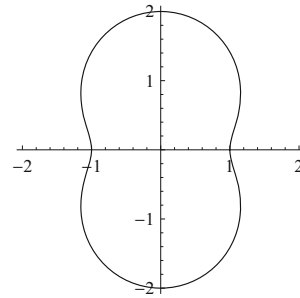
$$\|A\| = \|A\|_{2,2} = 1, \quad \|A\|_{1,\infty} = \max(|\sin(\varphi)|, |\cos(\varphi)|), \quad \|A\|_F = \sqrt{2}.$$



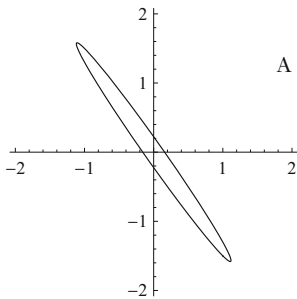
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|A\| = 2$$

$$\{A(x, y) \mid \|(x, y)\| = 1\}$$

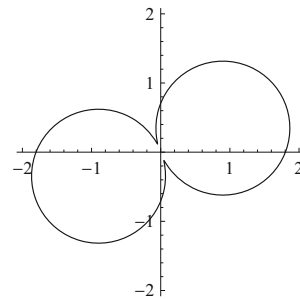


$$\{\|A(x, y)\| \mid \|(x, y)\| = 1\}$$



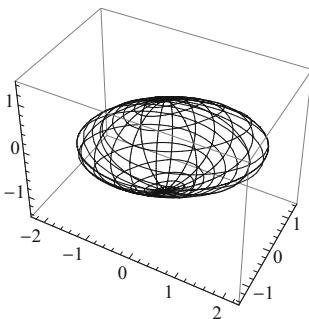
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\|A\| = 1,93\dots$$

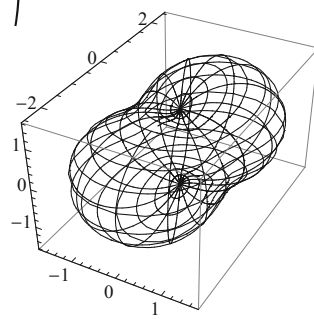


Die Diagramme visualisieren die Spektralnorm $\|A\| = \|A\|_{2,2}$ für zwei (2×2) -Matrizen. Links sind die Bilder des Einheitskreises unter der A zugeordneten linearen Abbildung dargestellt, rechts die mit $\|A(x, y)\|$ skalierten Einheitsvektoren (x, y) . Die Spektralnorm ist in allen Diagrammen der Radius der kleinsten Kreises mit Mittelpunkt 0, der die Figur umschließt. Analoges gilt für das folgende dreidimensionale Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\|A\| = 2,53\dots$$



$$\{A(x, y, z) \mid \|(x, y, z)\| = 1\}$$

$$\{\|A(x, y, z)\| \mid \|(x, y, z)\| = 1\}$$

Erweiterung des Messens

In metrischen Räumen können Durchmesser und Abstand auch für Mengen erklärt werden:

Definition (*Durchmesser, beschränkt*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $A \subseteq X$ nichtleer. Dann heißt

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) \leq \infty$$

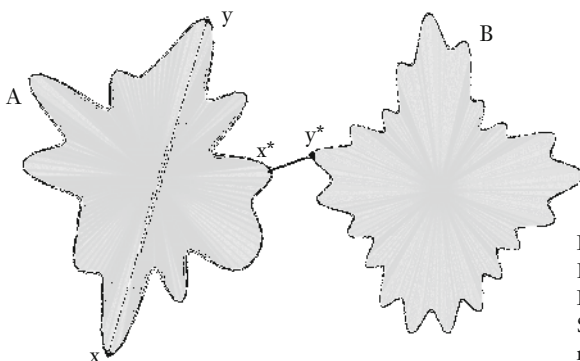
der *Durchmesser* von A in (X, d) . A heißt *beschränkt*, falls $\text{diam}(A) < \infty$.

Definition (*Abstand zwischen Mengen*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann setzen wir für alle $x \in X$ und nichtleeren $A, B \subseteq X$:

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y), \quad d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

$d(x, A)$ heißt der *Abstand des Punktes* x von der Menge A und $d(A, B)$ der *Abstand der Mengen* A und B in (X, d) .



$$\text{diam}(A) = d(x, y)$$

$$d(A, B) = d(x^*, y^*)$$

Im Diagramm gehören die Ränder zu den Mengen. Im Allgemeinen werden Supremum und Infimum nicht angenommen.

Ist X ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $U = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \alpha\}$ für eine reelle Zahl $\alpha > 0$, so gilt

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < 2\alpha \quad \text{für alle } x, y \in U.$$

Damit ist also $\text{diam}(U) \leq 2\alpha$. Ist d die diskrete Metrik auf X , so gilt $\text{diam}(U) \leq 1$, sodass $\text{diam}(U) < 2\alpha$ möglich ist. Ist dagegen X ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum mit $X \neq \{0\}$ und d die von der Norm induzierte Metrik, so gilt $\text{diam}(U) = 2\alpha$. Denn für alle $0 \leq \beta < \alpha$ gibt es ein $v \in X$ mit $\|v\| = \beta$, etwa $v = \beta w / \|w\|$ für ein $w \neq 0$. Dann sind die Vektoren $x_0 + v$ und $x_0 - v$ Elemente von U , und es gilt

$$d(x_0 + v, x_0 - v) = \|x_0 + v - (x_0 - v)\| = \|2v\| = 2\|v\| = 2\beta.$$

Semimetriken und Seminormen

Zuweilen tauchen Funktionen auf, die symmetrisch sind und die Dreiecksungleichung erfüllen, nicht aber die Nullbedingung. Ein triviales Beispiel ist die Nullfunktion mit $d(x, y) = 0$ für alle x, y . Interessanter ist die „Höhendifferenz“

$$d(x, y) = d((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = |x_3 - y_3|$$

zweier Punkte $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ im \mathbb{R}^3 . Hier haben je zwei Punkte den „Abstand“ Null, die den gleichen Höhenanteil besitzen. Es gilt zum Beispiel $d((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = 0$, obwohl $(1, 0, 0) \neq (0, 1, 0)$. Auch Varianten im \mathbb{R}^n , die nur einen Teil der n Koordinaten berücksichtigen, haben diese Struktur, etwa

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_3 - y_3| \quad \text{für alle } x = (x_1, \dots, x_4), y = (y_1, \dots, y_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Diese Überlegungen motivieren:

Definition (*Semimetrik oder Pseudometrik*)

Sei X eine Menge, und sei $d : X^2 \rightarrow [0, \infty[$ eine Funktion. Dann heißt d eine *Semimetrik* oder *Pseudometrik* auf X und (X, d) ein *semimetrischer* oder *pseudometrischer Raum*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- (a) $d(x, x) = 0$, (schwache Nullbedingung)
- (b) $d(x, y) = d(y, x)$, (Symmetrie)
- (c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Dreiecksungleichung)

Analog wird der Begriff der *Seminorm* auf einem Vektorraum erklärt: Die Bedingung (a) der Normdefinition wird fallengelassen, die Bedingungen (b) und (c) werden unverändert übernommen. Erneut gilt, dass jede Seminorm auf einem Vektorraum V eine Semimetrik induziert. Wir setzen hierzu wieder

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Ebenso kann man Skalarprodukte liberalisieren: Verzichtet man auf die Eigenschaft „ $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \neq 0$ “ (unter Beibehaltung von „ $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle v “), so induziert ein solches „Semi-Skalarprodukt“ eine Seminorm auf dem betrachteten Vektorraum. Ein wichtiges Beispiel werden wir bei der Untersuchung der Fourier-Reihen in Abschnitt 4 kennenlernen.

Jede Semimetrik d auf X führt zu einer echten Metrik d' auf dem Faktorraum X/\sim , wobei \sim und d' definiert werden durch

$$x \sim y \quad \text{falls} \quad d(x, y) = 0,$$

$$d'(x/\sim, y/\sim) = d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Die Funktion d' ist wohldefiniert und eine Metrik auf X/\sim .

Konvergenz und Vollständigkeit in metrischen Räumen

Unser Konvergenzbegriff für Folgen in \mathbb{R} überträgt sich problemlos auf metrische Räume. Wir müssen lediglich $|x - y|$ durch $d(x, y)$ ersetzen.

Definition (Grenzwert einer Folge)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Dann heißt ein $x \in X$ ein *Limes* oder *Grenzwert* von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 d(x, x_n) < \varepsilon.$$

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent* in (X, d) , falls ein Grenzwert der Folge existiert. Andernfalls heißt sie *divergent* in (X, d) .

Aus der Dreiecksungleichung folgt wieder, dass ein Grenzwert einer Folge im Fall der Existenz eindeutig bestimmt ist. Wir schreiben wie gewohnt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_n x_n.$$

Genauer kann man $\lim_n^d x_n = x$ schreiben, um die verwendete Metrik zu betonen.

Aus der Definition ergibt sich folgende Äquivalenz:

$$\lim_n x_n = x \text{ genau dann, wenn } \lim_n d(x_n, x) = 0.$$

Auf der rechten Seite wird der Grenzwertbegriff für \mathbb{R} verwendet (für die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, \infty[$ mit $y_n = d(x_n, x)$ für alle n). Der metrische Konvergenzbegriff kann also auf den reellen Konvergenzbegriff zurückgeführt werden.

Die Verdichtungseigenschaft einer reellen Cauchy-Folge und und die metrische Vollständigkeit von \mathbb{R} lassen sich ebenfalls verallgemeinern:

Definition (Cauchy-Folge)

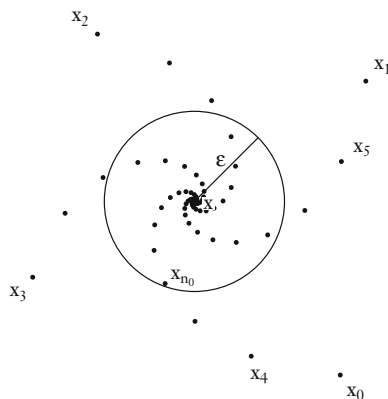
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt eine *Cauchy-Folge* in (X, d) , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definition (metrische Vollständigkeit)

Ein metrischer Raum (X, d) heißt (*metrisch*) *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert.

Wir betrachten einige Beispiele.



Der Grenzwert s einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Für jedes $\varepsilon > 0$ haben höchstens endlich viele x_n einen Abstand größergleich ε von x .

Beispiel 1

Sei $n \geq 1$. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^n konvergiert unter d_{euk} genau dann gegen ein x , wenn für alle $1 \leq i \leq n$ die Folge der i -ten Koordinaten der x_k gegen die i -te Koordinate von x in \mathbb{R} konvergiert. Gleiches gilt für d_{max} und d_σ . \mathbb{R}^n ist unter den Metriken d_{euk} , d_{max} , d_σ vollständig.

Beispiel 2

Für die euklidische Metrik gilt: Der Teilraum \mathbb{Q} von \mathbb{R} ist unvollständig, der Teilraum $[0, 1]$ ist vollständig. Allgemein ist für alle $n \geq 1$ eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann vollständig, wenn P abgeschlossen ist.

Beispiel 3

Sei $X =]-\pi/2, \pi/2[$. Dann ist X unter der euklidischen Metrik unvollständig. Dagegen ist X unter der Tangensmetrik

$$d(x, y) = |\tan(x) - \tan(y)| \quad \text{für alle } x, y \in X$$

vollständig. Folgen in X , die in \mathbb{R} gegen $-\pi/2$ oder $\pi/2$ konvergieren, sind in X unter der Tangensmetrik keine Cauchy-Folgen mehr. Jedoch konvergiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (X, d) genau dann gegen ein $x \in X$, wenn die Folge unter der euklidischen Metrik gegen x konvergiert. Die Vollständigkeit eines metrischen Raums kann also, bei Übereinstimmung des erzeugten Konvergenz- und Grenzwertbegriffs, von der Metrik abhängen.

Beispiel 4

Der Vektorraum $V = \mathcal{C}([0, 1])$ mit der von der Supremumsnorm induzierten Metrik d ist vollständig, und die Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die gleichmäßige Konvergenz. Ist nämlich $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (V, d) , so ist die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $x \in [0, 1]$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} (unter der euklidischen Metrik), und damit konvergiert die Folge punktweise gegen ein $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt nun

$$d(f_n, f_m) = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0,$$

so gilt für alle $x \in [0, 1]$ und alle $n \geq n_0$:

$$|f(x) - f_n(x)| = |\lim_m f_m(x) - f_n(x)| = \lim_m |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

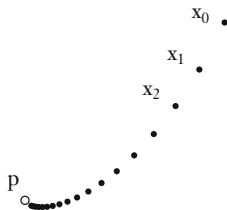
Also ist die Konvergenz gleichmäßig und damit ist f stetig.

Beispiel 5

Die Produktmetriken d_{max} und d_σ auf $X = X_1 \times \dots \times X_n$ sind im Allgemeinen verschieden, aber sie besitzen dieselben konvergenten Folgen und Grenzwerte: Für alle $x \in X$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gilt $x = \lim_n x_n$ unter d_{max} genau dann, wenn $x = \lim_n x_n$ unter d_σ . Die Konvergenz ist wie für den Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$ die koordinatenweise Konvergenz (bzgl. d_k in X_k). Sind alle (X_k, d_k) vollständig, so sind auch (X, d_{max}) und (X, d_σ) vollständig.

Die Vervollständigung eines metrischen Raumes

Jeder metrische Raum lässt sich zu einem vollständigen metrischen Raum erweitern. Die Idee ist, jeder divergenten Cauchy-Folge einen Punkt zuzuordnen, der im vergrößerten Raum der Grenzwert der Folge sein wird. Anschaulich flicken wir also den Raum, indem wir seine Löcher stopfen und seinen Rand säumen. Um keine Namen für die neuen Punkte erfinden zu müssen, verwenden wir die Folgen selbst als Punkte – ein gewöhnungsbedürftiges, aber korrektes und logisches Vorgehen. Da es verschiedene Cauchy-Folgen gibt, die auf das gleiche Loch oder den gleichen fehlenden Randpunkt zulaufen, ist zudem die Bildung von Äquivalenzklassen nötig. Die Konstruktion wirkt dadurch technisch, die Grundidee bleibt einfach.



Ein divergente Cauchy-Folge in (X, d) . Um das „Loch“ des Raumes zu füllen, fügen wir zu X einen Punkt p hinzu, der zum Grenzwert dieser Folge wird.

Sei also (X, d) ein beliebiger metrischer Raum. Wir setzen

$$F = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge in } (X, d) \}.$$

In F nehmen wir auch die bereits konvergenten Cauchy-Folgen mit auf, wodurch die Konstruktion einfacher zu notieren wird. Wir definieren nun eine Äquivalenzrelation \sim auf F durch

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ falls } \lim_n x_n - y_n = 0 \text{ in } (X, d).$$

Weiter definieren wir:

$$X^* = F/\sim = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}/\sim \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F \},$$

$$d^*((x_n)_{n \in \mathbb{N}}/\sim, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}/\sim) = \lim_n d(x_n, y_n) \quad \text{für alle } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F.$$

Die Funktion d^* ist wohldefiniert und eine Metrik auf X^* . Identifizieren wir die Äquivalenzklasse einer konstanten Folge $(x)_{n \in \mathbb{N}}/\sim$ mit dem Punkt $x \in X$, so können wir $X \subseteq X^*$ annehmen. Die Metrik respektiert diese Identifikation, da

$$d^*((x)_{n \in \mathbb{N}}/\sim, (y)_{n \in \mathbb{N}}/\sim) = d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Der Raum (X, d) wird so zu einem dichten Teilraum von (X^*, d^*) , und es gilt

$$(+)\quad \lim_n x_n = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}/\sim \quad \text{in } (X^*, d^*) \quad \text{für alle } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F.$$

Allgemeiner konvergiert jede Cauchy-Folge in X^* , sodass uns die Bildung von X^{**} , X^{***} usw. erspart bleibt:

Satz (*Vollständigkeit von X^**)
 (X^*, d^*) ist vollständig.

Beweis (*Skizze*)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X^*, d^*) , und sei $f_n = (x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}} / \sim$ für alle n .

Durch Teilfolgenbildung können wir annehmen, dass $d(x_{n,k}, x_{n,k'}) \leq 1/2^n$ für

— alle n, k, k' . Wir setzen $y_k = x_{k,k}$ für alle k . Dann gilt $\lim_n f_n = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} / \sim$.

Alternativ kann man argumentieren, dass X dicht in X^* ist und dass nach (+) Cauchy-Folgen mit Gliedern in X im Raum (X^*, d^*) konvergieren, was für die Vollständigkeit von (X^*, d^*) genügt.

Das Ergebnis rechtfertigt:

Definition (*Vervollständigung eines metrischen Raumes*)

Der metrische Raum (X^*, d^*) heißt die *Vervollständigung* von (X, d) .

Beispiel

Sei $X =]0, 1[$, versehen mit der euklidischen Metrik d . Dann hat die Vervollständigung (X^*, d^*) von (X, d) genau einen neuen Punkt, nämlich

$$p = (1/2^n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim = (1/(n+1))_{n \in \mathbb{N}} / \sim = \dots$$

Ersetzen wir p durch 0 , so erhalten wir $[0, 1]$ mit der euklidischen Metrik.

Analog liefert die Vervollständigung von $]0, 1[$ nach Punktaustausch das Intervall $[0, 1]$ und die von $]0, 2[- \{1\}$ das Intervall $[0, 2]$. Die Vervollständigung von \mathbb{Q} liefert ganz \mathbb{R} . Dieser Spezialfall verdient eine eigene Beachtung:

Die reellen Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen.

Bilden wir \mathbb{Q}^* unter der euklidischen Metrik auf \mathbb{Q} , so wird für jede irrationale Zahl ein neuer Punkt zu \mathbb{Q} hinzugefügt und wir erhalten einen zu \mathbb{R} unter der euklidischen Metrik isomorphen metrischen Raum. In einem Aufbau des Zahlensystems definiert man nicht selten sogar \mathbb{R} als \mathbb{Q}^* . Hierbei ist aber etwas Vorsicht geboten, da \mathbb{R} (und damit der Begriff eines metrischen Raumes) ja noch nicht zur Verfügung steht. Die Begriffe „Cauchy-Folge in \mathbb{Q} “ und „Nullfolge in \mathbb{Q} “ lassen sich aber ohne Bezug auf \mathbb{R} definieren, indem der Quantor $\forall \varepsilon > 0$ in den Definitionen dieser Begriffe auf positive rationale Zahlen beschränkt wird. Man kann dann obige Konstruktion von \mathbb{Q}^* durchführen und $\mathbb{R} = \mathbb{Q}^*$ setzen, wobei die Metrik d^* auf \mathbb{Q}^* nun definiert wird durch

$$d^*((x_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim) = (|x_n - y_n|)_{n \in \mathbb{N}} / \sim \in \mathbb{R} = \mathbb{Q}^*.$$

Dass sich die Punkte eines „geometrisch-realen“ Kontinuums durch rationale Cauchy-Folgen beschreiben lassen (Beschränkung) und umgekehrt diesen Folgen auch Punkte entsprechen (Reichhaltigkeit) hat Cantor im Jahr 1872 vertreten. Aus dem gleichen Jahr stammt die äquivalente Modellierung eines Kontinuums durch Dedekind (vgl. 1.4 in Band 1).

Stetigkeit in metrischen Räumen

Die Limes- und die ε - δ -Stetigkeit einer Funktion lassen sich für metrische Räume (X, d) und Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ohne Modifikation übernehmen. Allgemeiner können wir diese Begriffe für Funktionen erklären, die zwischen metrischen Räumen vermitteln:

Definition (*Limesstetigkeit*)

Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, und sei $f: X \rightarrow Y$. Weiter sei $p \in X$. Dann heißt f *stetig* oder *limesstetig* im Punkt p , falls für alle gegen p konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gilt:

$$f(p) = \lim_n f(x_n).$$

f heißt *stetig* oder *limesstetig*, falls f stetig in allen $p \in X$ ist.

Die Stetigkeit von $f: X \rightarrow Y$ bedeutet also wie bisher, dass wir Limesbildung und Funktionsauswertung vertauschen dürfen:

$$f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) \quad \text{für alle konvergenten Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } X.$$

Auf der linken Seite wird die Metrik d von X zur Bestimmung des Limes verwendet, auf der rechten Seite dagegen die Metrik e von Y . Um die Notation einfach zu halten, unterdrückt man oft die Angabe der Metriken, sobald sie aus dem Kontext heraus klar sind. Umgekehrt kann man eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d) und (Y, e) zur Verdeutlichung auch in der Form

$$f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$$

notieren. Speziell klärt die Notation $f: (X, d) \rightarrow (X, e)$ die Verhältnisse, wenn zwei Metriken d und e auf derselben Menge X betrachtet werden.

Auch die Umgebungsstetigkeit lässt sich allgemein definieren:

Definition (*Umgebungs- oder ε - δ -Stetigkeit*)

Sei $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$, und sei $p \in X$. Dann heißt f *umgebungs-* oder *ε - δ -stetig* im Punkt p , falls gilt:

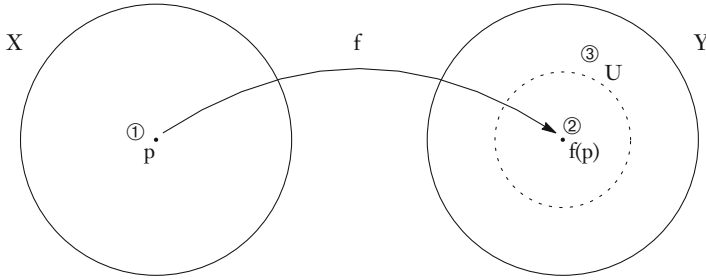
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (d(x, p) < \delta \rightarrow e(f(x), f(p)) < \varepsilon).$$

Wie früher zeigt man:

Satz (*Äquivalenz der Limes- und der ε - δ -Stetigkeit*)

Sei $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$, und sei $p \in X$. Dann ist f genau dann limesstetig im Punkt p , wenn f umgebungsstetig im Punkt p ist.

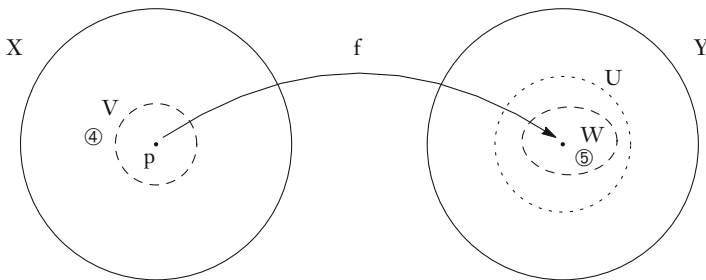
Die folgenden Diagramme visualisieren den typischen Verlauf eines Beweises der ε - δ -Stetigkeit in einem Punkt und die damit verbundenen Vorstellungen.



Gegeben ist ein Punkt p in X (①). Wir betrachten nun den Bildpunkt $f(p) \in Y$ (②) sowie, für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$, die Menge

$$U = \{ y \in Y \mid e(y, f(p)) < \varepsilon \} \quad (③).$$

Bis hierhin war nichts zu tun. Das eigentliche Argument kommt erst jetzt:



Wir definieren mit Blick auf ε und f ein (hoffentlich geeignetes) $\delta > 0$ und betrachten

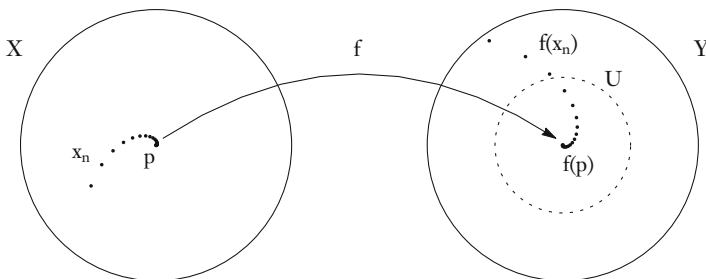
$$V = \{ x \in X \mid d(x, p) < \delta \} \quad (④).$$

Die Menge V transportieren wir mit f nach Y , d. h., wir betrachten ihr Bild

$$W = f[V] = \{ f(x) \in Y \mid x \in V \} \quad (⑤).$$

Wir zeigen nun, dass $W \subseteq U$. Hierzu ist für jedes $y \in W$ zu beweisen, dass $e(y, f(p)) < \varepsilon$. Gelingt dies, sind wir fertig. Andernfalls müssen wir δ verkleinern.

Bei der Limesstetigkeit wird eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ und ein $U \subseteq Y$ wie eben betrachtet. Nun ist zu zeigen, dass fast alle Glieder der Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in U liegen. Hierzu ist ein n_0 zu definieren und für alle $n \geq n_0$ zu zeigen, dass $e(f(x_n), f(p)) < \varepsilon$.



Die Stetigkeit lässt sich mit Hilfe metrischer Begriffe in vielen Varianten formulieren. So gilt zum Beispiel die folgende Charakterisierung:

Satz (*Durchmesser der Bilder*)

Seien $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ und $p \in X$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist stetig im Punkt p .
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ diam } \{ f(x) \mid x \in X, d(x, p) < \delta \} < \varepsilon$.

Weitere Formulierungen der Stetigkeit werden wir kennenlernen, sobald wir unsere topologischen Betrachtungen für \mathbb{R} auf allgemeine metrische Räume übertragen haben.

Viele vertraute Eigenschaften stetiger reeller Funktionen gelten für alle stetigen Funktionen zwischen metrischen Räumen. So zeigt man zum Beispiel wie früher, dass die Verknüpfung $g \circ f$ zweier stetiger Funktionen

$$f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2) \text{ und } g : (X_2, d_2) \rightarrow (X_3, d_3)$$

wieder stetig ist. Auch wenn sich Vieles ohne Probleme von \mathbb{R} auf metrische Räume verallgemeinert, so muss man doch genau beobachten, ob nicht spezielle Eigenschaften von \mathbb{R} – vor allem das Vorhandensein einer vollständigen linearen Ordnung – im Spiel sind, die einer Verallgemeinerung entgegenstehen. So hatten wir für \mathbb{R} zum Beispiel gezeigt, dass eine auf einem Intervall definierte streng monoton steigende Funktion f automatisch eine stetige Umkehrfunktion besitzt (f musste hierzu nicht einmal stetig sein). Der Leser vergleiche dies mit der auf einem halboffenen Intervall definierten Kreisaufwicklung:

Beispiel

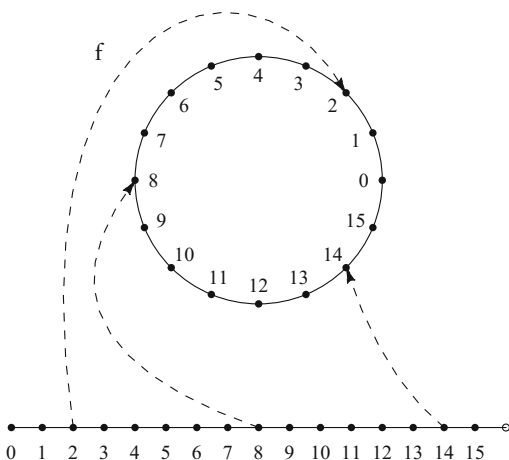
Seien $X = [0, 2\pi[$ und $K = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$, jeweils versehen mit der euklidischen Metrik in \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^2 . Weiter sei $f : X \rightarrow K$ definiert durch

$$f(x) = e^{ix} \text{ für alle } x \in X.$$

Dann ist $f : X \rightarrow K$ bijektiv und stetig, aber die Umkehrfunktion f^{-1} von f hat eine Unstetigkeitsstelle im Punkt

$$p = f(0) = 1 = (1, 0).$$

Kreisaufwicklung eines halboffenen Intervalls. Die Zahlen entsprechen Punkten x und ihren Bildern $f(x)$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist bijektiv, aber unstetig im mit 0 bezeichneten Punkt des Kreises.



Der Banachsche Fixpunktsatz

Die Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion kann allgemein für metrische Räume erklärt werden:

Definition (*Lipschitz-Stetigkeit*)

Ein $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ heißt *Lipschitz-stetig* oder *dehnungsbeschränkt* mit einer *Lipschitz-Konstanten* $L \geq 0$, falls

$$e(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Die Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion impliziert wieder die Stetigkeit. Besondere Beachtung verdient der Fall „ $(X, d) = (Y, e)$ und $L < 1$ “:

Definition (*Kontraktion*)

Ein $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ heißt eine *Kontraktion*, falls f Lipschitz-stetig mit einer Konstanten $L < 1$ ist.

Der folgende fundamentale Satz besagt, dass Kontraktionen in vollständigen Räumen einen ausgezeichneten Punkt besitzen: Es gibt immer genau ein x^* , das durch f nicht bewegt wird.

Satz (*Banachscher Fixpunktsatz*)

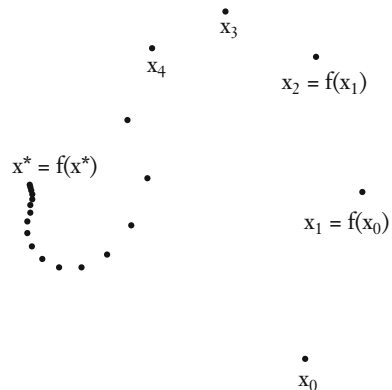
Sei (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum, und sei $f : X \rightarrow X$ eine Kontraktion mit einer Lipschitz-Konstanten $L < 1$.

Dann gibt es genau ein $x^* \in X$ mit $f(x^*) = x^*$. Für alle $x_0 \in X$ gilt

$$(a) \quad x^* = \lim (x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots),$$

$$(b) \quad d(x_0, x^*) \leq \frac{d(x_0, f(x_0))}{1 - L}.$$

Die Folge $(x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots)$ heißt der *Orbit* des Punktes x_0 unter f . Der Startpunkt x_0 wird nach $x_1 = f(x_0)$ geschickt, der Punkt x_1 nach $x_2 = f(x_1)$ usw. Ist f eine Kontraktion, so werden die Abstände in jedem Schritt um einen konstanten Faktor verkleinert. Da der Raum vollständig ist, sollte der Orbit von x_0 unter f also gegen einen Punkt x^* konvergieren. Dass dies so ist, und dass x^* zudem der eindeutige Fixpunkt von f ist, zeigt der folgende Beweis.



Beweis*zur Existenz:*

Sei $x_0 \in X$, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Orbit von x_0 unter f , sodass $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle n . Weiter sei $s = d(x_0, x_1)$. Dann gilt:

$$(i) \quad d(x_n, x_{n+1}) \leq L^n s \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

$$(ii) \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge.}$$

Beweis von (i) durch Induktion nach n:

Der Induktionsanfang $n = 0$ gilt nach Definition von s . Im Induktionsschritt von n nach $n + 1$ gilt

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq L d(x_n, x_{n+1}) \leq L L^n s = L^{n+1} s.$$

Beweis von (ii):

Für alle n, k gilt nach (i)

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\leq \sum_{j < k} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \sum_{j < k} L^{n+j} s = \\ L^n s \sum_{j < k} L^j &\leq \frac{L^n s}{1 - L}. \end{aligned}$$

Mit $\lim_n L^n = 0$ folgt die Behauptung.

Da X vollständig ist, existiert $x^* = \lim_n x_n$ nach (ii). Da f stetig ist, gilt

$$(+ \quad x^* = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n) = f(x^*).$$

Zudem gilt wie im Beweis von (ii)

$$d(x_0, x^*) = \lim_k d(x_0, x_{0+k}) \leq \lim_k \frac{L^0 s}{1 - L} = \frac{s}{1 - L}.$$

Damit sind die Existenz und (a) und (b) gezeigt.

zur Eindeutigkeit:

Sind $x, y \in A$ mit $f(x) = x$ und $f(y) = y$, so ist

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y).$$

— Aus $L < 1$ folgt $d(x, y) = 0$ und damit $x = y$.

Die Eigenschaft $f(x^*) = x^*$ ist mit Hilfe der Limesstetigkeit von f erstaunlich einfach einzusehen. Der Leser vergleiche (+) mit der Argumentation, dass die Newton-Iteration eine Nullstelle findet (Kapitel 4.4 in Band 1).

Anschaulich formuliert lautet das Ergebnis: Unter einer Kontraktion laufen alle Orbits sehr schnell auf einen unbewegten Punkt zu, dem schwarzen Loch der Kontraktion.

Bemerkung

Dass $f : X \rightarrow X$ eine Kontraktion ist, bedeutet nicht, dass

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X \text{ mit } x \neq y,$$

sondern stärker, dass ein $L \in [0, 1[$ existiert mit

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Die fixpunktfreie Funktion $f : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ mit $f(x) = (x^2 + 1)/x$ für alle $x \geq 1$ zeigt (mit der euklidischen Metrik d auf $[1, \infty[$), dass die schwächere Voraussetzung für den Fixpunktsatz nicht genügt.

Eine nützliche Variante ist:

Korollar (*Banachscher Fixpunktsatz für abgeschlossene ε -Kugeln*)

Seien (X, d) vollständig, $a \in X$, $\varepsilon > 0$ und $A = \{x \in X \mid d(x, a) \leq \varepsilon\}$. Weiter sei $f : A \rightarrow X$ Lipschitz-stetig mit $L \in [0, 1[$. Es gelte $d(a, f(a)) \leq (1 - L)\varepsilon$. Dann gilt $f : A \rightarrow A$, und f besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in A$.

Beweis

Für alle $x \in A$ gilt

$$\begin{aligned} d(a, f(x)) &\leq d(a, f(a)) + d(f(a), f(x)) \leq (1 - L)\varepsilon + L d(a, x) \leq \\ &(1 - L)\varepsilon + L\varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $f(x) \in A$ für alle $x \in A$ und somit $f : A \rightarrow A$ eine Kontraktion. Da der Teilraum (A, d) aufgrund der Abgeschlossenheit von A vollständig ist,

– folgt die Behauptung aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

Eine Version mit „<“ statt „≤“ ist schließlich:

Korollar (*Banachscher Fixpunktsatz für offene ε -Kugeln*)

Seien (X, d) vollständig, $a \in X$, $\varepsilon > 0$ und $U = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$. Weiter sei $f : U \rightarrow X$ Lipschitz-stetig mit $L \in [0, 1[$. Es gelte $d(a, f(a)) < (1 - L)\varepsilon$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt $x^* \in U$.

Beweis

Sei $\delta \in]0, \varepsilon[$ mit $d(a, f(a)) \leq (1 - L)\delta$. Wir wenden nun das letzte Korollar auf die Funktion $f|_A$ an mit

$$- \quad A = \{x \in X \mid d(a, x) \leq \delta\} \subseteq U.$$

Der Fixpunktsatz spielt in der Analysis an verschiedenen Stellen eine wichtige Rolle. Wir werden ihn zum Beweis des Hauptsatzes über implizite Funktionen und bei der Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen zur Konstruktion von Lösungen verwenden. In beiden Fällen wird die Argumentation durch die Anwendung des abstrakten Hilfsmittels wesentlich kürzer und transparenter.

Ausblick: Metrisierung von unendlichen Produkten

Wir wollen die endliche Produktbildung auf unendliche Produkte erweitern. Für endliche Produkte $X = X_1 \times \dots \times X_n$ hatten wir

$$(+)\quad d_{\max}(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} d_k(x_k, y_k), \quad d_{\sigma}(x, y) = \sum_{1 \leq k \leq n} d_k(x_k, y_k)$$

definiert, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (x_1, \dots, y_n)$. Nun betrachten wir ein unendliches Produkt von Mengen X_n , $n \in \mathbb{N}$, also die Menge

$$X = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in X_n \text{ für alle } n \}.$$

Wir können die Elemente von X auch als Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_n X_n$ mit der Eigenschaft $f(n) \in X_n$ für alle n angeben. Dies kann die Lesbarkeit erhöhen, wenn wir Folgen in X , also Folgen von Folgen betrachten. Eine solche Folge hat dann die Form $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ anstelle von $((x_k^n)_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$.

Zur Metrisierung von X können wir bei vorliegenden Metriken d_n auf X_n das Maximum und die endliche Summe in (+) durch ein Supremum bzw. eine unendliche Summe ersetzen. Um endliche Werte zu erhalten, müssen wir die Metriken zudem noch geeignet skalieren.

Definition (Metrisierung unendlicher Produkte)

Seien (X_n, d_n) metrische Räume für alle n , und sei

$$X = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in X_n \text{ für alle } n \} = \{ f \mid \text{Def}(f) = \mathbb{N}, f(n) \in X_n \text{ für alle } n \}.$$

Dann setzen wir für alle $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X :

$$d_{\sup}(x, y) = \sup_n \frac{1}{2^{n+1}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

$$d_{\sigma}(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^{n+1}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Wir schreiben

$$(X, d_{\max}) = \prod_{n \in \mathbb{N}}^{\sup} (X_n, d_n), \quad (X, d_{\sigma}) = \prod_{n \in \mathbb{N}}^{\sigma} (X_n, d_n).$$

Die Metriken d_{\sup} und d_{σ} erzeugen denselben Konvergenzbegriff, der sich wie im endlichen Fall als koordinatenweise Konvergenz beschreiben lässt. Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $f \in X$, so gilt sowohl für d_{\max} als auch für d_{σ} :

$$(+)\quad \lim_n f_n = f \text{ genau dann, wenn für alle } k \text{ gilt: } \lim_n f_n(k) = f(k) \text{ in } (X_k, d_k).$$

Gleiches gilt, wenn wir $\min(1, d_n)$ statt $d_n/(1 + d_n)$ verwenden. Sind alle Metriken d_n bereits beschränkt durch 1, so kann man einfach d_n einsetzen.

Die Produktbildungen erhalten die Vollständigkeit: Sind alle (X_n, d_n) vollständig, so sind auch (X, d_{\max}) und (X, d_σ) vollständig.

Sind alle Faktoren (X_n, d_n) gleich, so nennt man das Produkt auch eine unendliche Potenz. Zwei wichtige Beispiele sind:

Definition (*Cantor-Raum und Baire-Raum*)

Der *Cantor-Raum* \mathcal{C} ist das mit d_{\max} oder d_σ ausgestattete unendliche Produkt der mit der diskreten Metrik versehenen Räume $X_n = \{0, 1\}$.

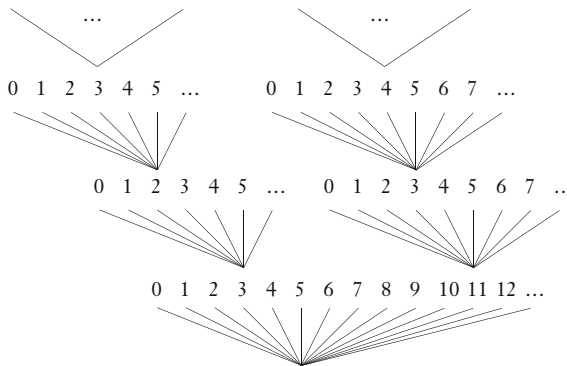
Analog ist der *Baire-Raum* \mathcal{N} das unendliche Produkt der mit der diskreten Metrik versehenen Räume $X_n = \mathbb{N}$.

Unter der Definition werden die Mengen

$$\mathcal{C} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \{0, 1\} \text{ für alle } n\} = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{N} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{N} \text{ für alle } n\} = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$$

aller 0-1-Folgen bzw. aller Folgen in \mathbb{N} zu vollständigen metrischen Räumen. Diese Räume können wir uns als unendlich hohe Bäume vorstellen, die sich an jeder Stelle 2-fach bzw. \mathbb{N} -fach verzweigen.



Ein unendlich hoher Baum, der sich an jedem Knoten unendlich oft verzweigt.
Die Elemente des Baire-Raums \mathcal{N} sind unendliche Pfade durch diesen Baum.

Die Konvergenz in \mathcal{C} und \mathcal{N} lässt sich sehr sympathisch beschreiben. Denn unter der diskreten Metrik konvergiert eine Folge genau dann, wenn sie schließlich konstant ist. Damit wird (+) für \mathcal{C} und \mathcal{N} zu:

(++) $\lim_n f_n = f$ genau dann, wenn für alle k gilt: $f_n(k) = f(k)$ schließlich.

Die rechte Seite ist äquivalent dazu, dass es für alle k_0 ein n_0 gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ das Anfangsstück $(f_n(0), \dots, f_n(k_0))$ von f_n mit dem gleichlangen Anfangsstück $(f(0), \dots, f(k_0))$ von f übereinstimmt. Damit können wir die Konvergenz in \mathcal{C} und \mathcal{N} als „Stabilisierung von Anfangsstücken“ beschreiben. Eine Folge von unendlichen Pfaden im Baum \mathcal{N} konvergiert, wenn für jede endliche Höhe ir-

gendwann Einigkeit über den Verlauf besteht. Die Pfade f_n ziehen sich dann anschaulich auf einen Pfad f , ihren Limes, zusammen. Analoges gilt für \mathcal{C} .

Von beiden Räumen führt ein bemerkenswerter Weg zu den reellen Zahlen. Der Cantor-Raum lässt sich stetig und bijektiv auf die Cantor-Menge C abbilden, indem wir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ als links-rechts-Pfad durch die Teilintervalle der Mengen C_n der Drittel-Intervall-Konstruktion von

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

lesen und den Schnittpunkt der so definierten Intervallschachtelung bilden. Die so entstehende Bijektion $F : \mathcal{C} \rightarrow C$ können wir auch so definieren:

„Ersetze in einer 0-1-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jede 1 durch eine 2 und lese die entstehende Folge als reelle Zahl in 3-adischer Darstellung.“

Es gilt also

$$F((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \geq 0} \frac{2x_n}{3^{n+1}} \quad \text{für alle } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}.$$

Dieser enge Zusammenhang zwischen \mathcal{C} und C erklärt die Namensgebung „Cantor-Raum“. Auch der Baire-Raum lässt sich mit einer Teilmenge des Kontinuums in Verbindung bringen. Mit Hilfe von Kettenbruchentwicklungen erhält man eine stetige und bijektive Abbildung

$$G : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

zwischen \mathcal{N} und den irrationalen Zahlen. Konkret kann man für alle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{N} definieren:

$$G((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = g(x_0) + \frac{1}{[x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1, \dots, x_n + 1, \dots]},$$

wobei $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ eine beliebige Bijektion ist. Die unendlichen Kettenbrüche im Nenner des Bruchs durchlaufen alle irrationalen Zahlen in $]1, \infty[$, sodass ihre Kehrwerte alle irrationalen Zahlen in $]0, 1[$ durchlaufen. Durch das Vorschalten der ganzen Zahl $g(x_0)$ entsteht eine Bijektion zwischen \mathcal{N} und $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Auch die Umkehrungen der Abbildungen F und G sind stetig, sodass man aus topologischer Sicht \mathcal{C} mit der Cantor-Menge C und \mathcal{N} mit der Menge der irrationalen Zahlen identifizieren kann.

4. Topologie metrischer Räume

Die topologischen Überlegungen des ersten Kapitels können wir allgemein für metrische Räume durchführen. Wie für \mathbb{R} beruht alles auf der Einführung von offenen Grundmengen.

Definition ($U_\varepsilon(x)$, $U_\varepsilon^d(x)$, offene ε -Umgebung, offene ε -Kugel)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann setzen wir für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(x) = U_\varepsilon^d(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Die Menge $U_\varepsilon(x)$ heißt die *offene ε -Umgebung* von x oder die *offene ε -Kugel* um den Punkt x im Raum (X, d) .

Ist die Metrik d festgelegt, bevorzugen wir die Schreibweise $U_\varepsilon(x)$. Betrachten wir verschiedene Metriken auf X , so ist es notwendig, die Metrik anzugeben.

Die Bezeichnung als „Kugel“ ist durch die Definition der offenen Kugel

$$K = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y - x| < \varepsilon\}$$

mit Mittelpunkt x und Radius ε im \mathbb{R}^3 motiviert. Im Allgemeinen ist $U_\varepsilon(x)$ aber nicht kugelförmig. Die Maximumsmetrik erzeugt zum Beispiel ε -Umgebungen, die aus geometrischer Sicht offene Quader im \mathbb{R}^n sind. Dennoch ist die Bezeichnung als ε -Kugel weit verbreitet. Im Englischen findet man oft auch die Notation $B_\varepsilon(x)$ statt $U_\varepsilon(x)$, wobei „B“ für „ball“ steht.

Mit Hilfe der offenen ε -Umgebungen können wir jedem metrischen Raum eine topologische Struktur nach dem Muster des letzten Kapitels aufprägen:

Definition (*Topologie eines metrischen Raumes*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt ein $U \subseteq X$ *offen*, falls für alle $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Weiter heißt ein $V \subseteq X$ eine *Umgebung* eines Punktes $x \in X$, falls ein offenes U existiert mit $x \in U \subseteq V$. Ein $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X - A$ offen ist.

Die Darstellung einer offenen Menge in \mathbb{R} als disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen hat kein allgemeines Analogon. Bereits in der Ebene \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik ist nicht jede offene beschränkte Menge eine Vereinigung von paarweise disjunkten offenen ε -Umgebungen. Überlappungen sind oft nicht zu vermeiden: Ist U das offene Quadrat $]0, 1[\times]0, 1[$ und gilt $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ für ein x und ein $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $y \in U$, das auf dem Rand der offenen Kreisscheibe $U_\varepsilon(x)$ liegt. Dieses y kann dann nur mit einer Umgebung $U_\delta(y) \subseteq U$ eingefangen werden, die $U_\varepsilon(x)$ überlappt.

Die Begriffe „Häufungspunkt“ und „Inneres, Abschluss, Rand“ können wir wie für \mathbb{R} einführen:

Definition (*Häufungspunkt, P'*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein $p \in X$ heißt *Häufungspunkt* von $P \subseteq X$, falls $(U - \{p\}) \cap P \neq \emptyset$ für alle Umgebungen U von p . Wir setzen

$$P' = \{p \in X \mid p \text{ ist ein Häufungspunkt von } P\}.$$

Definition (*Inneres, Rand und Abschluss*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann definieren wir für alle $P \subseteq X$:

$$\text{int}(P) = \{p \in P \mid P \text{ ist eine Umgebung von } p\}, \quad (\text{Inneres von } P)$$

$$\text{cl}(P) = P \cup P', \quad (\text{Abschluss von } P)$$

$$\text{bd}(P) = \text{cl}(P) - \text{int}(P). \quad (\text{Rand von } P)$$

Genau wie früher gilt:

Satz (*Charakterisierung der abgeschlossenen Mengen*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

- (a) A ist abgeschlossen.
- (b) $A' \subseteq A$.

In vollständigen metrischen Räumen gilt das folgende Analogon zum Prinzip der Intervallschachtelung:

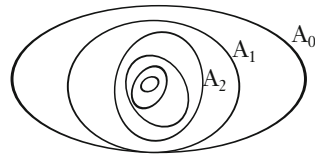
Satz (*Schachtelungsprinzip in vollständigen metrischen Räumen*)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und seien $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ nichtleere und abgeschlossene Teilmengen von X mit

$$(a) \quad A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots,$$

$$(b) \quad \lim_n \text{diam}(A_n) = 0.$$

Dann besitzt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ genau ein Element.



Beweis

Zum Beweis der Existenz sei x_n ein Element von A_n für alle n . Nach (b) ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X , also existiert $x = \lim_n x_n$ aufgrund der Vollständigkeit von X . Für alle n ist x ein Häufungspunkt der Folge $(x_k)_{k \geq n}$ in A_n , also gilt $x \in A_n$, da A_n abgeschlossen ist. Somit ist $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Zum Beweis der Eindeutigkeit seien $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dann gilt $x, y \in A_n$ und damit $d(x, y) \leq \text{diam}(A_n)$ für alle n . Nach Voraussetzung (b) ist also

– $d(x, y) = 0$ und damit $x = y$.

Für Leser, die den Ausblick zum Baireschen Kategoriensatz gelesen haben, bemerken wir noch, dass dieser fundamentale Satz in jedem vollständigen metrischen Raum gilt. Hierzu definieren wir wieder:

Definition (*nirgends dicht*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein $P \subseteq X$ heißt *nirgends dicht*, falls $\text{int}(\text{cl}(P)) = \emptyset$.

Die Eigenschaft „ $\text{int}(\text{cl}(P)) = \emptyset$ “ besagt, dass der Abschluss von P keine ε -Kugeln enthält. Wie für \mathbb{R} gilt:

Satz (*Bairescher Kategoriensatz für vollständige metrische Räume*)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und seien P_n , $n \in \mathbb{N}$, nirgends dichte Teilmengen von X . Dann gilt $\text{int}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n) = \emptyset$.

Der Leser mag versuchen, den Beweis für \mathbb{R} zu übertragen.

Die topologische Stetigkeit

Wie für die reellen Zahlen gelten die folgenden topologischen Charakterisierungen der Stetigkeit für metrische Räume:

Satz (*topologische Formulierung der Stetigkeit in einem Punkt*)

Sei $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$, und sei $p \in X$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist stetig im Punkt p .
- (b) Für jede Umgebung U von $f(p)$ in Y ist $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von p in X .
- (c) Für alle $P \subseteq X$ gilt: Ist $p \in \text{cl}(P)$, so ist $f(p) \in \text{cl}(f[P])$.

Globale topologische Fassungen der Stetigkeit sind zum Beispiel:

Satz (*topologische Formulierung der Stetigkeit*)

Sei $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist stetig.
- (b) Die Urbilder offener Mengen unter f sind offen.
- (c) Die Urbilder abgeschlossener Mengen unter f sind abgeschlossen.
- (d) Für alle $P \subseteq X$ gilt $f[\text{cl}(P)] \subseteq \text{cl}(f[P])$.
- (e) Für alle $Q \subseteq Y$ gilt $\text{cl}(f^{-1}[Q]) \subseteq f^{-1}[\text{cl}(Q)]$.

Der Leser visualisiere sich diese Bedingungen mit Hilfe von Diagrammen.

Numerische und topologische Äquivalenz

Wie wir schon mehrfach gesehen haben, können verschiedene Metriken auf der gleichen Menge X denselben Grenzwertbegriff für Folgen erzeugen. Dieses Phänomen wollen wir nun noch genauer untersuchen.

Definition (*numerisch und topologisch äquivalente Metriken*)

Sei X eine Menge. Zwei Metriken d und e auf X heißen:

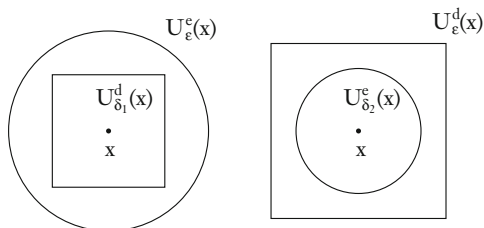
- (a) *numerisch äquivalent*, falls es $c_1, c_2 > 0$ gibt mit:

$$\forall x, y \in X \quad (d(x, y) \leq c_1 e(x, y) \wedge e(x, y) \leq c_2 d(x, y)),$$

- (b) *topologisch äquivalent*, falls für alle $x \in X$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1, \delta_2 > 0 \quad (U_{\delta_1}^d(x) \subseteq U_\varepsilon^e(x) \wedge U_{\delta_2}^e(x) \subseteq U_\varepsilon^d(x)).$$

Die topologische Äquivalenz bedeutet, dass jede offene d -Kugel eine offene e -Kugel mit dem gleichem Mittelpunkt enthält und umgekehrt. Ist dies der Fall, so erzeugen d und e die gleiche topologische Struktur auf X , da dann



$$\{ U \subseteq X \mid U \text{ ist offen in } (X, d) \} = \{ U \subseteq X \mid U \text{ ist offen in } (X, e) \}.$$

Die Räume haben dann auch dieselben abgeschlossenen Mengen und alle $P \subseteq X$ haben dasselbe Innere, denselben Abschluss und denselben Rand. Der Stetigkeitsbegriff für (X, d) ist identisch mit dem für (X, e) , da er mit Hilfe der offenen Mengen ausgedrückt werden kann. Konvergenzverhalten und Grenzwerte sind gleich, d. h., eine Folge konvergiert in (X, d) genau dann, wenn sie in (X, e) konvergiert, und im Fall der Konvergenz ist der Grenzwert bzgl. d der Grenzwert bzgl. e . Die Übereinstimmung von Konvergenzverhalten und Grenzwerten von Folgen impliziert umgekehrt die topologische Äquivalenz.

Bei allen Gemeinsamkeiten kann es doch auch wichtige Unterschiede geben: Von zwei topologisch äquivalenten Metriken kann die eine vollständig sein und die andere nicht. Die Tangensmetrik auf $] -\pi/2, \pi/2 [$ ist ein Beispiel hierfür. Allgemeiner lässt sich für jedes offene Intervall X in \mathbb{R} eine zur euklidischen Metrik topologisch äquivalente Metrik d finden, sodass (X, d) vollständig ist. Man sagt dann, dass man die euklidische Topologie von X vollständig metrisiert hat.

Numerisch äquivalente Metriken sind auch topologisch äquivalent. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Ist von zwei numerisch äquivalenten Metriken die eine vollständig, so ist es auch die andere. Die Tangensmetrik ist also topologisch, nicht aber metrisch äquivalent zur euklidischen Metrik auf $] -\pi/2, \pi/2 [$.

Zwei Normen auf einem Vektorraum nennen wir *numerisch* bzw. *topologisch äquivalent*, wenn die von den Normen induzierten Metriken dies sind. Hier gilt:

Satz (*numerische und topologische Äquivalenz von Normen*)

Zwei Normen auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V , mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sind genau dann topologisch äquivalent, wenn sie numerisch äquivalent sind.

Der Beweis kann dem Leser überlassen bleiben. Aufgrund des Satzes können wir kurz von *äquivalenten Normen* sprechen. Noch überraschender ist:

Satz (*Äquivalenz von Normen*)

Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann sind je zwei Normen auf V äquivalent.

Einen Beweis geben wir in 2.6 mit Hilfe des Kompaktheitsbegriffs.

Für alle $n \geq 1$ erzeugen also die p -Normen dieselbe Topologie auf \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n , und für alle $n, m \geq 1$ erzeugen die Matrix-Normen dieselbe Topologie auf dem Raum $\mathbb{K}^{m \times n}$ aller $(m \times n)$ -Matrizen. Die Konvergenz einer Folge in einem normierten endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum ist immer die komponentenweise Konvergenz bzgl. einer beliebigen Basis. Damit gilt das vertraute Kriterium zur Überprüfung der Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt x : Für alle gegen x konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V konvergieren die Komponenten von $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen die Komponenten von $f(x)$.

Zusammenhang und Zusammenhangskomponenten

Für die reellen Zahlen sind \emptyset und \mathbb{R} die einzigen Mengen, die zugleich offen und abgeschlossen sind. Eine Folgerung hieraus ist, dass es keine Zerlegung von \mathbb{R} in zwei nichtleere offene Mengen gibt:

- (+) Sind U_1, U_2 offen und disjunkt und ist $\mathbb{R} = U_1 \cup U_2$, so gilt $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$.

Diese Beobachtung hatten wir bereits für den topologischen Beweis des Zwischenwertsatzes benutzt. Eine stetige Funktion auf \mathbb{R} kann keinen Wert c zwischen zwei Werten $f(a)$ und $f(b)$ auslassen, da andernfalls \mathbb{R} in die beiden nichtleeren, disjunkten offenen Urbilder von $] -\infty, c[$ und $] c, \infty[$ unter f zerfallen würde. Ist dagegen

$$A =] -\infty, 0[\text{ und } B =] 0, \infty[,$$

so kann eine stetige Funktion $g: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ Werte zwischen zwei anderen Werten auslassen, man betrachte etwa die Indikatorfunktion $1_B: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich ist hier anschaulich nicht mehr zusammenhängend, sodass das Auslassen von Werten nicht mit einem Riss erzeugt werden muss. Diese Überlegungen motivieren die folgende Definition.

Definition (*zusammenhängend*)

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *zusammenhängend*, wenn \emptyset und X die einzigen Teilmengen von X sind, die offen und abgeschlossen sind.

Das tiefere Ergebnis zum Zwischenwertsatz lautet nun:

Satz (*Erhalt des Zusammenhangs*)

Sei $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ stetig und surjektiv, und sei (X, d) zusammenhängend. Dann ist (Y, e) zusammenhängend.

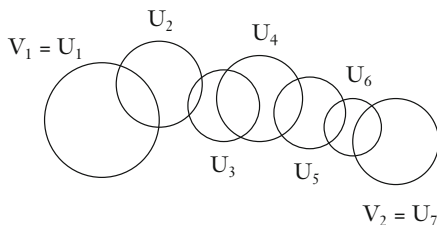
Beweis

Sei (Y, e) nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene, nichtleere und disjunkte $U_1, U_2 \subseteq Y$ mit $U_1 \cup U_2 = Y$. Wir betrachten

$$V_1 = f^{-1}[U_1], \quad V_2 = f^{-1}[U_2].$$

Dann sind V_1 und V_2 nichtleer (da f surjektiv ist), offen (da f stetig), disjunkt, und es gilt $V_1 \cup V_2 = X$. Also ist (X, d) nicht zusammenhängend.

Eine hübsche und für Teilräume des \mathbb{R}^n zudem auch sehr anschauliche Charakterisierung des Zusammenhangs ist:

**Satz** (*offene Kettenbildung*)

Für jeden metrischen Raum (X, d) sind äquivalent:

- (a) (X, d) ist zusammenhängend.
- (b) Ist \mathcal{U} eine Menge offener nichtleerer Mengen mit $\bigcup \mathcal{U} = X$ und sind $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, so gibt es $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$V_1 = U_1, \quad V_2 = U_n, \quad U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset \quad \text{für alle } 1 \leq k < n.$$

Beweis

(a) *impliziert* (b): Seien \mathcal{U}, V_1, V_2 wie in (b). Mengen U_1, \dots, U_n in \mathcal{U} mit $U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$ für alle k heißen eine Kette von U_1 nach U_n in \mathcal{U} . Seien

$$\mathcal{V} = \{ U \in \mathcal{U} \mid \text{es gibt eine Kette von } V_1 \text{ nach } U \text{ in } \mathcal{U} \},$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} - \mathcal{V}.$$

Dann sind $V = \bigcup \mathcal{V}$ und $W = \bigcup \mathcal{W}$ offen und disjunkt (!), und wegen $\bigcup \mathcal{U} = X$ gilt $V \cup W = X$. Wegen $V_1 \in \mathcal{V}$ und X zusammenhängend ist also $W = \emptyset$ und damit $V_2 \in \mathcal{V}$.

(b) *impliziert* (a): Wir argumentieren indirekt: Sind $U, V \subseteq X$ offen, disjunkt und nichtleer mit $X = U \cup V$, so ist (b) für $\mathcal{U} = \{ U, V \}$ verletzt.

In jedem metrischen Raum können wir eine Äquivalenzrelation einführen, die uns Auskunft über die „Inseln“ des Raumes gibt:

Definition (*Zusammenhangskomponenten*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für alle $x, y \in X$ setzen wir $x \sim y$, falls ein $C \subseteq X$ existiert mit den Eigenschaften:

- (a) $x, y \in C$.
- (b) Der Teilraum (C, d) ist zusammenhängend.

Für alle $x \in X$ heißt $x/\sim = \{y \in X \mid x \sim y\}$ die *Zusammenhangskomponente* von x in X .

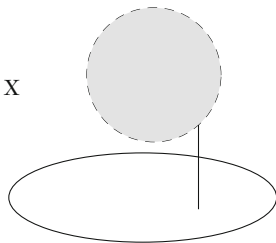
Die Relation \sim ist in der Tat eine Äquivalenzrelation. In einem Spezialfall hatten wir sie bereits kennengelernt: Im Beweis des Satzes, dass eine nichtleere offene Teilmenge U von \mathbb{R} in nichtleere disjunkte offene Intervalle zerfällt, hatten wir eine Äquivalenzrelation betrachtet. Sie ist genau die Relation \sim der obigen Definition. Die Intervalle, in die U zerfällt, sind also die Zusammenhangskomponenten von U im Sinne der obigen Definition.

Der Wegzusammenhang

Eine wichtige Variante des topologischen Zusammenhangs ist der sog. Wegzusammenhang. Die Vorstellung dabei ist, dass man von einem Punkt des Raumes zu jedem anderen Punkt des Raumes gehen kann, ohne dabei zu springen. Mit Hilfe stetiger Funktionen können wir diese Vorstellung fassen:

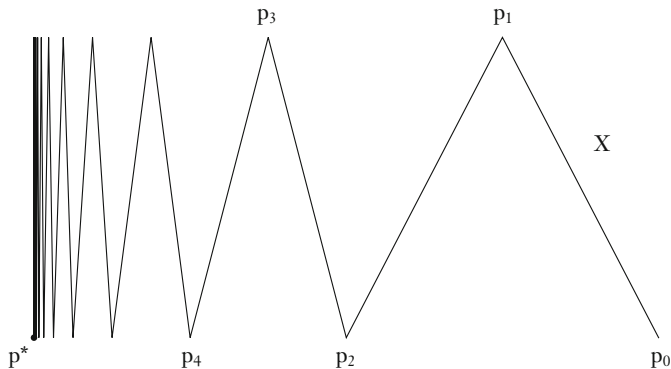
Definition (*wegzusammenhängend, stetiger Pfad*)

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *wegzusammenhängend*, wenn für alle x, y in X eine stetige Funktion $f: [0, 1] \rightarrow X$ existiert mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$. Das Bild von f heißt dann auch ein *stetiger Pfad* von x nach y in X .



Der metrische Teilraum X der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 im Diagramm links ist wegzusammenhängend. Er besteht aus einer offenen Kreisscheibe, einem abgeschlossenen Geradenstück und einer abgeschlossenen Ellipsenlinie. Streichen wir das Geradenstück, geht der Wegzusammenhang verloren.

Ein wegzusammenhängender metrischer Raum ist zusammenhängend, die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Folgendes Diagramm zeigt ein Beispiel in der euklidischen Ebene:



Wir verbinden die Punkte

$$p_0 = (1, 0), \quad p_1 = (3/4, 1), \quad p_2 = (1/2, 0), \quad p_3 = (3/8, 1), \quad p_4 = (1/4, 0), \dots$$

der Ebene durch Linien und fügen dem so entstehenden Zackengebilde den Punkt $p^* = (0, 0)$ hinzu. Dies definiert eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Diese Menge ist unter der euklidischen Metrik topologisch zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Es gibt stetige Pfade von p nach q für alle $p, q \in X - \{p^*\}$, aber keinen stetigen Pfad von p_0 nach p^* . Denn wäre $f: [0, 1] \rightarrow X$ ein stetiger Pfad von p_0 nach p^* , so gäbe es eine gegen 1 konvergente Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f(t_n) = p_{2n+1}$ für alle n . Dann wäre $\lim_n f(t_n) = (0, 1) \neq p^* = f(\lim_n t_n)$, also f unstetig im Punkt 1. Bemerkenswert ist, dass es dagegen eine stetige Bijektion $g: X \rightarrow [0, 1]$ gibt. Wir setzen hierzu $g(x, y) = x$ für alle $(x, y) \in X$.

Auch dem Begriff des Wegzusammenhangs können wir eine Äquivalenzrelation zuordnen:

Definition (*stetige Erreichbarkeit, Wegzusammenhangskomponenten*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir setzen für alle $x, y \in X$:

$x \sim_c y$ falls „es gibt einen stetigen Pfad von x nach y in X “.

Gilt $x \sim_c y$, so heißt y *stetig erreichbar* von x in X . Für alle $x \in X$ heißt

$$x/\sim_c = \{ y \in X \mid x \sim_c y \}$$

die *Wegzusammenhangskomponente* von x in X .

Die Relation \sim_c ist eine Äquivalenzrelation auf X , und die Zerlegung X/\sim_c von X ist eine Verfeinerung der Zerlegung X/\sim von X , d. h., eine Wegzusammenhangskomponente ist immer eine Teilmenge einer Zusammenhangskomponente.

Separable metrische Räume und abzählbare Basen

Eine bemerkenswerte Eigenschaft der reellen Zahlen ist die Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge. Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen hat mit jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(x)$ einen nichtleeren Durchschnitt, sodass jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen ist. Dies führt zum Beispiel dazu, dass eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch ihre Werte auf \mathbb{Q} eindeutig bestimmt ist (vgl. 3.1 in Band 1). Auch viele andere metrische Räume besitzen abzählbare und dichte Teilmengen:

Definition (*dichte Teilmenge eines metrischen Raumes, separabel*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein $D \subseteq X$ heißt *dicht* in X , falls gilt:

$$U \cap D \neq \emptyset \quad \text{für alle nichtleeren offenen } U \subseteq X.$$

Der Raum (X, d) heißt *separabel*, falls es ein abzählbares dichtes $D \subseteq X$ gibt.

Ein $D \subseteq X$ ist genau dann dicht, wenn $\text{cl}(D) = X$. Gleichwertig ist auch die Bedingung: Für alle $p \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in D$ mit $d(p, x) < \varepsilon$.

Beispiele

- (1) Die Räume \mathbb{R}^n sind separabel unter der euklidischen Topologie. Denn \mathbb{Q}^n ist abzählbar und dicht in \mathbb{R}^n .
- (2) Ist (X, d) ein metrischer Raum und X abzählbar, so ist X separabel.
- (3) Ist X überabzählbar, so ist X mit der diskreten Metrik nicht separabel.
- (4) Der Raum $X = \mathcal{C}([0, 1]) = \{f \mid f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig}\}$ ist separabel unter der von der Supremumsnorm induzierten Metrik d_{sup} . Denn ist $f \in X$ und $\varepsilon > 0$, so liegt im $\varepsilon/2$ -Schlauch um f ein Polynom g mit reellen Koeffizienten (Approximationssatz von Weierstraß-Bernstein). Ersetzt man nun die Koeffizienten in g durch hinreichend nahe rationale Koeffizienten, so liegt das so entstehende Polynom h im ε -Schlauch um f (Beweis als Übung). Da es nur abzählbar viele Polynome auf $[0, 1]$ mit rationalen Koeffizienten gibt, ist die Menge dieser Polynome also abzählbar und dicht in (X, d_{sup}) . Allgemeiner ist $\mathcal{C}([a, b])$ separabel unter d_{sup} für jedes reelle Intervall $[a, b]$.
- (5) Ist X eine Menge von beschränkten Funktionen auf $[0, 1]$, die alle Funktionen $g_x = 1_{[0, x]}$, $x \in [0, 1]$, enthält, so ist X nicht separabel unter d_{sup} . Denn ist $D \subseteq X$ und $F: \{g_x \mid x \in [0, 1]\} \rightarrow D$ derart, dass jedes $F(g_x)$ im $1/2$ -Schlauch um g_x liegt, so ist F injektiv und also D nicht abzählbar. Folglich sind die Treppenfunktionen, die bv-Funktionen, die Regelfunktionen und die Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[0, 1]$ keine separablen Räume unter d_{sup} .

In separablen metrischen Räumen haben die offenen Mengen eine einfache Struktur. Wir definieren hierzu:

Definition (*Basis eines metrischen Raums*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge \mathcal{B} offener Mengen heißt eine *Basis* von (X, d) , falls für alle offenen $U \subseteq X$ gilt:

$$U = \bigcup \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U \}.$$

Das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \{ U_{1/n}(q) \mid q \in \mathbb{Q}, n \geq 1 \}$$

ist zum Beispiel eine Basis von \mathbb{R} (unter d_{euk}). Diese Basis ist abzählbar. Allgemein führt die Separabilität zur Existenz einer abzählbaren Basis und umgekehrt:

Satz (*abzählbare Basen und Separabilität*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (a) (X, d) ist separabel.
- (b) Es gibt eine abzählbare Basis von (X, d) .

Beweis

(a) *impliziert* (b): Sei $D \subseteq X$ abzählbar und dicht. Wir setzen

$$\mathcal{B} = \{ U_{1/n}(x) \mid x \in D, n \geq 1 \}.$$

Dann ist \mathcal{B} abzählbar. Weiter ist \mathcal{B} eine Basis von (X, d) . Denn sei $U \subseteq X$ offen, und sei $p \in U$. Da U offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq U$. Sei $n \geq 1$ so, dass $1/n < \varepsilon/2$. Da D dicht in X ist, gibt es ein $x \in D$ mit $d(p, x) < 1/n$. Dann ist $p \in U_{1/n}(x) \subseteq U_\varepsilon(p) \subseteq U$ (wobei die erste Inklusion nach der Dreiecksungleichung gilt). Dies zeigt, dass

$$U = \bigcup \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U \}.$$

(b) *impliziert* (a): Sei \mathcal{B} eine abzählbare Basis von (X, d) mit $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Sei

$$x_U = \text{„ein } x \in U\text{“} \quad \text{für alle } U \in \mathcal{B}.$$

— Dann ist $\{ x_U \mid U \in \mathcal{B} \}$ abzählbar und dicht in X .

Ist \mathcal{B} eine abzählbare Basis eines metrischen Raums (X, d) , so ist jede offene Menge U bestimmt durch die Menge $\{ B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U \}$. Da \mathcal{B} abzählbar ist, gibt es also höchstens $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ -viele oder gleichwertig höchstens \mathbb{R} -viele offene Mengen. Da jede abgeschlossene Menge das Komplement einer offenen Menge ist, gilt dies auch für die abgeschlossenen Mengen. Die Systeme \mathcal{U} und \mathcal{A} der offenen bzw. abgeschlossenen Mengen in X können also überabzählbar sein, aber ihre gemeinsame Mächtigkeit ist durch die Mächtigkeit von \mathbb{R} beschränkt. Separable metrische Räume sind in diesem Sinne also vergleichsweise klein.

Topologische Räume

Wir haben für das Linearkontinuum und dann allgemeiner für die metrischen Räume gesehen, wie die offenen Mengen eine komplexe Welt erzeugen, in der sich Teilmengen von Räumen und stetige Funktionen zwischen Räumen untersuchen lassen. Da sich „Umgebung, abgeschlossene Menge, Häufungspunkt ...“ aus den offenen Mengen ergeben, genügt es, zu erklären, welche Teilmengen einer Menge offen sein sollen, um aus der Menge einen abstrakten Raum zu machen, in dem all diese Begriffe definiert sind. Hierzu muss keine Metrik herangezogen werden. Die Abgeschlossenheitseigenschaften der offenen Mengen können an die Spitze treten:

Definition (*topologischer Raum*)

Sei X eine Menge, und sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt (X, \mathcal{U}) ein *topologischer Raum* und \mathcal{U} eine *Topologie* auf X , falls gilt:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{U}$ und $X \in \mathcal{U}$.
- (b) Für alle $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ ist $\bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{U}$.
- (c) Für alle endlichen $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ ist $\bigcap \mathcal{V} \in \mathcal{U}$.

Die Elemente von \mathcal{U} heißen *offen*.

Eine Topologie auf einer Menge X einführen heißt also, gewisse Teilmengen von X als offen zu erklären. Es müssen lediglich die drei Eigenschaften der Definition gelten. Sie sind zum Beispiel für $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ und für $\mathcal{U} = \mathcal{P}(X)$ erfüllt. Im ersten Fall sind nur \emptyset und X offen, im zweiten Fall ist jede Teilmenge von X offen. Allgemein lässt sich eine Topologie durch Vorgabe eines beliebigen Mengensystems einführen:

Satz (*Erzeugung einer Topologie*)

Sei X eine Menge, und sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Weiter seien

$$\mathcal{B} = \{S_1 \cap \dots \cap S_n \mid S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}, n \geq 0\} \quad (\text{mit } \bigcap \emptyset = X \text{ für } n = 0),$$

$$\mathcal{U} = \{\bigcup \mathcal{V} \mid \mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}\}.$$

Dann ist \mathcal{U} eine Topologie auf X . Genauer ist \mathcal{U} die kleinste Topologie auf X , die \mathcal{S} enthält, d. h., ist \mathcal{T} eine Topologie auf X mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, so ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$.

Wir definieren:

Definition (*erzeugte Topologie*)

Ist X eine Menge, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und \mathcal{U} wie im Satz, so heißt \mathcal{U} die von \mathcal{S} *erzeugte Topologie* auf X .

Die Erzeugung des topologischen Raumes (X, \mathcal{U}) mit Hilfe eines beliebigen Systems \mathcal{S} von Teilmengen von X geschieht also in zwei Schritten: Zuerst bilden wir die Menge \mathcal{B} aller Durchschnitte von endlich vielen Mengen in \mathcal{S} . Dann bilden wir die Menge \mathcal{U} aller Vereinigungen von Mengen in \mathcal{B} . Diese Vereinigungen können endlich, abzählbar unendlich oder überabzählbar sein.

Für viele Systeme \mathcal{S} genügt der zweite Schritt. Ist nämlich \mathcal{S} abgeschlossen unter endlichen nichtleeren Durchschnitten positiver Länge und gilt $X = \bigcup \mathcal{S}$, so ist die von \mathcal{S} erzeugte Topologie \mathcal{U} einfach die Menge aller Vereinigungen von Mengen in \mathcal{S} :

$$\mathcal{U} = \{ \bigcup \mathcal{V} \mid \mathcal{V} \subseteq \mathcal{S} \cup \{\emptyset, X\} \} = \{ \bigcup \mathcal{V} \mid \mathcal{V} \subseteq \mathcal{S} \}.$$

Neben dieser mengentheoretischen Konstruktion ist die Konstruktion mit Hilfe von metrischen Räumen besonders bedeutsam:

Definition *(von einer Metrik erzeugte Topologie)*

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei

$$\mathcal{U} = \{ U \subseteq X \mid U \text{ ist offen in } (X, d) \}.$$

Dann heißt \mathcal{U} die von der Metrik d erzeugte Topologie auf X .

Die von einer Metrik d erzeugte Topologie \mathcal{U} ist die von

$$\mathcal{S} = \{ U_\varepsilon^d(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0 \} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

erzeugte Topologie auf X . Der Frage, ob die Topologie \mathcal{U} eines vorliegenden topologischen Raumes (X, \mathcal{U}) von einer Metrik stammt, gehen wir später nach.

Viele Begriffe, die wir für metrische Räume eingeführt haben, wurden mit Hilfe der offenen Mengen definiert oder lassen sich auf offene Mengen zurückführen. Wir können sie deswegen für topologische Räume übernehmen:

Übertragung der Begriffe

Ist (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum, so sind die folgenden Begriffe wie für metrische Räume definiert:

Umgebung, abgeschlossene Menge, Häufungspunkt, Inneres, Abschluss, Rand, F_σ - und G_δ -Menge, Zusammenhang, dicht, separabel, Basis.

Genuin metrische Begriffe wie

Abstand, Durchmesser, Cauchy-Folge, Vollständigkeit

stehen dagegen im Allgemeinen nicht zur Verfügung. Eine topologische Formulierung des Limesbegriffs für Folgen besprechen wir unten.

Ist (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum, so ist ein $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ nach Definition genau dann eine Basis, wenn jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen in \mathcal{B} ist. Äquivalent hierzu ist, dass \mathcal{B} die Topologie \mathcal{U} erzeugt. Das System \mathcal{B} in der zweistufigen Erzeugung „von \mathcal{S} nach \mathcal{B} nach \mathcal{U} “ ist also eine Basis von \mathcal{U} .

Beispiele

- (1) Wir betrachten die Menge
- \mathbb{R}
- . Das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

ist eine Basis der euklidischen Topologie auf \mathbb{R} . Gleiches gilt für

$$\mathcal{C} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Q} \}.$$

- (2) Sei
- $X = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- die Menge der irrationalen Zahlen. Dann ist

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\cap X \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$$

eine Basis der euklidischen Topologie auf X . Für alle $a \leq b$ in \mathbb{Q} gilt

$$]a, b[\cap X = [a, b] \cap X = X - (]-\infty, a[\cup]b, \infty[).$$

Damit ist jedes $B \in \mathcal{B}$ abgeschlossen. Der Raum besitzt also eine Basis aus Mengen, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

- (3) Wir betrachten erneut die Menge
- \mathbb{R}
- , nun aber das System

$$\mathcal{B} = \{ [a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

der nach rechts halboffenen beschränkten Intervalle. \mathcal{B} ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und es gilt $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}$. Damit ist

$$\mathcal{U}_{[\,)} = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid U \text{ ist eine Vereinigung von Intervallen } [a, b[\}$$

die von \mathcal{B} erzeugte Topologie. Sie heißt die (*nach rechts halboffene Topologie*) auf \mathbb{R} . In dieser Topologie sind zum Beispiel die Mengen

$$[0, 1[, \quad [0, 1[\cup [2, 3[, \quad [0, 1[\cup [2, 3[\cup \dots \cup [2n, 2n+1[\cup \dots, \\]-\infty, b[= \bigcup_{a < b} [a, b[, \quad [a, \infty[= \bigcup_{b > a} [a, b[$$

offen. Weiter ist auch jede euklidisch offene Menge offen, da

$$]a, b[= \bigcup_{c \in]a, b[} [c, b[\quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Die halboffene Topologie ist also eine Erweiterung (oder Verfeinerung, wie man sagt) der euklidischen Topologie. Für alle $a < b$ gilt

$$[a, b[= \mathbb{R} - (]-\infty, a[\cup [b, \infty[),$$

sodass also jedes Intervall $[a, b[$ nicht nur offen, sondern auch abgeschlossen ist.

- (4) Für jede Menge X erzeugt $\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ die Topologie $\mathcal{U} = \mathcal{P}(X)$ auf X . Sie stimmt mit der von der diskreten Metrik auf X erzeugten Topologie überein und heißt die *diskrete Topologie* auf X .
- (5) Für jede Menge X erzeugt $\mathcal{S} = \{ \emptyset \}$ die Topologie $\mathcal{U} = \{ \emptyset, X \}$. Das System $\mathcal{B} = \{ X \}$ ist eine Basis dieser Topologie.

Metrisierbarkeit von topologischen Räumen

Wir gehen nun der Frage nach, welche topologischen Räume von einer Metrik herkommen.

Definition (Metrisierbarkeit)

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{U}) heißt *metrisierbar*, falls eine Metrik d auf X existiert, sodass \mathcal{U} die von d erzeugte Topologie ist. Eine derartige Metrik d heißt *kompatibel* mit der Topologie \mathcal{U} .

Bei einer metrisierten Topologie stehen zusätzlich zu den topologischen Begriffen auch alle metrischen Begriffe zur Verfügung. Die Weite und Bedeutung der metrischen Räume wird durch den folgenden tiefen Satz erkennbar, den wir hier ohne Beweis angeben.

Satz (Metrisierbarkeitssatz von Urysohn)

Sei (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum mit:

- (a) (X, \mathcal{U}) besitzt eine abzählbare Basis.
- (b) Für alle $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen.
- (c) Für alle $x \in X$ und offenen U mit $x \in U$ gibt es ein offenes V mit $x \in V$ und $\text{cl}(V) \subseteq U$.

Dann ist (X, \mathcal{U}) metrisierbar.

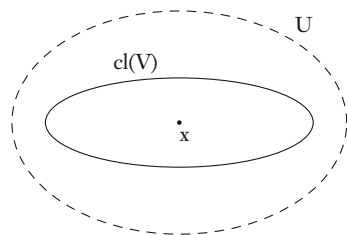


Illustration der dritten
Bedingung im Satz von Urysohn

Das Ergebnis ist modulo der ersten Bedingung optimal, denn in jedem metrischen Raum gelten (b) und (c). Überraschend ist, dass die Bedingung (a) nicht durch die Separabilität von (X, \mathcal{U}) ersetzt werden kann. Dies zeigt:

Beispiel: Nichtmetrisierbarkeit der halboffenen Topologie

Der topologische Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_l)$ ist separabel, besitzt aber keine abzählbare Basis. Insbesondere ist $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_l)$ nicht metrisierbar.

Zum Beweis beobachten wir, dass \mathbb{Q} dicht in $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_l)$ ist, da jedes Intervall $[a, b[$ mit $a < b$ eine rationale Zahl enthält. Ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_l$ abzählbar, so gibt es wegen der Überabzählbarkeit von \mathbb{R} ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq \inf(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Dann gibt es aber kein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq [a, a + 1[$ und $a \in B$. Also ist \mathcal{B} keine Basis des Raumes. Damit ist $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_l)$ nicht metrisierbar, denn in metrischen Räumen impliziert die Separabilität die Existenz einer abzählbaren Basis.

In (X, \mathcal{U}_l) gelten dagegen (b) und (c) im Satz von Urysohn. Denn für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\{x\}$ abgeschlossen (da \mathcal{U}_l die euklidische Topologie enthält), und ist U offen mit $x \in U$, so gibt es $a < b$ mit $x \in [a, b[= \text{cl}([a, b]) \subseteq U$ (denn jedes Intervall $[a, b[$ ist offen und abgeschlossen in \mathcal{U}_l).

Die topologische Stetigkeit, II

Die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt lässt sich in topologischen Räumen mit Hilfe von Umgebungen formulieren:

Definition (*stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen*)

Eine Abbildung $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *stetig* in einem Punkt $p \in X$, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(p)$ in Y unter f eine Umgebung von p in X ist.

Die topologischen Formulierungen (b) – (e) der Stetigkeit einer Funktion in allen Punkten haben unverändert Gültigkeit (vgl. den Satz in „Topologische Stetigkeit“ oben). Weiter genügt es, offene Basis-Mengen zu betrachten: Ist \mathcal{B} eine Basis von \mathcal{V} , so ist $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ genau dann stetig in $p \in X$, wenn das Urbild jedes $V \in \mathcal{B}$ mit $f(p) \in V$ eine Umgebung von p in (X, \mathcal{U}) ist.

Ein Analogon zu Limesstetigkeit gilt dagegen im Allgemeinen nicht mehr. Wir diskutieren dies im folgenden Ausblick.

Beispiele

- (1) Ist $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ konstant, so ist f stetig (denn aufgrund der Konstanz gilt $f^{-1}[V] \in \{\emptyset, X\}$ für alle $V \in \mathcal{V}$, und $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{U}$).
- (2) Sind \mathcal{U}, \mathcal{V} Topologien auf einer Menge X , so ist die Identität $\text{id}: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (X, \mathcal{V})$ genau dann stetig, wenn $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.
- (3) Seien \mathcal{U}_1 und \mathcal{U} die nach rechts halboffene bzw. euklidische Topologie auf \mathbb{R} . Weiter seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:
 - (a) $f: (\mathbb{R}, \mathcal{U}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ ist stetig in p .
 - (b) $\lim_{x \downarrow p} f(x) = f(p)$ (unter der euklidischen Metrik).

(Der Beweis erfolgt nach dem üblichen Muster und kann dem Leser überlassen bleiben.) Damit ist zum Beispiel $1_P: (\mathbb{R}, \mathcal{U}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ stetig für $P = [0, 1[$, aber unstetig für $P = [0, 1],]0, 1],]0, 1[$.

- (4) Sei X eine Menge, und sei

$$\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid X - U \text{ ist endlich}\}.$$

Dann ist (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum. \mathcal{U} heißt die *koendliche Topologie* auf X . Hier sind außer X genau die endlichen Mengen abgeschlossen. Sind X, Y Mengen, so ist ein nichtkonstantes $f: X \rightarrow Y$ unter den koendlichen Topologien auf X und Y genau dann stetig, wenn f fast injektiv ist, d. h., wenn $f^{-1}[\{y\}]$ für alle $y \in Y$ endlich ist. Denn dies ist gleichwertig zur Endlichkeit der Urbilder endlicher Teilmengen von Y , sodass die Charakterisierung „die Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen“ der Stetigkeit die Behauptung liefert.

Ausblick: Konvergenz in topologischen Räumen

Die Definition „ $\lim_n x_n = x$ “ in metrischen Räumen macht durch „ $d(x, x_n) < \varepsilon$ “ von der Metrik gebraucht. Der Einsatz der Metrik lässt sich jedoch vermeiden:

Definition (*topologische Grenzwertdefinition für Folgen*)

Sei (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum. Dann *konvergiert* eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gegen ein $x \in X$, falls gilt:

Für jede Umgebung U von x gibt es ein n_0 , sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.
(*topologische Konvergenzbedingung*)

Wir schreiben wieder $\lim_n x_n = x$, halten aber fest, dass ein Limes einer Folge in einem topologischen Raum nicht immer eindeutig bestimmt ist. In der trivialen Topologie $\{\emptyset, X\}$ auf einer beliebigen Menge X konvergiert zum Beispiel jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gegen jedes $x \in X$. Denn ist $x \in X$, so ist X die einzige Umgebung von x . Die Eindeutigkeit des Grenzwerts einer Folge gilt jedoch für die folgende große Klasse von topologischen Räumen:

Definition (*Hausdorff-Raum*)

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{U}) heißt ein *Hausdorff-Raum* und \mathcal{U} eine *Hausdorff-Topologie* auf X , falls gilt:

Für alle $x, y \in X$ gibt es $U, V \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.
(*Hausdorffsche Trennungseigenschaft*)

Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum. Umgekehrt kann die Trennungseigenschaft manche $\varepsilon/2$ -Argumente ersetzen. Dass je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen genügt zum Beispiel für die Eindeutigkeit des Grenzwerts und dafür, dass jede Einermenge $\{x\}$ abgeschlossen ist.

Beispiele

- (1) Die Topologie \mathcal{U}_I auf \mathbb{R} ist Hausdorffsch, da für alle $a < b$ in \mathbb{R} die Intervalle $[a, b]$, $[b, b+1[$ disjunkte offene Mengen sind. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} konvergiert genau dann gegen x , wenn in jedem Intervall $[x, x + \varepsilon[$ fast alle Folgenglieder liegen. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend gegen x konvergiert. Dagegen konvergiert zum Beispiel $(-1/n)_{n \geq 1}$ nicht gegen 0 in dieser Topologie.
- (2) Sei X eine unendliche Menge, und sei \mathcal{U} die koendliche Topologie auf X . Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine injektive Folge in X und $x \in X$ beliebig, so gilt $\lim_n x_n = x$, denn außerhalb jeder offenen Umgebung U von x liegen nur endlich viele Glieder der Folge, da $X - U$ endlich ist. Die Topologie \mathcal{U} ist nicht Hausdorffsch, da für alle $x, y \in X$ offene U, V mit $x \in U$, $y \in V$ unendlich sind und also für $x \neq y$ nicht disjunkt sein können.

(3) Sei X eine Menge und

$$\mathcal{U} = \{ \emptyset \} \cup \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U \text{ ist abzählbar} \}$$

die *koabzählbare Topologie* auf X . Gilt $\lim_n x_n = x$ in (X, \mathcal{U}) , so ist die offene Menge $U = \mathbb{R} - \{ x_n \mid x_n \neq x \}$ eine Umgebung von x . Also gibt es ein n_0 mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt aber $x_n = x$ für alle $n \geq n_0$ nach Definition von U . Da schließlich konstante Folgen in jeder Topologie konvergieren, sind die konvergenten Folgen in (X, \mathcal{U}) also genau die schließlich konstanten Folgen. Die Topologie \mathcal{U} ist nicht Hausdorffsch, wenn X überabzählbar ist.

Von den metrischen Räumen sind wir die Äquivalenz der Umgebungsstetigkeit und der Limesstetigkeit gewohnt. Für beliebige topologische Räume impliziert die Limesstetigkeit im Allgemeinen nicht mehr die Stetigkeit:

Beispiel

Seien \mathcal{U} und \mathcal{U}_{euk} die koabzählbare bzw. euklidische Topologie auf \mathbb{R} . Dann ist $\text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\text{euk}})$ nicht stetig, da zum Beispiel $]0, 1[= \text{id}^{-1}(]0, 1[)$ nicht offen in \mathcal{U} ist. Die Limesstetigkeit gilt, da konvergente Folgen in $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ schließlich konstant sind.

Bemerkenswerterweise gibt es aber eine Verallgemeinerung der Limesstetigkeit, die punktweise äquivalent zur topologischen Stetigkeit ist (entdeckt von Eliakim Moore und Herman Smith 1922). Hierzu wird die Index-Menge \mathbb{N} einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch allgemeinere Strukturen ersetzt:

Definition (gerichtete Menge)

Sei I eine Menge, und sei \leq eine reflexive und transitive Relation auf I . Dann heißt (I, \leq) *gerichtet*, falls für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ existiert mit $i, j \leq k$. Gilt $i \leq j$ in I , so sagen wir auch, dass j *nach* i in I kommt.

Damit definieren wir nun:

Definition (Netz)

Seien X eine Menge und (I, \leq) gerichtet. Dann heißt eine I -Folge $(x_i)_{i \in I}$ in X ein *Netz* in X .

Die topologische Konvergenzbedingung für Folgen lässt sich nun ganz analog für Netze formulieren:

Definition (Konvergenz eines Netzes)

Sei (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum. Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X heißt *konvergent* gegen ein $x \in X$ in (X, \mathcal{U}) , falls gilt:

Für jede Umgebung U von x existiert ein i_0 , sodass $x_i \in U$ für alle $i \geq i_0$.
(Konvergenzbedingung für Netze)

Die Eindeutigkeit eines Netz-Grenzwerts ist erneut nur dann gewährleistet, wenn (X, \mathcal{U}) ein Hausdorff-Raum ist.

Beispiel

Sei (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum, und sei $p \in X$. Sei

$$I = \{ U \in \mathcal{U} \mid p \in U \}$$

die Menge der offenen Umgebungen von p . Dann ist (I, \supseteq) gerichtet. In I kommt ein U nach einem V , wenn U eine Teilmenge von V ist. „Spätere“ Elemente sind also kleiner, und „ab U_0 “ bedeutet „für alle $U \subseteq U_0$ “.

Ist nun $(x_U)_{U \in I}$ ein Netz in X mit $x_U \in U$ für alle $U \in I$, so gilt

$$\lim_{U \in I} x_U = p.$$

Denn für jede Umgebung N von p existiert ein $U_0 \in I$ mit $U_0 \subseteq N$, und dann gilt $x_U \in N$ für alle $U \in I$ nach U_0 . Es gilt also $x_U \in N$ ab U_0 .

Die Netze dieses Beispiels spielen eine wichtige Rolle im folgenden Beweis.

Satz (Äquivalenz der topologischen Stetigkeit und der Netzstetigkeit)

Sei $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$, und sei $p \in X$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist stetig in p .
- (b) Für jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X gilt:

$$\lim_{i \in I} x_i = p \text{ impliziert } \lim_{i \in I} f(x_i) = f(p).$$

Beweis

(a) impliziert (b):

Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X mit $\lim_{i \in I} x_i = p$. Weiter sei $V \in \mathcal{V}$ mit $f(p) \in V$. Da f stetig in p ist, gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $p \in U$ und $f(x) \in V$ für alle $x \in U$. Wegen $\lim_{i \in I} x_i = p$ gibt es dann ein $i_0 \in I$ mit $x_i \in U$ für alle $i \geq i_0$. Dann gilt aber $f(x_i) \in V$ für alle $i \geq i_0$. Dies zeigt, dass $\lim_{i \in I} f(x_i) = f(p)$.

(b) impliziert (a):

Annahme, f ist nicht stetig in p . Dann existiert ein $V \in \mathcal{V}$, sodass für alle $U \in \mathcal{U}$ mit $p \in U$ ein $x_U \in U$ existiert mit $f(x_U) \notin V$. Dies definiert ein Netz $(x_U)_{U \in I}$ in X mit I wie im Beispiel oben. Dann gilt $\lim_{U \in I} x_U = p$ und nach (b) also $\lim_{U \in I} f(x_U) = f(p)$. Also existiert ein $U_0 \in I$, sodass

— sodass $f(x_U) \in V$ für alle $U \subseteq U_0$, im Widerspruch zur Definition von x_U .

Auch andere Limesformulierungen der Theorie der metrischen Räume lassen sich verallgemeinern. So gilt zum Beispiel: Ist (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum, so ist ein $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen, wenn für jedes Netz in A , das in (X, \mathcal{U}) gegen ein $x \in X$ konvergiert, gilt, dass $x \in A$. Die abgeschlossenen Mengen in topologischen Räumen sind also genau die Mengen, die abgeschlossen unter der Konvergenz von Netzen sind.

5. Kompaktheit in \mathbb{R}

In diesem Kapitel lernen wir einen neuen topologischen Grundbegriff kennen, den der Kompaktheit. Er ist aufgrund seines abstrakten mengentheoretischen Charakters zwar etwas gewöhnungsbedürftig, aber es lässt sich mit ihm nach kurzer Zeit sehr elegant argumentieren. Wir betrachten zunächst kompakte Teilmengen des Kontinuums und erhalten so einen höheren Einblick in die topologische Natur der Intervalle $[a, b]$ und der besonderen Eigenschaften der stetigen Funktionen auf diesen Intervallen. Im nächsten Kapitel betrachten wir dann kompakte Mengen in allgemeinen metrischen Räumen.

Überdeckungen

Wir beginnen mit einer abstrakten, dabei aber einfachen Definition.

Definition (*Überdeckung*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$, und sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, d.h., \mathcal{U} ist eine Menge von Teilmengen von \mathbb{R} . Dann heißt \mathcal{U} eine *Überdeckung* von P , falls gilt:

$$P \subseteq \bigcup \mathcal{U} = \{x \mid \text{es gibt ein } U \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in U\}.$$

Eine Überdeckung \mathcal{U} von P heißt *offen*, falls jedes $U \in \mathcal{U}$ offen ist.

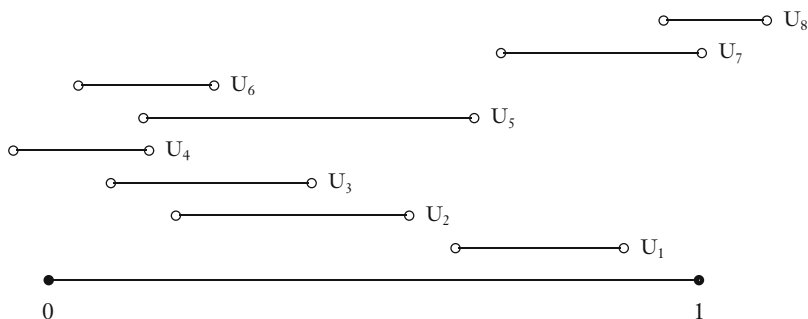
Ein Mengensystem \mathcal{U} ist also eine Überdeckung von P , falls jedes Element von P in mindestens einer Menge des Systems als Element enthalten ist. Die Mengen in \mathcal{U} müssen dabei nicht paarweise disjunkt sein.

Einige allgemeine Eigenschaften von Überdeckungen sind:

- (4) Jedes $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist eine Überdeckung von $\bigcup \mathcal{U}$.
- (5) Ist \mathcal{U} eine Überdeckung von P , und sind $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}$ und $Q \subseteq P$, so ist \mathcal{V} eine Überdeckung von Q .
- (6) Ist \mathcal{U} eine Überdeckung von P und \mathcal{V} eine Überdeckung von Q , so ist $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ eine Überdeckung von $P \cup Q$.
- (7) $\{P\}$ ist eine Überdeckung von P , da $P = \bigcup \{P\}$.
- (8) Jedes $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist eine Überdeckung von \emptyset , da $\emptyset \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Insbesondere sind \emptyset und $\{\emptyset\}$ offene Überdeckungen von \emptyset .

Beispiele für offene Überdeckungen

- (1) Für alle $\varepsilon > 0$ ist $\{ U_\varepsilon(q) \mid q \in \mathbb{Q} \}$ eine offene Überdeckung von \mathbb{R} . Allgemeiner gilt dies, wenn \mathbb{Q} durch eine dichte Menge ersetzt wird.
- (2) Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$, so ist $\mathcal{U} = \{ f^{-1}[U_\varepsilon(y)] \mid y \in \mathbb{R} \}$ eine offene Überdeckung von \mathbb{R} . Allgemeiner gilt: Ist \mathcal{V} eine offene Überdeckung von \mathbb{R} , so auch $\mathcal{U} = \{ f^{-1}[V] \mid V \in \mathcal{V} \}$.



$\mathcal{U} = \{ U_1, \dots, U_8 \}$ ist eine Überdeckung des abgeschlossenen Einheitsintervalls $[0, 1]$ mit endlich vielen offenen Intervallen. Auch $\mathcal{U} - \{ U_3 \}$ ist eine Überdeckung, das Intervall U_3 ist in diesem Sinne also überflüssig.

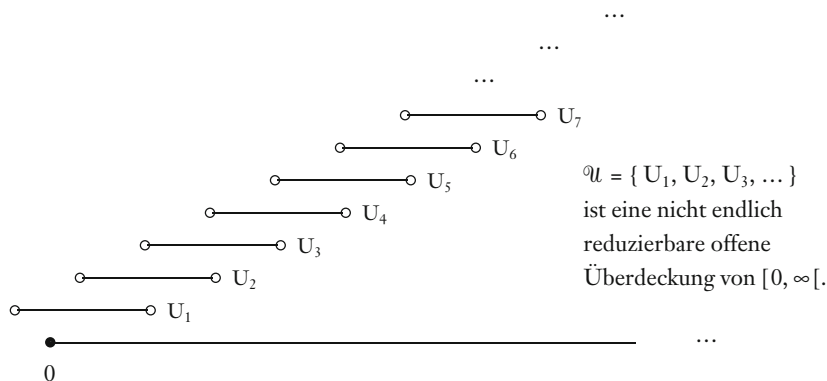
Wir werden sehen, dass viele offene Überdeckungen einen unnötigen Ballast beinhalten. Hierzu definieren wir:

Definition (*endlich reduzierbar, endliche Teilüberdeckung*)

Sei \mathcal{U} eine Überdeckung von P . Dann heißt \mathcal{U} *endlich reduzierbar* (bzgl. P), falls $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ existieren mit

$$P \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n.$$

Die Menge $\{ U_1, \dots, U_n \}$ heißt dann eine *endliche Teilüberdeckung* von P in \mathcal{U} .



Offene Überdeckungen kompakter Intervalle

Ein instruktives Beispiel zur Reduzierbarkeit einer offenen Überdeckung liefert, gegeben ein $\varepsilon > 0$, die offene Überdeckung

$$\mathcal{U} = \{ U_\varepsilon(q) \mid q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \}$$

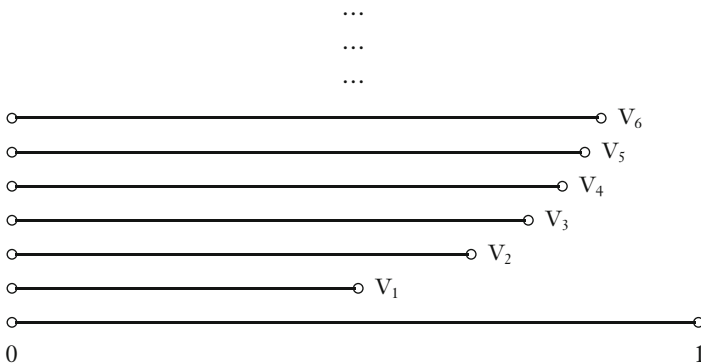
von $[0, 1]$. Diese Überdeckung ist endlich reduzierbar. Denn sei $r \in]0, \varepsilon[\cap \mathbb{Q}$ und n derart, dass $nr \leq 1$ und $(n+1)r > 1$. Dann gilt

$$[0, 1] \subseteq U_\varepsilon(0) \cup U_\varepsilon(r) \cup U_\varepsilon(2r) \cup \dots \cup U_\varepsilon(nr).$$

Also ist $\{ U_\varepsilon(0), \dots, U_\varepsilon(nr) \} \subseteq \mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung von \mathcal{U} . Liegt die Reduzierbarkeit von \mathcal{U} in diesem Beispiel an der Wahl der Überdeckung \mathcal{U} oder an der Natur des abgeschlossenen Intervalls $[0, 1]$? Überdecken wir das offene Intervall $]0, 1[$ wie im folgenden Diagramm dargestellt durch

$$\mathcal{V} = \{ V_n \mid n \geq 1 \} \quad \text{mit} \quad V_n =]0, n/(n+1)[\quad \text{für alle } n \geq 1,$$

so ist \mathcal{V} nicht endlich reduzierbar.



$\mathcal{V} = \{ V_1, V_2, V_3, \dots \}$ ist eine nicht endlich reduzierbare offene Überdeckung von $]0, 1[$.

Der Leser möge nun versuchen, eine offene Überdeckung von $[0, 1]$ zu konstruieren, die nicht endlich reduzierbar ist. Er wird sehen, dass die beiden Randpunkte 0 und 1 des Intervalls bei dieser Aufgabe eine große Rolle spielen. Wir müssen diese beiden Punkte in unserer Konstruktion durch offene Mengen überdecken, wodurch Limesannäherungen wie in \mathcal{V} endlich reduzierbar werden. Und so sehr wir uns winden und Limespunkte verlagern und die Komplexität der Überdeckung erhöhen: Es klappt nicht. Immer erhalten wir eine offene Überdeckung von $[0, 1]$, die endlich reduzierbar ist. Warum es nicht klappen kann, zeigt der folgende Beweis.

Satz (*offene Überdeckungen kompakter Intervalle*)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, und sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von $[a, b]$.
Dann ist \mathcal{U} endlich reduzierbar.

Beweis

Wir setzen:

$$S = \{ x \in [a, b] \mid \mathcal{U} \text{ ist eine endlich reduzierbare Überdeckung von } [a, x] \}.$$

Wir zeigen, dass $b \in S$ gilt. Wegen $a \in S$ ist S eine nichtleere Teilmenge der beschränkten Menge $[a, b]$, also existiert

$$s = \sup(S) \in [a, b].$$

Sei nun $U \in \mathcal{U}$ mit $s \in U$. Da s das Supremum von S und U offen ist, gibt es ein $x \in S$ mit $[x, s] \subseteq U$. Wegen $x \in S$ existieren $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$[a, x] \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n.$$

Wegen $[x, s] \subseteq U$ ist dann aber

$$[a, s] \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n \cup U,$$

und damit ist $s \in S$ nach Definition von S . Weiter gilt $s = b$, da sonst $[a, s + \varepsilon] \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n \cup U$ für ein $\varepsilon > 0$ mit $s + \varepsilon < b$ gelten würde,

– im Widerspruch zu $s = \sup(S)$. Also ist $b \in S$, woraus die Behauptung folgt.

Der topologische Kompaktheitsbegriff

Motiviert durch obige Überlegungen definieren wir:

Definition (*kompakt*)

Ein $C \subseteq \mathbb{R}$ heißt (*topologisch*) *kompakt*, falls gilt:

Jede offene Überdeckung von C ist endlich reduzierbar.

Der obige Satz besagt gerade, dass die kompakten Intervalle $[a, b]$ in \mathbb{R} auch kompakt im Sinne dieser topologischen Definition sind.

Die Definition der Kompaktheit hat den Typus „ $\forall \exists$ “. Zum Nachweis der Kompaktheit einer Menge C betrachtet man eine beliebige offene Überdeckung \mathcal{U} der Menge C und zeigt, dass endlich viele Elemente von \mathcal{U} genügen, die Menge C zu überdecken. Weiß man dagegen, dass C kompakt ist, so lässt sich jede offene Überdeckung von C endlich reduzieren. Man kann also Eigenschaften von C nachweisen, indem man eine geeignete offene Überdeckung \mathcal{U} von C konstruiert und dann verwendet, dass \mathcal{U} endlich reduzierbar ist. Die Kompaktheit bringt in dieser Weise einen ganz neuen Argumentationstyp ins Spiel. Durch die endliche Reduzierbarkeit erhalten kompakte Mengen den Charakter endlicher Mengen.

Ein Blick auf die Definition zeigt, dass jede endliche Menge kompakt ist. Weiter ist eine endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt, da die Vereinigung von endlich vielen endlichen Mengen wieder endlich ist. Dagegen ist \mathbb{N} nicht kompakt, da $\mathcal{U} = \{ U_{1/2}(a) \mid a \in \mathbb{N} \}$ eine offene Überdeckung von \mathbb{N} ist, die nicht endlich reduzierbar ist. Varianten der Konstruktion der obigen Überdeckung \mathcal{V} von $]0, 1[$ liefern, dass alle Intervalle $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ mit $a < b$ nicht kompakt sind. Auf der positiven Seite können wir vermelden:

Satz (*abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen*)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, und sei $A \subseteq C$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt.

Beweis

Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von A . Da A abgeschlossen ist, ist $V = \mathbb{R} - A$ offen, und damit ist $\mathcal{U} \cup \{V\}$ eine offene Überdeckung von C . Also gibt es $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$C \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n \cup V.$$

Wegen $A \cap V = \emptyset$ und $A \subseteq C$ ist dann aber

$$\text{— } A \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n.$$

Damit sind alle abgeschlossenen Teilmengen eines Intervalls $[a, b]$ kompakt. Beispielsweise ist die Cantor-Menge $C \subseteq [0, 1]$ kompakt.

Zur Illustration der Kompaktheitsargumentation zeigen wir noch einmal:

Satz (*Satz von Bolzano-Weierstraß*)

Jede unendliche beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis

Sei P eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} , die keinen Häufungspunkt besitzt. Wir zeigen, dass P endlich ist. Nach Voraussetzung gilt $P' = \emptyset \subseteq P$. Also ist P eine abgeschlossene Teilmenge eines Intervalls $[-n, n]$ und damit kompakt. Da P keinen Häufungspunkt besitzt, existiert für alle $p \in P$ eine offene Umgebung U_p von p mit

$$(+)\ U_p \cap P = \{p\}.$$

Dann ist $\mathcal{U} = \{U_p \mid p \in P\}$ eine offene Überdeckung von P . Also existieren $p_1, \dots, p_n \in P$ mit

$$P \subseteq U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n}.$$

$$\text{— Nach (+) ist dann } P = \{p_1, \dots, p_n\}.$$

Der Leser vergleiche dieses Argument mit dem ursprünglichen Beweis der wiederholten Halbierung von Intervallen!

Charakterisierung der kompakten Teilmengen von \mathbb{R}

Die kompakten Teilmengen der reellen Zahlen besitzen eine überraschend einfache Charakterisierung. Das Argument des folgenden berühmten Satzes wird von der Kompaktheit der Intervalle $[a, b]$ getragen. Wir müssen nur noch einige Beobachtungen hinzufügen.

Satz (*Satz von Heine-Borel*)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) C ist kompakt.
- (b) C ist abgeschlossen und beschränkt.

Beweis

(a) *impliziert* (b): Sei also C kompakt. Zum Beweis der Abgeschlossenheit von C sei p ein Häufungspunkt von C . Wir zeigen, dass $p \in C$. Hierzu betrachten wir

$$\mathcal{V} = \{ \mathbb{R} - \text{cl}(U) \mid U \text{ ist eine Umgebung von } p \}.$$

\mathcal{V} ist eine offene Überdeckung von $C - \{p\}$, die bzgl. $C - \{p\}$ nicht endlich reduzierbar ist: Wäre $C - \{p\} \subseteq (\mathbb{R} - \text{cl}(U_1)) \cup \dots \cup (\mathbb{R} - \text{cl}(U_n))$ mit Umgebungen U_1, \dots, U_n von p , so wäre $C \cap (U_1 \cap \dots \cap U_n) = \{p\}$, also p kein Häufungspunkt von C . Da C kompakt und $C - \{p\}$ nicht kompakt ist, gilt $C \neq C - \{p\}$ und damit $p \in C$.

Zum Beweis der Beschränktheit von C betrachten wir ein beliebiges $p \in \mathbb{R}$ und die offene Überdeckung

$$\mathcal{V} = \{ U_n(p) \mid n \geq 1 \}$$

von C . Aufgrund der Kompaktheit von C gibt es $n_1 < \dots < n_k$ mit

$$C \subseteq U_{n_1}(p) \cup \dots \cup U_{n_k}(p) = U_{n_k}(p).$$

Also ist C beschränkt.

(b) *impliziert* (a): Die Aussage ist klar für $C = \emptyset$. Sei also $C \neq \emptyset$, und seien

$$a = \inf(C), \quad b = \sup(C).$$

Dann ist C eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $[a, b]$ und damit kompakt nach dem obigen Satz.

Der Beweis von „(a) impliziert (b)“ zieht keine speziellen kompakten Mengen heran. Dagegen beruht die andere Implikation wesentlich auf der Kompaktheit der abgeschlossenen Intervalle in \mathbb{R} .

Stetige Bilder kompakter Mengen

Der Extremwertsatz von Weierstraß, den wir in Band 1 für kompakte Intervalle $[a, b]$ bewiesen hatten, lässt sich sehr elegant durch Reduzierung offener Überdeckungen beweisen. Wir zeigen stärker und mit neuen Argumenten:

Satz (*Kompakte Bilder und Annahme von Maximum und Minimum*)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, und sei $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f[C]$ kompakt. Ist also $C \neq \emptyset$, so nimmt f ihr Minimum und ihr Maximum an.

Beweis

Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von $f[C]$. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es für alle $U \in \mathcal{U}$ ein offenes $U^* \subseteq \mathbb{R}$ mit $f^{-1}[U] = U^* \cap C$. Damit ist

$$\mathcal{U}^* = \{ U^* \mid U \in \mathcal{U} \}$$

eine offene Überdeckung von C . Also existieren $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$C \subseteq U_1^* \cup \dots \cup U_n^*.$$

Dann ist aber $f[C] \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$ und damit \mathcal{U} endlich reduzierbar.

Also ist $f[C]$ kompakt und damit abgeschlossen und beschränkt. Ist also

– $C \neq \emptyset$, so gilt $f[C] \neq \emptyset$ und $\inf(f[C]), \sup(f[C]) \in f[C]$.

Kurz:

Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Funktion ist kompakt.

Die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 1/x \quad \text{für alle } x$$

zeigen dagegen, dass stetige Bilder offener Mengen nicht offen und stetige Bilder abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen sein müssen. Aufgrund des Satzes von Heine-Borel sind stetige Bilder abgeschlossener beschränkter Mengen abgeschlossen (und beschränkt), sodass die Unbeschränktheit des Definitionsbereichs unvermeidbar für ein Gegenbeispiel wie g ist.

Zusammen mit dem topologischen Beweis des Zwischenwertsatzes haben wir also neu bewiesen, dass eine stetige Funktion ein kompaktes Intervall auf ein kompaktes Intervall abbildet: Die Stetigkeit erhält den Zusammenhang, sodass ein stetiges Bild von $[a, b]$ ein Intervall ist. Da auch die Kompaktheit erhalten bleibt, ist das Bildintervall kompakt, also von der Form $[c, d]$. Eine stetige Funktion kann $[a, b]$ dehnen, stauchen, falten und kompliziert „verkneten“, aber nicht zerreißen, nicht unendlich dehnen und auch kein Bild erzeugen, das seine Randpunkte nicht enthalten würde. Die Randpunkte a, b können ins Innere des Bildes wandern, aber dann werden gewisse Punkte $a', b' \in]a, b[$ zu Randpunkten des Bildes. Das Gleiche gilt auch für eine kompakte Menge $C \subseteq \mathbb{R}$, die kein Intervall

ist. Auch hier ist kein stetiges Bild $f[C]$ mit einem „abgefeilten Rand“ möglich, denn da $f[C]$ kompakt und damit abgeschlossen ist, gilt $\text{cl}(f[C]) \subseteq f[C]$.

Aus der Kompaktheit stetiger Bilder erhalten wir:

Korollar (*Homöomorphiesatz für \mathbb{R}*)

Seien $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: C \rightarrow D$ stetig und bijektiv. Dann ist $f^{-1}: D \rightarrow C$ stetig.

Beweis

Sei $g = f^{-1}$. Ist $A \subseteq C$ abgeschlossen, so ist A kompakt, also $f[A] = g^{-1}[A]$ kompakt. Also sind die Urbilder abgeschlossener Mengen unter g

- abgeschlossen, sodass g stetig ist.

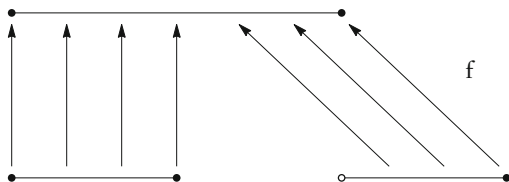
Zwei metrische oder allgemeiner topologische Räume heißen *homöomorph*, wenn es eine stetige Bijektion zwischen diesen Räumen gibt, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Die Räume sind dann aus topologischer Sicht gleich. Dies erklärt die Namensgebung des Satzes: Ist der Definitionsbereich kompakt, so ist die Umkehrabbildung automatisch stetig. Dass dies nicht immer der Fall ist, hatten wir in der Kreisaufwicklung $f: [0, 2\pi[\rightarrow K$ schon gesehen (vgl. 2.3). Aber auch für \mathbb{R} gibt es Gegenbeispiele:

Beispiel

Sei $f: [0, 1] \cup]2, 3] \rightarrow [0, 2]$ die Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0, 1], \\ x - 1, & \text{falls } x \in]2, 3]. \end{cases}$$

Dann ist f stetig und bijektiv, aber f^{-1} ist unstetig im Punkt 1. Die Funktion f erhält Nähe, führt aber neue Nähebeziehungen ein, indem sie den Punkt 1 an das Intervall $]2, 3]$ heranführt oder anklebt.



Ist der Definitionsbereich jedoch ein Intervall, so ist die Umkehrabbildung auch im nichtkompakten Fall automatisch stetig:

Satz (*Homöomorphiesatz für reelle Intervalle*)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $J \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f: I \rightarrow J$ stetig und bijektiv. Dann ist J ein Intervall und $f^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Beweis

Da I zusammenhängend und f stetig ist, ist J zusammenhängend und also ein

- Intervall. Die Bijektion $f^{-1}: J \rightarrow I$ ist wie f streng monoton und also stetig.

Während der erste Homöomorphiesatz auf der Kompaktheit des Definitionsbereichs beruht, so beruht der zweite Satz auf dem Zusammenhang des Definitionsbereichs und der linearen Struktur von \mathbb{R} . Die Kreisaufwicklung zeigt, dass der Zusammenhang des Definitionsbereichs einer stetigen Bijektion für die Stetigkeit der Umkehrfunktion im Allgemeinen nicht genügt.

Es ist instruktiv, unsere Ergebnisse auf die Cantor-Menge anzuwenden.

Satz (*stetige Funktionen auf der Cantor-Menge*)

Für die Cantor-Menge $C \subseteq [0, 1]$ gilt:

- (a) Es gibt keine stetige Surjektion $f : C \rightarrow]0, 1[$. Gleiches gilt für die Wertebereiche $]0, 1]$ und $[0, 1[$.
- (b) Es gibt keine stetige Bijektion $f : C \rightarrow [0, 1]$.
- (c) Es gibt eine stetige Surjektion $f : C \rightarrow [0, 1]$ mit den Eigenschaften:
 - (i) Jedes $y \in [0, 1]$ besitzt höchstens zwei Urbilder unter f .
 - (ii) Die Menge $\{a \in C \mid \text{es gibt ein } b \neq a \text{ mit } f(a) = f(b)\}$ ist abzählbar.

Beweis

zu (a):

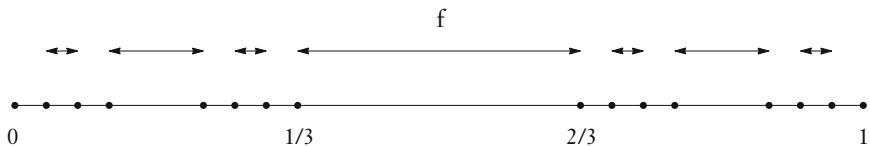
Die Intervalle $]0, 1[$, $]0, 1]$ und $[0, 1[$ sind nicht kompakt und damit keine stetigen Bilder von C .

zu (b):

Wäre $f : C \rightarrow [0, 1]$ stetig und bijektiv, so wäre $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow C$ stetig nach dem Homöomorphiesatz. Da $[0, 1]$ zusammenhängend ist, wäre also auch C zusammenhängend, was nicht der Fall ist.

zu (c):

Sei $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ die Teufelstreppe (vgl. 2.1), und sei $f = g|_C$. Dann ist $f : C \rightarrow [0, 1]$ stetig und surjektiv. Für alle $a, b \in [0, 1]$ mit $a < b$ gilt $f(a) = f(b)$ genau dann, wenn $[a, b]$ ein Drittelintervall der Konstruktion von C ist.



Die stetige „fast-injektive“ Surjektion $f : C \rightarrow [0, 1]$ in (c) kann man topologisch so beschreiben: Man identifiziert die Randpunkte der Drittelintervalle der Konstruktion der Cantor-Menge. Im nächsten Abschnitt werden wir stetige Surjektionen auf C , die Werte im \mathbb{R}^n annehmen, betrachten und zur Konstruktion von Peano-Kurven verwenden (vgl. 3.1).

Der Satz von Heine

Auch die automatische gleichmäßige Stetigkeit stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen ist ein Kompaktheitsphänomen:

Satz (*gleichmäßige Stetigkeit, Satz von Heine*)

Sei $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und C kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, gibt es für alle $p \in C$ ein $\delta(p) > 0$ mit

$$(+)\quad \forall x, y \in U_{\delta(p)}(p) \cap C \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wir überdecken nun C offen durch

$$\mathcal{U} = \{ U_{\delta(p)/2}(p) \mid p \in C \}.$$

Da C kompakt ist, gibt es $p_1, \dots, p_n \in C$ mit

$$(++)\quad C \subseteq U_{\delta(p_1)/2}(p_1) \cup \dots \cup U_{\delta(p_n)/2}(p_n).$$

Nun ist

$$\delta = \min_{1 \leq k \leq n} \delta(p_k)/2$$

wie gewünscht, d. h., es gilt

$$\forall x, y \in C \quad (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Denn sind $x, y \in C$ mit $|x - y| < \delta$, so gibt es nach (++) ein $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$ mit $x \in U_{\delta(p)/2}(p)$. Wegen $|x - y| < \delta \leq \delta(p)/2$ gilt dann $y \in U_{\delta(p)}(p)$. Nach

– (+) ist also $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Der Leser führe sich noch einmal die ursprünglichen Argumente für den Extremwertsatz von Weierstraß und den Satz von Heine für Definitionsbereiche der Form $[a, b]$ vor Augen. Für den Satz von Weierstraß hatten wir eine gegen das Supremum des Bildes von f konvergente Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine zugehörige Urbildfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter f betrachtet und mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge aus $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ extrahiert, die aufgrund der Limesstetigkeit von f gegen eine Stelle konvergierte, an der f ihr Maximum annahm. Im Beweis des Satz von Heine hatten einen Widerspruch erzeugt, indem wir die Verletzung der gleichmäßigen Stetigkeit von f bezeugende Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß zu konvergenten Teilfolgen reduzierten, an deren Grenzwert f nicht stetig sein konnte. Es ist kein Zufall, dass der Satz von Bolzano-Weierstraß die alten und die topologische Kompaktheit die neuen Beweise trägt. Wir werden diese Korrespondenz im folgenden Kapitel genauer untersuchen.

Ausblick: Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit

Als weitere Anwendung des Kompaktheitsbegriffs beweisen wir nun die im Ausblick zu 1.3 angegebene Charakterisierung der Riemann-integrierbaren Funktionen mit Hilfe von Lebesgue-Nullmengen:

Satz (*Integrierbarkeitskriterium von Lebesgue*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist Riemann-integrierbar.
- (b) $P = \{x \in [a, b] \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.

Wir verwenden die Kompaktheit des Intervalls $[a, b]$ im Beweis von „(b) impliziert (a)“.

Beweis

(a) impliziert (b):

Für alle n sei p_n die äquidistante Partition von $[a, b]$ der Feinheit $(b-a)/2^n$. Weiter seien $g_n = f_{p_n}^s$ und $h_n = f_{p_n}^S$ die der unteren bzw. oberen Darboux-Summe von f bzgl. p_n zugeordneten Treppenfunktionen. Dann konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen ein g und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend gegen ein h . Es gilt $g \leq f \leq h$, und die Funktionen g und h sind Riemann-integrierbar mit $I(g) = I(f) = I(h)$. Wir betrachten die Mengen

$$N = \{x \in [a, b] \mid g(x) < h(x)\},$$

$$S = \{x \in [a, b] \mid f \text{ ist stetig in } x\},$$

$$T = \{t \in [a, b] \mid t \text{ ist ein Zerlegungspunkt einer Partition } p_n\}.$$

Dann gilt

$$[a, b] - N = \{x \in [a, b] \mid g(x) = f(x) = h(x)\} = S \cup T.$$

Wegen $I(h-g) = 0$ und $h-g \geq 0$ ist N eine Nullmenge: Denn ist $s: [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ integrierbar mit $I(s) = 0$, so ist für alle n

$$M_n = \{x \mid s(x) \geq 1/2^n\}$$

eine Nullmenge, und damit ist $\bigcup_n M_n = \{x \mid s(x) > 0\}$ eine Nullmenge.

Da die Menge T abzählbar ist, ist T eine Nullmenge. Folglich ist auch

$$P = [a, b] - S \subseteq N \cup T$$

eine Nullmenge.

(b) impliziert (a):

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $c > 0$ derart, dass $|f|$ beschränkt durch $c/2$ ist, sodass also $|f(x) - f(y)| \leq c$ für alle $x, y \in [a, b]$. Da P eine Nullmenge ist, gibt es offene Intervalle I_n der Länge λ_n mit

$$P \subseteq \bigcup_n I_n \quad \text{und} \quad \sum_n \lambda_n < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Für jedes $p \in S = [a, b] - P$ sei J_p ein offenes Intervall mit $p \in J_p$ und

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{für alle } x, y \in J_p.$$

Dann ist

$$\mathcal{U} = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{J_p \mid p \in S\}$$

eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Da $[a, b]$ kompakt ist, gibt es n_1, \dots, n_k und $p_1, \dots, p_r \in S$ mit

$$[a, b] \subseteq I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_k} \cup J_{p_1} \cup \dots \cup J_{p_r}.$$

Sei $(t_k)_{k \leq n}$ die Zerlegung von $[a, b]$, die durch die Intervallgrenzen dieser endlichen Teilüberdeckung definiert wird. Dann gilt

$$(+)\quad S_p f - s_p f \leq \frac{\varepsilon}{2c} c + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \varepsilon.$$

— Also ist f Riemann-integrierbar.

Der Leser, der über die Ungleichung (+) mit Hilfe einer Skizze nachgedacht hat, wird dem Argument eine gewisse Eleganz nicht absprechen können. Alle Unstetigkeitsstellen von f liegen in sehr kleinen Intervallen der Partition, sodass wir es uns leisten können, die Oszillation von f dort grob durch die Schranke c abzuschätzen. In den anderen Teilen der Partition ist f stetig, und die Definition der J_p garantiert, dass f dort kaum oszilliert.

Aus dem Satz erhalten wir: (1) jedes beschränkte $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen ist Riemann-integrierbar. (2) Die Indikator-Funktion der Cantor-Menge C ist Riemann-integrierbar. (3) Die Komposition $g \circ f$ ist Riemann-integrierbar, wenn g stetig und f Riemann-integrierbar ist (denn die Unstetigkeitsmenge von $g \circ f$ ist eine Teilmenge derer von f).

Der Satz von Lebesgue ist ein schönes Beispiel dafür, wie der „höhere Standpunkt“ einen klaren Blick auf einen wichtigen, aus der Schule bekannten Begriff der Mathematik ermöglicht. Die Stufen, die hier zu nehmen sind, sind beachtlich: Man muss die genaue Definition des Riemann-Integrals kennen, mit den Eigenschaften der approximierenden Treppenfunktionen vertraut sein, den Stetigkeitsbegriff beherrschen und mit offenen Überdeckungen argumentieren können. Und doch ist das Ergebnis insgesamt noch gut zugänglich.

6. Kompakte metrische Räume

Wir übertragen den Kompaktheitsbegriff auf metrische Räume und untersuchen stetige Funktionen auf diesen Räumen.

Kompaktheit in metrischen Räumen

Die Definition der Kompaktheit einer Menge reeller Zahlen verwendet lediglich offene Mengen und keine speziellen Eigenschaften von \mathbb{R} . Sie steht damit unverändert für metrische und allgemeiner topologische Räume zur Verfügung. Wir konzentrieren uns hier auf die metrischen Räume, gehen am Ende aber auf kompakte topologische Räume noch kurz ein.

Definition (*kompakte Teilmenge und kompakte Räume*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $C \subseteq X$. Dann heißt C *kompakt* in (X, d) , falls jede offene Überdeckung von C endlich reduzierbar ist, d. h., ist \mathcal{U} eine Menge offener Teilmengen von X mit $C \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, so gibt es $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $C \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$. Die Menge $\{U_1, \dots, U_n\}$ heißt dann eine *endliche Teilüberdeckung* von C in \mathcal{U} .

Der Raum (X, d) heißt *kompakt*, falls X kompakt in (X, \mathcal{U}) ist.

Wie für das Kontinuum zeigt man:

Satz (*Eigenschaften kompakter Mengen in metrischen Räumen*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

- (a) Jede endliche Teilmenge von X ist kompakt.
- (b) Eine endliche Vereinigung kompakter Mengen ist kompakt.
- (c) Eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.
- (d) Eine kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt.
- (e) Der Durchschnitt kompakter Mengen ist kompakt.

Wir werden dagegen gleich sehen, dass abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von X im Allgemeinen nicht mehr kompakt sind.

Aus der Abgeschlossenheit kompakter Mengen erhalten wir:

Korollar (*Schachtelungsprinzip für kompakte Mengen*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und seien $C_n \subseteq X$ nichtleer und kompakt mit

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$$

Dann gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Beweis

Annahme, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset$. Dann ist $\mathcal{U} = \{X - C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von C_0 . Folglich existiert ein n mit

$$C_0 \subseteq \bigcup_{k \leq n} (X - C_k) = X - \bigcap_{k \leq n} C_k = X - C_n,$$

– *im Widerspruch* zu $C_n \subseteq C_0$ und $C_n \neq \emptyset$.

Explizit halten wir fest:

Satz (*kompakte Teilräume*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $C \subseteq X$. Dann ist C genau dann kompakt in (X, d) , wenn der Teilraum (C, d) kompakt ist.

Prinzipiell genügt es also, kompakte Räume zu untersuchen. Dennoch ist es oft instruktiv, die kompakten Teilmengen eines Raumes zu bestimmen.

Beispiel

Sei X eine Menge, und sei d die diskrete Metrik auf X . Dann ist ein $C \subseteq X$ genau dann kompakt, wenn C endlich ist. Denn eine endliche Menge ist in jedem metrischen Raum kompakt. Ist umgekehrt C kompakt in (X, d) , so ist

$$\mathcal{U} = \{U_1(x) \mid x \in C\} = \{\{x\} \mid x \in C\}$$

eine offene Überdeckung von C . Also gibt es $x_1, \dots, x_n \in C$ mit

$$C \subseteq \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\} = \{x_1, \dots, x_n\}, \text{ sodass } C \text{ endlich ist.}$$

Die kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n unter der euklidischen Metrik werden wir gleich bestimmen. Vorab halten wir noch fest:

Satz (*Kompaktheit bei topologischer Äquivalenz*)

Sei X eine Menge, und seien d und e topologisch äquivalente Metriken auf X . Dann besitzen (X, d) und (X, e) dieselben kompakten Mengen.

Beweis

Die Räume (X, d) und (X, e) haben dieselben offenen Mengen, und die Kompaktheit einer Teilmenge eines metrischen Raumes hängt nur von den

– offenen Mengen des Raumes ab.

Für alle $n \geq 1$ haben zum Beispiel die Räume $(\mathbb{R}^n, d_{\text{euk}})$, (\mathbb{R}^n, d_σ) , $(\mathbb{R}^n, d_{\text{max}})$ dieselben kompakten Mengen.

Kompaktheit versus „abgeschlossen und beschränkt“

Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist immer abgeschlossen und beschränkt. Für den euklidischen Raum \mathbb{R} hatten wir gesehen, dass auch die Umkehrung gilt, sodass die Kompaktheit dort einfach als Kombination der Abgeschlossenheit und Beschränktheit erscheint. In metrischen Räumen ist diese Äquivalenz nicht mehr allgemein gültig:

Beispiele

- (1) Sei $d^* = \min(1, d_{\text{euk}})$ auf \mathbb{R} . Dann ist

$$\mathcal{U} = \{]-n, n[\mid n \geq 1 \}$$

eine nicht endlich reduzierbare offene Überdeckung von \mathbb{R} in (\mathbb{R}, d^*) . Also ist \mathbb{R} beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt in (\mathbb{R}, d^*) .

- (2) Wir betrachten den Raum \mathbb{Q} der rationalen Zahlen mit der euklidischen Metrik. Sei $a > 0$ eine irrationale Zahl. Dann ist $U_a(0)$ eine beschränkte, offene und zugleich abgeschlossene Teilmenge in \mathbb{Q} . Ist $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $]0, a[\cap \mathbb{Q}$, die in \mathbb{R} gegen a konvergiert, so ist

$$\mathcal{U} = \{ U_{q_n}(0) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

eine offene Überdeckung von $U_a(0)$, die nicht endlich reduzierbar ist. Also ist $U_a(0)$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt in \mathbb{Q} .

Der Raum (\mathbb{R}, d^*) ist im Gegensatz zum Raum der rationalen Zahlen sogar vollständig und die Metrik d^* ist topologisch äquivalent zur euklidischen Metrik d_{euk} auf \mathbb{R} . Zwei topologisch äquivalente Metriken erzeugen dieselben offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen, aber sie können sich in ihrer Auffassung der Beschränktheit unterscheiden.

Trotz der Gegenbeispiele gilt „kompakt = abgeschlossen + beschränkt“ in vielen metrischen Räumen. Nützlich hierzu ist folgende Beobachtung:

Satz (Bedingung für einfache kompakte Mengen)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (a) Abgeschlossene ε -Kugeln sind kompakt, d. h., für alle $\varepsilon > 0$ und alle $p \in X$ ist $\text{cl}(U_\varepsilon(p))$ kompakt.
- (b) Ein $C \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn C abgeschlossen und beschränkt ist.

Für die Metrik d^* aus dem ersten Beispiel ist die Bedingung (a) verletzt, da zum Beispiel $\text{cl}(U_2(0)) = U_2(0) = \mathbb{R}$ unter d^* nicht kompakt ist.

Beweis

(a) *impliziert (b)*: Kompakte Mengen sind immer abgeschlossen und beschränkt. Sei also umgekehrt $C \subseteq X$ abgeschlossen und beschränkt. Ist $C = \emptyset$, so ist C kompakt. Andernfalls existiert ein $p \in C$. Dann gilt $C \subseteq \text{cl}(U_\varepsilon(p))$ für $\varepsilon = \text{diam}(C) < \infty$. Also ist C eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge und damit kompakt.

(b) *impliziert (a)*: Jede Menge $\text{cl}(U_\varepsilon(p))$ ist abgeschlossen und beschränkt,
 — also kompakt unter der Voraussetzung (b).

Die Bedingung ist zum Beispiel für die Maximumsmetrik auf dem \mathbb{R}^n erfüllt:

Satz (*Kompaktheit n -dimensionaler Quader*)

Sei $n \geq 1$ und sei d die Maximumsmetrik auf dem \mathbb{R}^n . Dann sind alle Quader Q der Form

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

kompakt. Insbesondere sind alle Kuben $\text{cl}(U_\varepsilon(p)) = [p - \varepsilon, p + \varepsilon]^n$ kompakt.

Beweis

Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n . Für $n = 1$ folgt die Behauptung aus der Kompaktheit der reellen Intervalle $[a, b]$. Im Induktionsschritt von n nach $n + 1$ betrachten wir

$$S = \{x \in [a_{n+1}, b_{n+1}] \mid [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \times [a_{n+1}, x] \text{ ist kompakt} \}.$$

— In Analogie zum eindimensionalen Fall zeigt man $b_{n+1} = \sup(S) \in S$.

Einen zweiten Beweis geben wir später mit Hilfe von konvergenten Folgen. Aus dem Ergebnis erhalten wir:

Korollar (*allgemeiner Satz von Heine-Borel*)

Sei $n \geq 1$, und sei d eine zur Maximumsmetrik numerisch äquivalente Metrik auf dem \mathbb{R}^n . Dann sind für alle $C \subseteq \mathbb{R}^n$ äquivalent:

- (a) C ist kompakt.
- (b) C ist abgeschlossen und beschränkt.

Speziell gilt dies für die euklidische Metrik auf dem \mathbb{R}^n .

Beweis

Die Äquivalenz gilt für die Maximumsmetrik nach den obigen Sätzen.

Allgemein folgt sie daraus, dass zwei numerisch äquivalente Metriken

— dieselben kompakten, abgeschlossenen und beschränkten Mengen besitzen.

Das Beispiel $d^* = \min(1, d_{\text{euk}})$ auf \mathbb{R} zeigt, dass die numerische Äquivalenz nicht durch die topologische ersetzt werden kann.

Die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft und Folgenkompaktheit

Für das Kontinuum hatten wir bereits beobachtet, dass sich viele Überdeckungsargumente durch Häufungspunktkonstruktionen ersetzen lassen und umgekehrt. Diesem Phänomen wollen wir nun genauer nachgehen. Wir definieren hierzu (vgl. auch den Ausblick zu 3.3 in Band 1):

Definition (*Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft, folgenkompakt*)

Ein metrischer Raum (X, d)

- (a) hat die *Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft*, falls jede unendliche Teilmenge P von X einen Häufungspunkt besitzt,
- (b) heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge in (X, d) eine konvergente Teilfolge besitzt.

Wie für \mathbb{R} gilt:

Satz (*Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft und Folgenkompaktheit*)

Ein metrischer Raum (X, d) hat genau dann die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft, wenn er folgenkompakt ist.

Wir werden zeigen, dass die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft und damit die Folgenkompaktheit äquivalent zur Kompaktheit ist. Eine erste Überraschung auf dem Weg zu diesem Ergebnis ist, dass die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft die Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge nach sich zieht:

Satz (*Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft impliziert Separabilität*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum mit der Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft. Dann ist (X, d) separabel.

Beweis

Wir zeigen zunächst:

- (+) Für alle $\varepsilon > 0$ ist die offene Überdeckung $\{ U_\varepsilon(x) \mid x \in X \}$ von X endlich reduzierbar.

Beweis von (+)

Annahme nicht für ein ε . Dann können wir rekursiv definieren:

$$x_n = \text{„ein Element von } X - \bigcup_{k < n} U_\varepsilon(x_k)\text{“},$$

denn die Menge auf der rechten Seite ist nach Annahme nichtleer. Nach Konstruktion ist $P = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ unendlich und $P \cap U_\varepsilon(x_n) = \{ x_n \}$ für alle n . Dann gilt aber $P' = \emptyset$ (denn für $x \in P'$ und x_n mit $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ wäre $U_\varepsilon(x_n) \cap P \supseteq U_{\varepsilon/2}(x) \cap P$ unendlich), *Widerspruch*.

Nach (+) existiert für alle $n \geq 1$ ein endliches $E_n \subseteq X$ mit

$$X = \bigcup_{x \in E_n} U_{1/n}(x).$$

Dann ist $D = \bigcup_n E_n$ abzählbar. Weiter gilt:

(++) D ist dicht in X .

Denn seien $p \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n \geq 1$ mit $1/n \leq \varepsilon$ und ein $x \in E_n \subseteq D$ mit $p \in U_{1/n}(x)$. Dann gilt $d(p, x) < 1/n \leq \varepsilon$, sodass $x \in U_\varepsilon(p)$.

– Also ist $D \cap U_\varepsilon(p) \neq \emptyset$.

In separablen metrischen Räumen gilt automatisch eine abzählbare Reduktionseigenschaft für offene Überdeckungen:

Satz (*abzählbare Reduzierbarkeit in separablen metrischen Räumen*)

Sei (X, d) separabel, und sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Dann ist \mathcal{U} abzählbar reduzierbar, d. h., es gibt ein abzählbares $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, das X überdeckt.

Beweis

Sei \mathcal{B} eine abzählbare Basis von (X, d) . Wir setzen

$$\mathcal{A} = \{ B \in \mathcal{B} \mid \text{es gibt ein } U \in \mathcal{U} \text{ mit } B \subseteq U \}.$$

Für alle $B \in \mathcal{A}$ sei dann

$$U_B = \text{„ein } U \in \mathcal{U} \text{ mit } B \subseteq U\text{“}.$$

Wir betrachten nun die abzählbare Menge

$$\mathcal{V} = \{ U_B \mid B \in \mathcal{A} \} \subseteq \mathcal{U}.$$

Dann ist \mathcal{V} eine Überdeckung von X . Denn ist $x \in X$, so gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Da \mathcal{B} eine Basis ist, gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ und $B \subseteq U$. Dann

– ist $B \in \mathcal{A}$ und also $B \subseteq U_B \in \mathcal{V}$. Also ist $x \in \bigcup \mathcal{V}$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zeigen:

Satz (*Charakterisierung der Kompaktheit in metrischen Räumen*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (a) (X, d) ist kompakt.
- (b) (X, d) hat die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft.

Beweis

(a) impliziert (b): Sei $P \subseteq X$ mit $P' = \emptyset$. Wir zeigen (wie schon früher für \mathbb{R}), dass P endlich ist. Aus $P' = \emptyset$ folgt, dass P abgeschlossen und damit kompakt ist, und dass für alle $p \in P$ ein $\varepsilon(p) > 0$ existiert mit

$$(\dagger) \quad U_{\varepsilon(p)}(p) \cap P = \{p\}.$$

Das System $\mathcal{U} = \{ U_{\varepsilon(p)}(p) \mid p \in P \}$ ist eine offene Überdeckung von P . Also existieren $p_1, \dots, p_n \in P$ mit

$$P \subseteq U_{\varepsilon(p_1)}(p_1) \cup \dots \cup U_{\varepsilon(p_n)}(p_n).$$

Nach (+) ist dann aber $P = \{ p_1, \dots, p_n \}$.

(b) *impliziert (a): Annahme*, X ist nicht kompakt. Dann existiert nach den vorangehenden Sätzen eine abzählbare offene Überdeckung \mathcal{U} von X , die nicht endlich reduzierbar ist. Sei

$$\mathcal{U} = \{ U_n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Durch Ersetzen von U_n durch $\bigcup_{k \leq n} U_k$ und streichen von Wiederholungen dürfen wir annehmen, dass $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n \subset \dots$. Wir definieren nun

$$x_n = \text{„ein Element von } U_{n+1} - U_n \text{“ für alle } n \in \mathbb{N},$$

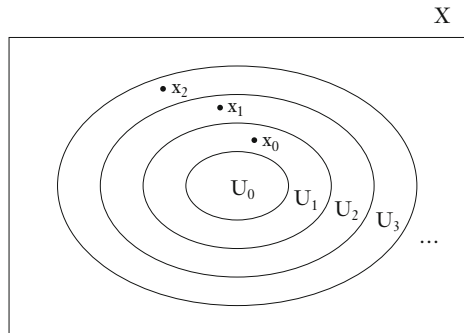
$$P = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Dann ist P unendlich und $P \cap U_n$ endlich für alle n . Folglich ist

$$P' \cap U_n = \emptyset \text{ für alle } n.$$

Wegen $\bigcup_n U_n = X$ ist also $P' = \emptyset$, im Widerspruch zur Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft

– von (X, d) .



$\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ hat keinen Häufungspunkt

Aus dem Satz folgt:

Korollar (*Kompaktheit impliziert Separabilität und Vollständigkeit*)

Jeder kompakte metrische Raum (X, d) ist separabel und vollständig.

Beweis

Die Separabilität folgt aus der Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft.

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X, d) , so besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufgrund der Folgenkompaktheit des Raumes eine konvergente Teilfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei

– $y = \lim_n y_n$. Dann gilt auch $y = \lim_n x_n$, da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Ist also (X, d) ein kompakter metrischer Raum, so ist (X, e) vollständig für jede zu d äquivalente Metrik e auf X . Denn die Kompaktheit eines Raumes bleibt beim Wechsel zu e erhalten und kompakte metrische Räume sind vollständig. Der Leser vergleiche dies noch einmal mit der unvollständigen euklidischen Metrik und der vollständigen Tangensmetrik auf dem Intervall $] - \pi/2, \pi/2 [$.

Dass die Kompaktheit die Vollständigkeit impliziert, kann man auch ohne Übergang zur Folgenkompaktheit durch ein Überdeckungsargument einsehen:

Zweiter Beweis der Vollständigkeit kompakter Räume

Ist (X, d) unvollständig, so gibt es eine divergente Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist $A_n = \{x_m \mid m \geq n\}$ abgeschlossen für alle n (da $A'_n = \emptyset$) und $\mathcal{U} = \{X - A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine nicht endlich reduzierbare offene Überdeckung von X . Also ist (X, d) nicht kompakt.

Die Kompaktheit von Produkten

Als Anwendung der Äquivalenz der Kompaktheit und der Folgenkompaktheit zeigen wir:

Korollar (Kompaktheit von Produkten)

Seien $(X_1, d_1), \dots, (X_k, d_k)$ kompakt. Dann ist das Produkt (X, d_{\max}) der Räume kompakt.

Anstelle von d_{\max} kann man hier auch die Summenmetrik d_σ einsetzen. Für den folgenden Beweis wird nur gebraucht, dass die Konvergenz im Produkt die koordinatenweise Konvergenz ist.

Beweis

Wir zeigen die Aussage für $k = 2$, um die Notation zu vereinfachen. Das Argument liefert allgemein den Induktionsschritt eines induktiven Beweises nach k . Seien also $(X, d), (Y, e)$ kompakt, und sei $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge im Produkt $X \times Y$ unter d_{\max} . Dann existiert eine gegen ein $x^* \in X$ konvergente Teilfolge $(x_{i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X . Weiter besitzt $(y_{i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen ein $y^* \in Y$ konvergente Teilfolge $(y_{i(j(n))})_{n \in \mathbb{N}}$. Da die Konvergenz in $X \times Y$ die koordinatenweise Konvergenz ist, konvergiert die Teilfolge $(x_{i(j(n))}, y_{i(j(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen (x^*, y^*) in $X \times Y$. Dies zeigt, dass $X \times Y$ unter d_{\max}

— folgenkompakt und damit kompakt ist.

Damit haben wir erneut bewiesen:

Korollar (Kompaktheit n -dimensionaler Quader)

Sei $n \geq 1$ und sei d die Maximumsmetrik auf dem \mathbb{R}^n . Dann sind alle Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ kompakt.

Wie oben folgt hieraus der Satz von Heine-Borel.

Bemerkenswerterweise ist auch ein unendliches Produkt kompakter metrischer Räume (X_n, d_n) unter der Maximumsmetrik oder der Summenmetrik wieder kompakt (vgl. den Ausblick in 2.3). Dies zeigt man durch „diagonale Ausdünnung“ einer Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Produkt der (X_n, d_n) .

Kompaktheit und Beschränktheit

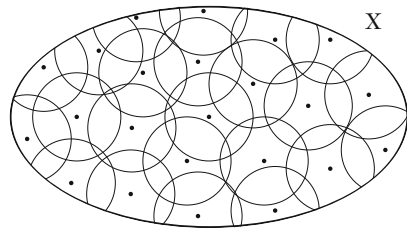
Jeder kompakte metrische Raum (X, d) ist beschränkt, denn ist (X, d) unbeschränkt, so ist die offene Überdeckung

$$\mathcal{U} = \{ U_n(p) \mid n \geq 1 \}, \quad p \in X \text{ beliebig,}$$

nicht endlich reduzierbar. Durch Vertauschung der Rollen des Mittelpunkts und des Durchmessers erhalten wir eine Verstärkung der Beschränktheit: Für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$\mathcal{U} = \{ U_\varepsilon(x) \mid x \in X \}$$

eine offene Überdeckung von X . Ist also (X, d) kompakt, so genügen endlich viele ε -Kugeln, um X zu überdecken. Wir isolieren diese Überdeckungs-Eigenschaft und definieren:



Definition (total beschränkt)

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *total beschränkt*, falls

$X = \emptyset$ oder für alle $\varepsilon > 0$ ein $n \geq 1$ und $x_1, \dots, x_n \in X$ existieren mit

$$X = U_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup U_\varepsilon(x_n).$$

endliche Überdeckung von X mit ε -Kugeln

Ein $P \subseteq X$ heißt *total beschränkt*, wenn der Teilraum (P, d) dies ist.

Jeder total beschränkte Raum ist beschränkt, da eine endliche Vereinigung beschränkter Mengen beschränkt ist. Genauer gilt: Ist $\varepsilon > 0$ und sind $x_1, \dots, x_n \in X$ derart, dass $X = U_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup U_\varepsilon(x_n)$, so ist $\text{diam}(X) \leq \delta + 2\varepsilon$, wobei δ das Maximum aller Abstände $d(x_i, x_j)$ ist. Die beschränkte, aber nicht total beschränkte Metrik $d = \min(1, d_{\text{euk}})$ auf \mathbb{R} zeigt, dass die totale Beschränktheit eine echte Verstärkung der Beschränktheit ist.

Anschaulich klar, aber dennoch beweisbedürftig ist:

Satz (Teilmengen total beschränkter Räume)

Sei (X, d) total beschränkt, und sei $P \subseteq X$. Dann ist P total beschränkt.

Beweis

Die Aussage ist klar für $P = \emptyset$. Sei also $P \neq \emptyset$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $x_1, \dots, x_n \in X$ derart, dass $P \subseteq U_{\varepsilon/2}(x_1) \cup \dots \cup U_{\varepsilon/2}(x_n)$. Wir dürfen annehmen, dass für alle k ein $y_k \in P \cap U_{\varepsilon/2}(x_k)$ existiert (sonst streichen wir einige x_k). Dann gilt $U_{\varepsilon/2}(x_k) \subseteq U_\varepsilon(y_k)$ für alle k und damit

$$P \subseteq U_\varepsilon(y_1) \cup \dots \cup U_\varepsilon(y_n).$$

Kompakte Räume sind vollständig und beschränkt, aber diese beiden Eigenschaften reichen nicht aus, um die Kompaktheit zu erzwingen ($d = \min(1, d_{\text{euk}})$ liefert erneut ein Gegenbeispiel). Dagegen gilt:

Satz (*Charakterisierung der Kompaktheit in metrischen Räumen, II*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (a) (X, d) ist kompakt.
- (b) (X, d) ist vollständig und total beschränkt.

Beweis

(a) *impliziert* (b): Schon bewiesen.

(b) *impliziert* (a): Wir zeigen die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft. Sei also $P \subseteq X$ unendlich. Wir konstruieren rekursiv P_n mit:

- (i) $P = P_0 \supseteq \dots \supseteq P_n \supseteq \dots$,
- (ii) P_n ist unendlich,
- (iii) $\lim_n \text{diam}(P_n) = 0$.

zur rekursiven Konstruktion

Wir setzen $P_0 = P$. Ist P_n definiert, so ist $P_n \subseteq X$ total beschränkt, und damit gibt es $x_1, \dots, x_k \in P_n$ mit

$$P_n \subseteq U_{1/n}(x_1) \cup \dots \cup U_{1/n}(x_k).$$

Da P_n unendlich ist, gibt es ein i , sodass $P_n \cap U_{1/n}(x_i)$ unendlich ist.

Wir setzen dann $P_{n+1} = P_n \cap U_{1/n}(x_i)$.

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine injektive Folge mit $x_n \in P_n$ für alle n . Nach (i) und (iii) ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da (X, d) vollständig ist, existiert

— $x = \lim_n x_n$. Nach Konstruktion ist x ein Häufungspunkt von P .

Der Beweis der zweiten Implikation erinnert an den Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß für \mathbb{R} . Die totale Beschränktheit ersetzt die wiederholte Halbierung eines Intervalls, die für allgemeine metrische Räume nicht zur Verfügung steht.

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist ein $P \subseteq X$ genau dann total beschränkt, wenn $\text{cl}(P)$ total beschränkt ist (Beweis als Übung). Da eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes einen vollständigen Raum bildet, erhalten wir:

Korollar (*Kriterium für einen kompakten Abschluss*)

Sei (X, d) vollständig, und sei $P \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

- (a) P ist total beschränkt.
- (b) $\text{cl}(P)$ ist kompakt.

Stetige Funktionen auf kompakten Räumen

Wie für \mathbb{R} zeigt man:

Satz (*stetige kompakte Bilder*)

Ist $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ stetig und $C \subseteq X$ kompakt, so ist $f[C] \subseteq Y$ kompakt.

Korollar (*Homöomorphiesatz für kompakte metrische Räume*)

Ist (X, d) kompakt und $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ stetig und bijektiv, so ist $f^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig.

Beispiele

- (1) Seien $n, m \geq 1$, und sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Weiter sei $a > 0$. Dann ist $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq a\}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Folglich ist $f[C]$ kompakt und damit abgeschlossen und beschränkt in \mathbb{R}^m . Eine abgeschlossene n -dimensionale Kugel landet also unter einer stetigen Abbildung innerhalb einer m -dimensionalen Kugel und bleibt dabei, so deformiert sie auch sein mag, abgeschlossen.
- (2) Eine stetige Funktion $f: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, $f: [0, 1]^2 \rightarrow]0, 1[^2$ oder $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kann nicht surjektiv sein, da ihr Wertebereich kompakt ist.
- (3) Es gibt keine stetige Bijektion $f: [0, 1] \rightarrow K$ für die Einheitskreislinie $K \subseteq \mathbb{R}^2$. Denn nach dem Homöomorphiesatz wäre sonst $g = f^{-1}$ stetig. Für $K^* = K - \{f(1/2)\}$ wäre dann $h = g|_{K^*}$ eine stetige Bijektion von K^* nach $P = [0, 1/2[\cup]1/2, 1]$. Dies ist unmöglich, da K^* zusammenhängend, aber P unzusammenhängend ist. (Vgl. zu dieser Argumentation auch den Ausblick zu Peano-Kurven in 3.1.)

Explizit notieren wir auch noch:

Korollar (*Annahme von Maximum und Minimum*)

Ist (X, d) kompakt und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (unter d_{euk}), so nimmt f ihr Maximum und ihr Minimum an.

Beweis

– Das Bild $C = f[X]$ ist kompakt in \mathbb{R} , also existieren $\min(C)$ und $\max(C)$.

Beispiel

Die Spektralnorm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wird angenommen, d. h.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\| = \max_{\|x\| = 1} \|Ax\|.$$

Denn die stetige Abbildung, die $x \in \mathbb{R}^n$ auf $\|Ax\| \in \mathbb{R}$ abbildet, nimmt auf der kompakten Einheitskugel im \mathbb{R}^n ihr Maximum an. Analog für $\|A\|_{p,q}$.

Mit Hilfe des Satzes über kompakte Bilder können wir nun auch das in 2.4 angegebene Ergebnis über Normen beweisen:

Satz (*Äquivalenz von Normen*)

Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Dann sind je zwei Normen auf V äquivalent.

Beweis

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V . Weiter sei b_1, \dots, b_n eine Basis von V und $\|\cdot\|_1$ die 1-Norm auf V bzgl. dieser Basis, d. h., es gilt

$$\|v\|_1 = \sum_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \quad \text{für alle } v = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k b_k \in V.$$

Es genügt zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalent sind. Hierzu sei

$$c_1 = \max_{1 \leq k \leq n} \|b_k\|.$$

Dann gilt für alle $v = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k b_k \in V$:

$$(+)\quad \|v\| = \left\| \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k b_k \right\| \leq \sum_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \|b_k\| \leq c_1 \|v\|_1.$$

Dies zeigt die erste Abschätzung. Weiter folgt aus (+):

$$(++)\quad \|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist Lipschitz-stetig bzgl. } \|\cdot\|_1 \text{ auf } V \text{ (mit } L = c_1).$$

Denn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\left| \|v\| - \|w\| \right| \leq \|v - w\| \leq c_1 \|v - w\|_1 \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Für die andere Abschätzung zeigen wir zunächst:

$$(+++)\quad S = \{v \in V \mid \|v\|_1 = 1\} \text{ ist kompakt in } V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_1.$$

Beweis von (+++)

Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von S bzgl. $\|\cdot\|_1$. Dann induziert \mathcal{U} durch Übergang von $\sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k b_k \in V$ zu $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ eine offene Überdeckung \mathcal{V} von $C = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$ in 1-Norm. Eine endliche Reduzierung von \mathcal{V} liefert eine solche von \mathcal{U} .

Nach (++) und (+++) hat S ein kompaktes Bild unter $\|\cdot\|$. Also existiert ein $v^* \in S$ mit $\|v^*\| \leq \|v\|$ für alle $v \in S$. Für alle $v \in V - \{0\}$ gilt also

$$\|v^*\| \leq \left\| \frac{v}{\|v\|_1} \right\|.$$

Wegen $0 \notin S$ gilt $\|v^*\| \neq 0$. Für $c_2 = \|v^*\|^{-1}$ gilt also

$$\text{—} \quad \|v\|_1 \leq c_2 \|v\| \quad \text{für alle } v \in V.$$

Lebesgue-Zahlen und der Satz von Heine

Wie für das Kontinuum kann man zeigen, dass sich die Stetigkeit einer Funktion auf einem kompakten metrischen Raum zur gleichmäßigen Stetigkeit verstärkt. Wir wollen noch ein interessantes alternatives Argument vorstellen.

Definition (Lebesgue-Zahl einer Überdeckung)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei \mathcal{U} eine Überdeckung von X . Dann heißt ein $\lambda > 0$ eine *Lebesgue-Zahl* für \mathcal{U} , falls gilt:

Für alle $P \subseteq X$ mit $\text{diam}(P) < \lambda$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $P \subseteq U$.

Überdeckt \mathcal{U} den Raum X , so gibt es für alle $\{x\} \subseteq X$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\{x\} \subseteq U$. Ist λ eine Lebesgue-Zahl für \mathcal{U} , so können wir die einpunktige Menge $\{x\}$ durch eine beliebige Menge vom Durchmesser kleiner λ ersetzen. Jede „ λ -Erbse“ in X liegt dann in einer Menge U von \mathcal{U} . Für offene Überdeckungen kompakter Räume existiert ein solches λ :

Satz (Lebesgue-Zahl in kompakten Räumen)

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, und sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Dann existiert eine Lebesgue-Zahl für \mathcal{U} .

Beweis

Für jedes $x \in X$ sei $\varepsilon(x) > 0$ so, dass ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $U_{2\varepsilon(x)}(x) \subseteq U$. Dann ist

$$\mathcal{V} = \{ U_{\varepsilon(x)}(x) \mid x \in X \}$$

eine offene Überdeckung von X . Also existieren $x_1, \dots, x_n \in X$ mit

$$(+)\quad X = U_{\varepsilon(x_1)}(x_1) \cup \dots \cup U_{\varepsilon(x_n)}(x_n).$$

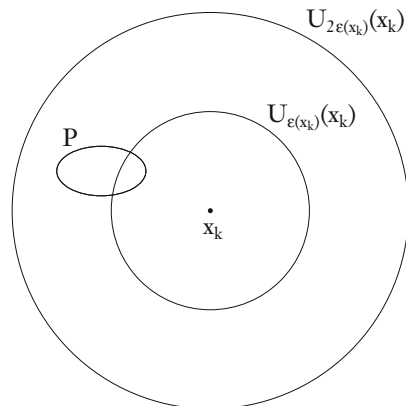
Sei $\lambda = \min_{k \leq n} \varepsilon(x_k)$. Dann ist λ eine Lebesgue-Zahl für \mathcal{U} .

Denn für alle nichtleeren $P \subseteq X$ mit $\text{diam}(P) < \lambda$ gibt es wegen (+) ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$P \cap U_{\varepsilon(x_k)}(x_k) \neq \emptyset.$$

Wegen $\text{diam}(P) < \lambda \leq \varepsilon(x_k)$ ist $P \subseteq U_{2\varepsilon(x_k)}(x_k)$. Nach Definition von $\varepsilon(x_k)$ ist $U_{2\varepsilon(x_k)}(x_k)$ in einer Menge $U \in \mathcal{U}$ enthalten. Für

– ein solches U gilt $P \subseteq U$.



Wir erhalten:

Korollar (*gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Räumen, Satz von Heine*)

Sei (X, d) kompakt, und sei $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ stetig. Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P \subseteq X \text{ (diam}(P) < \delta \rightarrow \text{diam}(f[P]) < \varepsilon),$$

d. h., f ist gleichmäßig stetig.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Sei δ eine Lebesgue-Zahl für

$$\mathcal{U} = \{f^{-1}[V] \mid V \subseteq Y \text{ offen, diam}(V) < \varepsilon\}$$

Für alle $P \subseteq X$ mit $\text{diam}(P) < \delta$ ist dann P Teilmenge einer Menge $f^{-1}[V]$

– mit $\text{diam}(V) < \varepsilon$. Also ist δ wie gewünscht.

Kompakte topologische Räume

Da die Überdeckungs- und Kompaktheitsbegriffe nur offene Menge verwenden, stehen sie für beliebige topologische Räume zur Verfügung. Ist also (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum, so ist ein $C \subseteq X$ kompakt, wenn jede offene Überdeckung von C endlich reduzierbar ist. Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann kompakt, wenn der von ihm erzeugte topologische Raum (X, \mathcal{U}) dies ist.

In einem topologischen Raum (X, \mathcal{U}) ist wieder jede endliche Teilmenge kompakt und die kompakten Mengen sind abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen. Weiter sind abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen kompakt. Dagegen sind kompakte Mengen im allgemeinen nicht mehr abgeschlossen. Zum Beispiel ist die Einermenge $\{0\}$ in der trivialen Topologie $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ auf der Menge $X = \{0, 1\}$ kompakt, aber nicht abgeschlossen. Ist jedoch (X, \mathcal{U}) ein Hausdorff-Raum, so sind kompakte Mengen wie gewohnt abgeschlossen und die kompakten Teilmengen einer kompakten Menge $C \subseteq X$ sind dann genau die abgeschlossenen Teilmengen von C .

Beispiel

Sei $\mathcal{U}_()$ die halboffene Topologie auf \mathbb{R} , und sei $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt in $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_())$.

Wir zeigen, dass C abzählbar ist. Sei hierzu $x \in C$ und

$$\mathcal{U} = \{]-\infty, q[\mid q \in \mathbb{Q}, q < x \} \cup \{ [x, \infty[\}.$$

Dann ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von C , also endlich reduzierbar. Folglich gibt es eine rationale Zahl $f(x) = q_x < x$ mit $[q_x, x[\cap C = \emptyset$. Dies definiert eine Injektion $f: C \rightarrow \mathbb{Q}$. Damit ist C abzählbar. Ist also $x \in \mathbb{R}$ und U eine Umgebung von x , so ist U nicht kompakt, da U eine überabzählbare Menge der Form $[x, x + \varepsilon[$ enthält. Konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend gegen x , so ist $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt, aber $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ nicht kompakt (denn das System aller $[y_n, y_{n+1}[$ zusammen mit $[x, x + 1[$ ist nicht endlich reduzierbar).

Ausblick: Die Hausdorff-Metrik

In einem metrischen Raum (X, d) hatten wir folgende Abstände zwischen Punkten und nichtleeren Mengen erklärt:

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) \quad \text{für alle } x \in X \text{ und alle nichtleeren } A \subseteq X,$$

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) \quad \text{für alle nichtleeren } A, B \subseteq X.$$

Die zweite Definition verallgemeinert die erste, da $d(x, A) = d(\{x\}, A)$. Wir nennen $d(A, B)$ den Abstand zwischen A und B in (X, d) . Dies entspricht dem alltäglichen Abstand, den zum Beispiel zwei Häuser voneinander haben. Die Funktion $d(\cdot, \cdot)$ ist jedoch keine Metrik auf dem System der nichtleeren Teilmengen von X . Ist $A \neq B$ und $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $d(A, B) = 0$. Die Symmetrie gilt, aber die Dreiecksungleichung ist verletzt. So gilt zum Beispiel in \mathbb{R}

$$d([0, 1], [2, 3]) = 1 > 0 = 0 + 0 = d([0, 1], [1, 2]) + d([1, 2], [2, 3]).$$

Es stellt sich also die Frage, wie man eine Metrik für möglichst viele Teilmengen eines metrischen Raumes einführen kann. Eine Antwort ist von Felix Hausdorff (der auch den Begriff des metrischen Raumes prägte), gefunden worden. Der Grundgedanke der Konstruktion wird durch folgende Setzung zum Ausdruck gebracht (wobei „ d_H “ für Hausdorff-Abstand steht):

$$(+)\quad d_H(A, B) = \max\left(\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right).$$

Diese auf den ersten Blick verwickelte Formel lässt sich anschaulich erklären: Muss ein Bewohner a von A nach B umziehen oder fliehen, so braucht er hierzu mindestens $d(a, B)$ (räumliche oder zeitliche) Einheiten. Damit kann jeder Bewohner von A die Menge B in $\sup_{a \in A} d(a, B)$ Einheiten erreichen, und diese Schranke ist bestmöglich. Analoges gilt für das zweite Supremum in (+). Dass die beiden Suprema unterschiedlich sein können, zeigt:

Beispiel

Seien $A = [0, 1]$ und $B = [2, 100]$. Dann gilt für die euklidische Metrik:

$$\sup_{a \in A} d(a, B) = 2, \quad \sup_{b \in B} d(b, A) = 99.$$

$$\text{Damit ist } d_H(A, B) = \max(2, 99) = 99.$$

Damit d_H eine Metrik ist, sind noch einige Einschränkungen nötig. Durch die Suprema in (+) ist der Wert ∞ möglich. Weiter gilt $d_H(A, B) = d_H(\text{cl}(A), B)$, sodass die Nullbedingung verletzt sein kann. Es erscheint also günstig, lediglich abgeschlossene und beschränkte Mengen A, B in (X, d) zu betrachten. Sind die Mengen (für manche Räume stärker) kompakt, so stehen uns zudem Überdeckungsargumente und die Sätze für stetige Funktionen auf kompakten Mengen zur Verfügung. Wir gönnen uns die Kompaktheit und definieren:

Definition (*Hausdorff-Metrik*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei

$$\mathcal{H} = \{ A \subseteq X \mid A \text{ ist kompakt und nichtleer} \}.$$

Dann definieren wir die *Hausdorff-Metrik* $d_H : \mathcal{H}^2 \rightarrow [0, \infty[$ durch

$$d_H(A, B) = \max(\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)) \quad \text{für alle } A, B \in \mathcal{H}.$$

Der Raum (\mathcal{H}, d_H) heißt der *Hyperraum* der nichtleeren kompakten Teilmengen von (X, d) .

In der Definition haben wir stillschweigend die Suprema in $(+)$ durch Maxima ersetzt. Dies ist aufgrund der Kompaktheit der Mengen A, B möglich, denn die stetigen Funktionen $d(\cdot, B)$ und $d(\cdot, A)$ nehmen auf A bzw. B ihr Maximum an. In unserer Interpretation ist also die reelle Zahl $c = d_H(A, B)$ wie folgt bestimmt:

- (a) Jeder Bewohner einer der beiden Mengen kann die andere Menge in c Einheiten erreichen.
- (b) Es gibt ein a in A oder ein b in B , das genau c Einheiten zurücklegen muss, um in die andere Menge zu kommen.

Damit ist $d_H(A, B)$ klein, wenn jedes Element von A nahe bei B liegt und umgekehrt. Anschaulich bedeutet dies, dass A und B „fast deckungsgleich“ sind. Ausreißer können dabei nicht vernachlässigt werden, auch wenn sie nur isolierte Punkte sind. So gilt zum Beispiel $d_H(A, A \cup \{2\}) = 1$ für $A = [0, 1]$ in \mathbb{R} . Die Anschauung „fast deckungsgleich“ lässt sich wie folgt präzisieren:

Definition (*ε -Expansion einer Menge*)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $\varepsilon > 0$. Dann definieren wir für alle $P \subseteq X$ die *ε -Expansion* $P^{+\varepsilon}$ von P in (X, d) durch:

$$P^{+\varepsilon} = \bigcup_{p \in P} U_\varepsilon(x).$$

Die Menge $P^{+\varepsilon}$ ist eine offene Obermenge von P . Anschaulich entsteht sie, wenn wir P mit einer „ ε -Unschärfe“ betrachten: Jeder Punkt p in P verschmiert zu $U_\varepsilon(p)$. Den Zusammenhang mit d_H beschreibt nun:

Satz (*Hausdorff-Metrik via ε -Expansionen*)

Sei (\mathcal{H}, d_H) der Hyperraum von (X, d) . Dann gilt für alle $A, B \in \mathcal{H}$:

$$d_H(A, B) = \inf(\{ \varepsilon > 0 \mid A \subseteq B^{+\varepsilon} \text{ und } B \subseteq A^{+\varepsilon} \}).$$

Da A, B abgeschlossen und ε -Expansionen offen sind, ist das Infimum echt, d. h. aus $A \subseteq B^{+\varepsilon}$ und $B \subseteq A^{+\varepsilon}$ folgt immer $d_H(A, B) < \varepsilon$.

Wir überlassen den Nachweis des Satzes dem Leser. Mit seiner Hilfe oder auch durch Anwendung der Definition möge er zudem zeigen, dass d_H tatsächlich eine Metrik auf \mathcal{H} ist.

Eigenschaften der Hausdorff-Metrik

Der Hyperraum erbt wichtige Eigenschaften des Grundraums:

Satz (*Vollständigkeit und Kompaktheit der Hausdorff-Metrik*)

Sei (\mathcal{H}, d_H) der Hyperraum von (X, d) . Dann gilt:

(a) Ist (X, d) vollständig, so auch (\mathcal{H}, d_H) . Genauer gilt dann:

Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathcal{H} , so gilt

$$\lim_n A_n = \{ x \in X \mid \text{es gibt } x_n \in A_n \text{ mit } x = \lim_n x_n \text{ in } (X, d) \}.$$

(b) Ist (X, d) total beschränkt, so auch (\mathcal{H}, d_H) .

(c) Ist (X, d) kompakt, so auch (\mathcal{H}, d_H) .

Beweis (*Skizze*)

zu (a): Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (\mathcal{H}, d_H) . Dann sind die Mengen A_n schließlich „fast deckungsgleich“: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , sodass für alle $n, m \geq n_0$ gilt:

$$A_n \subseteq A_m^{+\varepsilon} \quad \text{und} \quad A_m \subseteq A_n^{+\varepsilon}.$$

Ist (X, d) vollständig, so verliert sich im Limes die ε -Unschärfe, und der „scharfe“ Grenzwert der A_n ist die Menge aller Punkte von X , die durch Pfade in den Mengen A_n (Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A_n$ für alle n) erreicht werden können.

zu (b): Ist (X, d) total beschränkt und $\varepsilon > 0$, so gibt es x_1, \dots, x_n in X mit

$$X = U_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup U_\varepsilon(x_n).$$

Jede endliche Teilmenge von $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist kompakt und damit ein Element von \mathcal{H} , sofern sie nichtleer ist. Damit ist

$$\mathcal{A} = \{ E \mid E \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}, E \neq \emptyset \}$$

eine Teilmenge von \mathcal{H} . Weiter gilt

$$\mathcal{H} = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} U_\varepsilon(E).$$

Denn ist $A \in \mathcal{H}$, so ist $E = \{x_i \mid U_\varepsilon(x_i) \cap A \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$ und es gilt

$$E \subseteq A^{+\varepsilon} \quad \text{und} \quad A \subseteq E^{+\varepsilon}.$$

Also ist $d_H(A, E) < \varepsilon$ und damit $A \in U_\varepsilon(E)$. Dies zeigt, dass (\mathcal{H}, d_H) total beschränkt ist.

zu (c): Die Aussage folgt aus (a) und (b), da Vollständigkeit und totale Beschränktheit äquivalent zur Kompaktheit ist.

Kontraktionen auf dem Hyperraum

Auch Kontraktionen übertragen sich auf den Hyperraum, sodass der Banachsche Fixpunktsatz zur Verfügung steht. Allgemeiner können wir endlich viele Kontraktionen auf (X, d) zu einer Kontraktion auf (\mathcal{H}, d_H) verschmelzen:

Satz (*induzierte Kontraktionen im Hyperraum*)

Sei (X, d) vollständig, und sei (\mathcal{H}, d_H) der Hyperraum von (X, d) . Weiter seien $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow X$ Kontraktionen in (X, d) mit Kontraktionskonstanten c_1, \dots, c_n . Weiter sei $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definiert durch

$$F(A) = f_1[A] \cup \dots \cup f_n[A] \quad \text{für alle } A \in \mathcal{H}.$$

Dann ist F eine Kontraktion mit der Konstanten $c = \max_{1 \leq k \leq n} c_k$, und es gibt genau ein $A^* \in \mathcal{H}$ mit $F(A^*) = A^*$. Für alle $A \in \mathcal{H}$ gilt

$$A^* = \lim_n F^n(A), \quad \text{wobei } F^0(A) = A, \quad F^{n+1}(A) = F(F^n(A)) \quad \text{für alle } n.$$

Beweis

Wir zeigen durch Induktion nach $n \geq 1$, dass F eine Kontraktion mit der Konstanten c ist. Der Zusatz folgt aufgrund der Vollständigkeit von (\mathcal{H}, d_H) aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

Induktionsanfang $n = 1$:

Seien $f = f_1$ und $c = c_1$, sodass $d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Dann gilt für alle $A, B \in \mathcal{H}$:

$$(+)\quad A \subseteq B^{+c} \quad \text{impliziert} \quad f[A] \subseteq f[B^{+c}] \subseteq f[B]^{+c}.$$

Hieraus folgt $d_H(F(A), F(B)) = d_H(f[A], f[B]) \leq c d_H(A, B)$.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$:

Für alle $A_0, A_1, B_0, B_1 \in \mathcal{H}$ gilt:

$$(++)\quad d_H(A_0 \cup A_1, B_0 \cup B_1) \leq \max(d_H(A_0, B_0), d_H(A_1, B_1)).$$

Sind nun $A, B \in \mathcal{H}$, so liefert Anwendung von $(++)$ auf die Mengen

$$A_0 = f_1[A] \cup \dots \cup f_n[A], \quad A_1 = f_{n+1}[A],$$

$$B_0 = f_1[B] \cup \dots \cup f_n[B], \quad B_1 = f_{n+1}[B]$$

– zusammen mit der Induktionsvoraussetzung die Behauptung.

Ist $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ wie im Satz, so gibt es also eine eindeutige kompakte Teilmenge A^* von X , die alle anderen kompakten Mengen $A \subseteq X$ unter der Operation F zu sich sich heranzieht. Starten wir bei A und wenden wir wiederholt F an, so konvergiert die so entstehende Folge von kompakten Mengen $A_n = F^n(A)$ unter der Metrik d_H gegen A^* .

Die Fixpunkte von induzierten Kontraktionen im Hyperraum haben oft eine fraktale Gestalt und mit Hilfe des Satzes sind viele fraktale Gebilde konstruiert worden. Die Cantor-Menge ist ein instruktives Beispiel:

Die Cantor-Menge und ihre Varianten

Wir betrachten das kompakte reelle Intervall $X = [0, 1]$ mit der euklidischen Metrik und die Kontraktionen $f_1, f_2 : X \rightarrow X$ mit

$$f_1(x) = x/3, \quad f_2(x) = x/3 + 2/3 \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Weiter sei $C = \bigcap_n C_n$ die Cantor-Menge. Für alle n sei E_n die Menge der Mittelpunkte der aus C_0, \dots, C_n entfernten Drittelintervalle, also

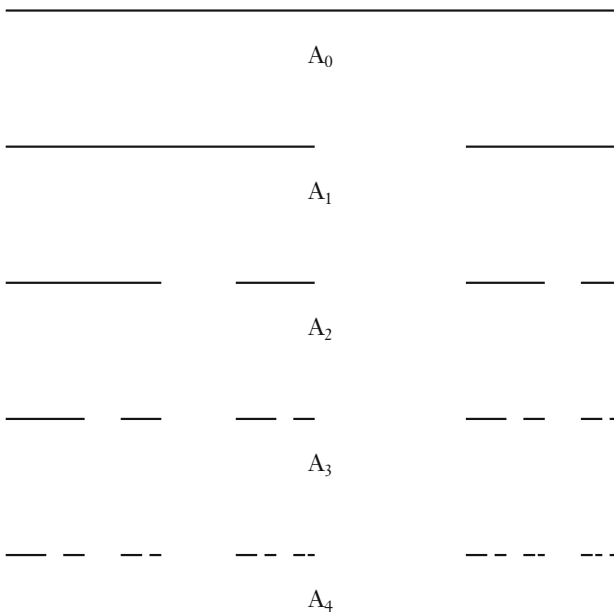
$$E_0 = \{1/2\}, \quad E_1 = \{1/6, 1/2, 5/6\}, \quad \dots$$

Ist nun $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ die durch f_1 und f_2 induzierte Kontraktion, so gilt

$$F^n([0, 1]) = C_n, \quad F^n(\{1/2\}) = E_n, \quad \lim_n C_n = \lim_n E_n = C.$$

Wir können auch mit $A = A_0 = \{1/10\} \cup [5/7, 6/7]$ starten. Der Limes im Hyperraum ist erneut die Cantor-Menge C . Weiter sind viele Varianten möglich. Die folgenden Diagramme zeigen einige Mengen $A_n = F^n[A]$ für $A = [0, 1]$ und die modifizierten Kontraktionen

$$\bar{f}_1(x) = x/2, \quad \bar{f}_2(x) = x/4 + 3/4 \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$



Das Sierpinski-Dreieck

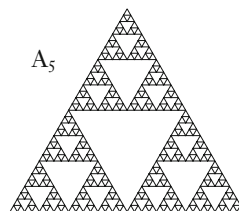
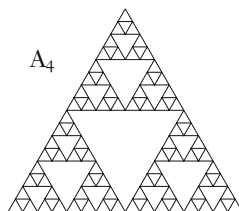
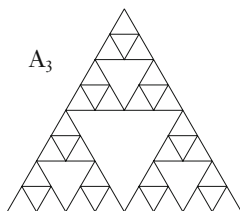
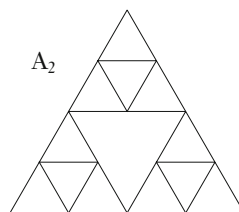
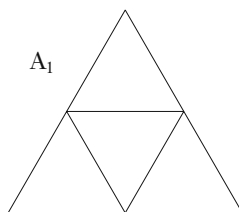
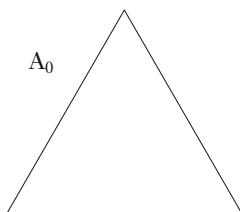
Auf $X = [0, 1]^2$ (mit der euklidischen Metrik) definieren wir

$$f_1(x, y) = (x/2, y/2),$$

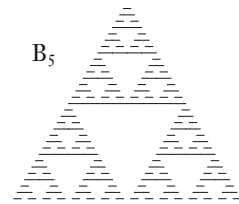
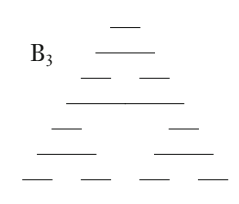
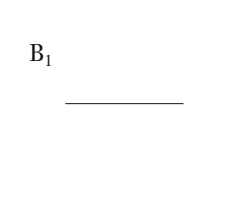
$$f_2(x, y) = (x/2, y/2) + (1/2, 0),$$

$$f_3(x, y) = (x/2, y/2) + (1/4, \sqrt{3}/4) \quad \text{für alle } (x, y) \in X.$$

Diese Kontraktionen lassen sich durch eine Skalierung um den Faktor $1/2$ beschreiben, die für f_2 und f_3 durch eine Translation ergänzt wird. Die folgenden Diagramme zeigen einige $A_n = F^n[A]$ für das gleichseitige Dreieck A mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2)$.



Starten wir anstelle von A mit der Strecke $B = [0, 1] \times \{0\}$ von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$, so erhalten wir Linienmuster $B_n = F^n[B]$:



Der Grenzwert $\lim_n A_n = \lim_n B_n$ heißt das *Sierpinski-Dreieck*.

Die Koch-Kurve

Auf $X = [0, 1]^2$ wie oben definieren wir die Kontraktionen

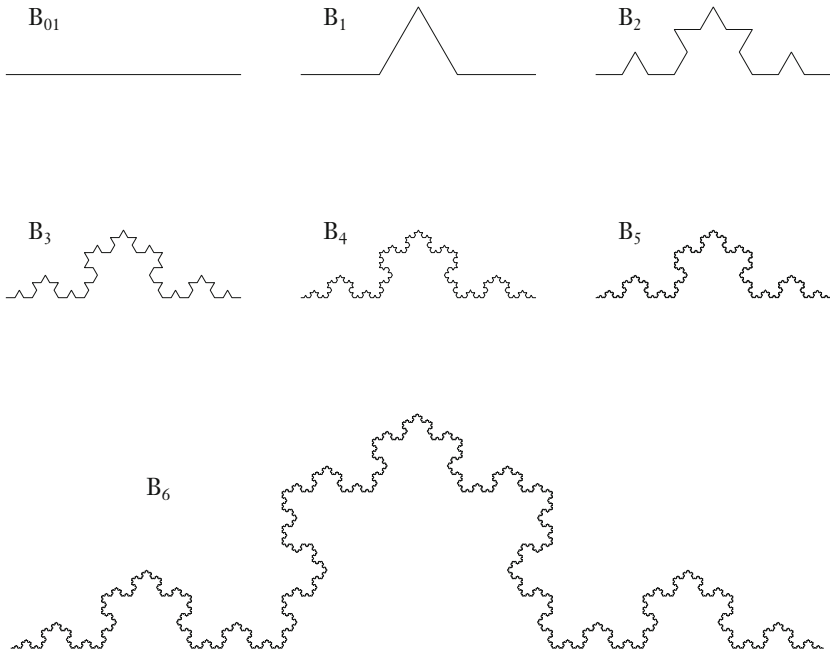
$$f_1(x, y) = (x/3, y/3),$$

$$f_2(x, y) = (x/6 - \sqrt{3} y/6, \sqrt{3} x/6 + y/6) + (1/3, 0),$$

$$f_3(x, y) = (x/6 + \sqrt{3} y/6, -\sqrt{3} x/6 + y/6) + (1/2, \sqrt{3}/6),$$

$$f_4(x, y) = (x/3, y/3) + (2/3, 0) \quad \text{für alle } (x, y) \in X.$$

Startend mit der Strecke B von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ erhalten wir die folgenden Mengen $B_n = F^n[A]$:



Der Limes $\lim_n B_n$ heißt die *Koch-* oder *Schneeflockenkurve*.

3. Abschnitt

Mehrdimensionale Differentiation

1. Kurven

Als Einstieg in die mehrdimensionale Analysis betrachten wir Funktionen, die ein reelles Intervall stetig in den n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n abbilden, sogenannte parametrisierte Kurven. Eine solche Kurve lässt sich dynamisch als die Bahn eines sich im n -dimensionalen Raum bewegendes Punktes interpretieren, wenn der Definitionsbereich der Kurve als Zeitintervall aufgefasst wird. Da wir eine n -dimensionale Kurve als n -Tupel reellwertiger Koordinatenfunktionen darstellen können, genügt die eindimensionale Differential- und Integralrechnung, um analytische Eigenschaften von Kurven zu untersuchen.

Kurven und Parametrisierungen

Wir beginnen mit einigen notationellen Vorbereitungen. Ist $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so sei x_i die i -te Koordinate von x für alle $1 \leq i \leq n$, d. h., es gilt

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n)_i = x_i.$$

Funktionen, die auf einer beliebigen Menge P definiert sind und Werte im \mathbb{R}^n annehmen, können wir ebenfalls koordinatenweise betrachten:

Definition (*Projektionen, $pr_i(f), f_i$*)

Sei P eine Menge, und sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir

$$pr_i(f)(x) = f(x)_i \quad \text{für alle } x \in P.$$

Dann heißt die Funktion $pr_i(f): P \rightarrow \mathbb{R}$ die *Projektion* von f auf die i -te Koordinate. Wir schreiben auch kurz f_i anstelle von $pr_i(f)$.

Nach Definition gilt also

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = (f(x)_1, \dots, f(x)_n) \quad \text{für alle } x \in P.$$

Eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ besteht in diesem Sinne aus den Funktionen f_1, \dots, f_n , die auf P definiert sind und reelle Werte annehmen. Wir nennen die Funktionen f_1, \dots, f_n auch die *Komponenten* oder *Koordinatenfunktionen* von f .

Ist $P \subseteq \mathbb{R}$ und $f: P \rightarrow \mathbb{R}^2$, so ist f eine komplexwertige Funktion. Die Projektion $pr_1(f) = f_1$ ist in diesem Fall die Realteilmfunktion $\operatorname{Re}(f)$ und die Projektion $pr_2(f) = f_2$ die Imaginärteilmfunktion $\operatorname{Im}(f)$.

Wir verstehen den \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik. Die Konvergenz einer Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^n gegen ein $y \in \mathbb{R}^n$ ist dann gleichbedeutend mit der koordinatenweisen Konvergenz, d.h., es gilt

$$y = \lim_k x_k \quad \text{genau dann, wenn} \quad y_i = \lim_k (x_k)_i \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Ist $P \subseteq \mathbb{R}$, so ist ein $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann stetig in einem Punkt $p \in P$, wenn alle Projektionen $f_1, \dots, f_n: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in p sind. Für alle gegen p konvergenten Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in P gilt dann

$$\lim_k f(x_k) = f(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p)),$$

sodass

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p)) = (\lim_{x \rightarrow p} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow p} f_n(x)).$$

Im Folgenden betrachten wir stetige Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die auf einem abgeschlossenen reellen Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ definiert sind. Unsere bevorzugte Variable für die Elemente des Definitionsbereichs von f ist die „Zeitvariable“ t . Vorstellung ist, dass f die Bahn eines Punktes beschreibt, der sich zur Zeit t am Ort $f(t) \in \mathbb{R}^n$ befindet. Physikalisch kann der Punkt ein Teilchen oder der Schwerpunkt eines Körpers sein. Diese *kinematische Interpretation* ist oft hilfreich, soll aber andere Vorstellungen nicht verdrängen. Wenn wir uns zum Beispiel für geometrische Eigenschaften des Wertebereichs $K \subseteq \mathbb{R}^2$ von f interessieren, so können wir f als eine funktionale Darstellung von K auffassen, durch die die Menge K analytischen Methoden zugänglich wird. Unabhängig von Interpretationen definieren wir:

Definition (*Kurve im \mathbb{R}^n , Parameter, Spur, Bahn, geschlossen, fast überall injektiv*)

Ein stetiges $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt eine (*parametrisierte*) *Kurve* im \mathbb{R}^n . Ein $t \in [a, b]$ nennen wir auch einen *Parameter* der Kurve. Der Wertebereich

$$\text{Bild}(f) = \{ f(t) \mid t \in [a, b] \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

von f heißt auch die *Spur* oder die *Bahn* von f . Weiter heißt $f(a)$ *Start-* oder *Anfangspunkt* und $f(b)$ der *End-* oder *Zielpunkt* der Kurve. Die Kurve heißt *geschlossen*, falls $f(a) = f(b)$ gilt. Sie heißt *fast injektiv*, wenn ein endliches $E \subseteq [a, b]$ existiert, sodass $f(t) \neq f(s)$ für alle $t, s \in [a, b] - E$ mit $t \neq s$.

Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiel 1

Die Funktion $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(t) = e^{it} = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi]$$

ist eine geschlossene fast injektive Kurve. Sie beschreibt kinematisch die Bewegung eines Punktes, der beginnend und endend im Punkt $(1, 0)$ den Einheitskreis K mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Der Punkt benötigt hierzu die Zeit 2π .

Beispiel 2

Definieren wir $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$g(t) = f(2\pi - t) = e^{i(2\pi - t)} = e^{-it} = (\cos(t), -\sin(t)) \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi],$$

so beschreibt die Kurve g die gleichmäßige Kreisbewegung eines Punktes von $(1, 0)$ nach $(1, 0)$ in der Zeit 2π im Uhrzeigersinn.

Beispiel 3

Ist $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, und $h_c : [0, 2\pi/c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$h_c(t) = e^{ict} = (\sin(ct), \cos(ct)) \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi/c],$$

so beschreibt die Kurve h_c für $c > 0$ eine Kreisbewegung wie f und für $c < 0$ wie g aus den vorangehenden Beispielen. Der Kreis wird dabei mit der konstanten Geschwindigkeit $|c|$ durchlaufen.

Die Kurven f , g und h_c dieser drei Beispiele haben dieselbe Spur, aber sie durchlaufen sie unterschiedlich. Wir definieren hierzu:

Definition (*Parametertransformation, Orientierungstreu*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Weiter sei $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ bijektiv und stetig. Dann heißt φ eine *Parametertransformation* und

$$f \circ \varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt die durch φ *transformierte* oder *umparametrisierte* Kurve f .

Gilt $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, so heißt φ *Orientierungstreu*. Gilt dagegen

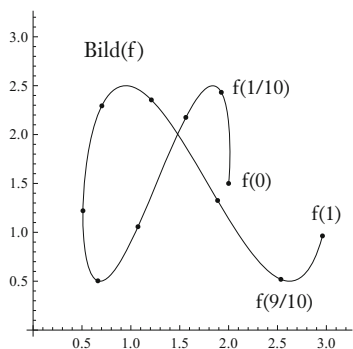
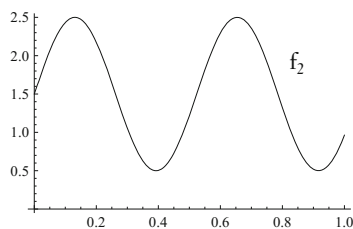
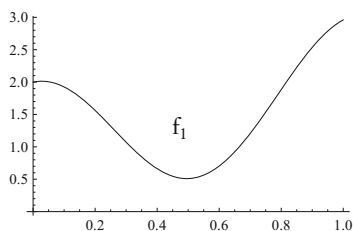
$\varphi(c) = b$ und $\varphi(d) = a$, so heißt φ *Orientierungsumkehrend*.

Da eine Parametertransformation φ stetig und bijektiv ist und ein reelles Intervall in ein reelles Intervall überführt, ist φ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Im ersten Fall ist φ Orientierungstreu, im zweiten Orientierungsumkehrend. Ist φ Orientierungstreu, so wird die Kurve $f \circ \varphi$ in derselben Richtung wie f durchlaufen. Bei einer Orientierungsumkehrenden Transformation ändert sich dagegen die Durchlaufrichtung. Eine Parametertransformation ändert im Allgemeinen also das Zeitintervall, den Geschwindigkeitsverlauf und die Durchlaufrichtung.

Sind g und f Kurven im \mathbb{R}^n und gibt es eine Orientierungstreu Parametertransformation φ mit $g = f \circ \varphi$, so nennt man f und g *äquivalente Kurven*, in Zeichen $f \sim g$. Die Relation \sim ist eine Äquivalenzrelation auf den Kurven im \mathbb{R}^n . Eine Äquivalenzklasse $f/\sim = \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \sim g\}$ der Relation \sim wird oft auch als *Weg* bezeichnet (wobei die sprachlichen Konventionen hier nicht einheitlich sind). Viele Begriffe für Kurven respektieren die Relation \sim und können deswegen für Wege definiert werden (ein Beispiel ist die Länge, die wir im nächsten Kapitel definieren werden). Wir bleiben im Folgenden bei den Kurven.

Beispiel 4

Wir betrachten eine Kurve $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und ihre Komponenten f_1 und f_2 sowie die Kurve $g = f \circ \varphi$ für eine orientierungsumkehrende Parametertransformation $\varphi: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$.

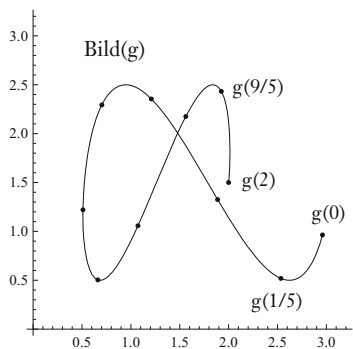
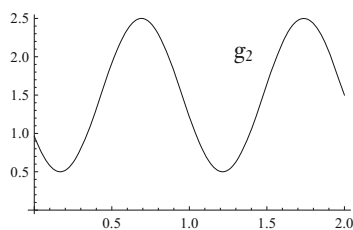
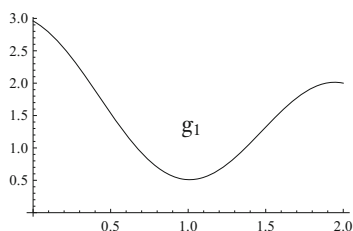


$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$f(t) = (\cos(6t) + t + 1, \sin(12t) + 3/2)$$

$$f_1(t) = \cos(6t) + t + 1$$

$$f_2(t) = \sin(12t) + 3/2$$



$$\varphi: [0, 2] \rightarrow [0, 1], \quad \varphi(t) = 1 - t/2$$

$$g = f \circ \varphi: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g_1(t) = \cos(6\varphi(t)) + \varphi(t) + 1$$

$$g_2(t) = \sin(12\varphi(t)) + 3/2$$

Beispiel 5

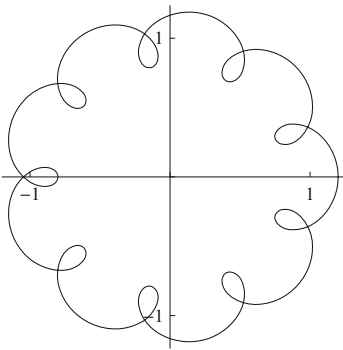
Für $k \geq 1$ und reelle $r, v \geq 0$ sei $f_{k,r,v} : [0, k2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f_{k,r,v}(t) = (\cos(t) + r \cos(vt), \sin(t) + r \sin(vt)) \text{ für alle } t \in [0, k2\pi].$$

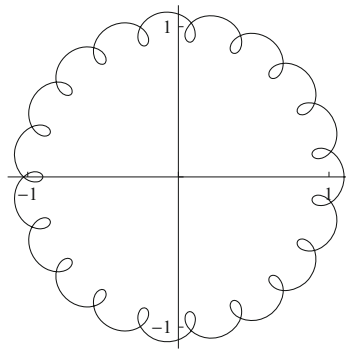
Eine Kurve $f_{k,r,v}$ lässt sich als überlagerte Kreisbewegung interpretieren:

- (a) Der Mittelpunkt eines Kreises mit Radius r bewegt sich auf einem Kreis mit Radius 1 mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn. Für $t = 0$ und $t = 2\pi, \dots, k2\pi$ befindet sich der Mittelpunkt bei $(1, 0)$.
- (b) Der Kreis mit Radius r dreht sich konstant gegen den Uhrzeigersinn um sich selbst und macht dabei v Umdrehungen in der Zeit 2π .
- (c) Wir verfolgen die Bahn des Punktes $(1 + r, 0)$, $t = 0$, auf dem Kreis mit Radius r unter dieser kombinierten Bewegung.

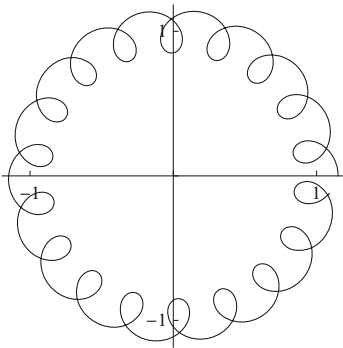
Die folgenden Diagramme zeigen die Spuren von $f_{k,r,v}$ für einige Parameter k, r und v .



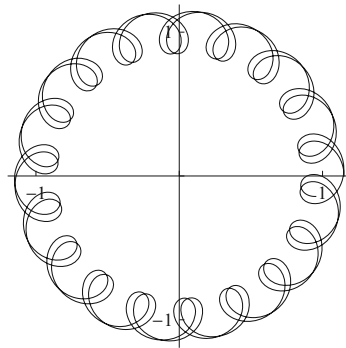
$k = 1, r = 0.2, v = 10$



$k = 1, r = 0.1, v = 20$



$k = 1, r = 0.15, v = 6\pi$



$k = 2, r = 0.15, v = 6\pi$

Beispiel 6

Sei $k \geq 1$ und $f: [0, k2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t), t).$$

Dann beschreibt f eine Schraub- oder Spiralbewegung im dreidimensionalen Raum mit k vollständigen Umdrehungen. Die Spur von f ist eine Teilmenge des Zylinders

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Beispiel 7

Ist $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

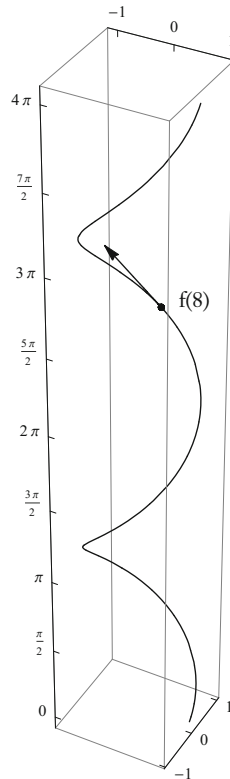
$$f(t) = (t, g(t)) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

eine injektive Kurve, die anschaulich den Graphen von g durchläuft. Identifizieren wir f und g mit ihren Graphen, so gilt

$$\text{Bild}(f) = g = \{(t, g(t)) \mid t \in [a, b]\},$$

$$f = \{(t, (t, g(t))) \mid t \in [a, b]\}.$$

Wir werden im Ausblick unten sehen, dass auch überraschend komplexe Funktionen unter den Kurvenbegriff fallen.



Spur der Schraubbewegung und Tangentialvektor für $t = 8$ aus Beispiel 6 (mit $k = 2$)

Tangentialvektoren und Momentangeschwindigkeiten

Wir betrachten Kurven nun lokal.

Definition (differenzierbare Kurve, Tangentialvektor, regulär, singulär)

Eine Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (stetig) differenzierbar in $t \in [a, b]$, falls die Komponenten f_1, \dots, f_n von f (stetig) differenzierbar im Punkt t sind. Ist f differenzierbar in t , so heißt

$$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

die *Ableitung* oder der *Tangentialvektor* von f in t . Gilt $f'(t) \neq 0$, so heißt t *regulär*. Andernfalls heißt t *singulär*.

Eine Kurve f heißt (stetig) differenzierbar, falls f in allen $t \in [a, b]$ (stetig) differenzierbar ist. Sie heißt *regulär*, falls jedes $t \in [a, b]$ regulär ist.

In unserer kinematischen Interpretation ist $f'(t)$ die Geschwindigkeit eines Punktes zur Zeit t , der sich im n -dimensionalen Raum gemäß f von $f(a)$ nach $f(b)$ bewegt. Diese Geschwindigkeit ist ein Vektor im \mathbb{R}^n . Ihr Betrag v ist

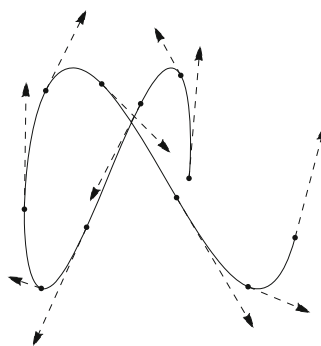
$$v = \|f'(t)\| = \sqrt{f_1'(t)^2 + \dots + f_n'(t)^2}.$$

Ist t regulär, so ist $f'(t)/v$ die auf die Länge 1 normierte Richtung der Geschwindigkeit zur Zeit t . Ist t singulär, so steht der Punkt zur Zeit t im Raum still.

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve und $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine differenzierbare Parametertransformation, so gilt für die reparametrisierte Kurve $g = f \circ \phi$ nach der Kettenregel

$$g'(s) = \phi'(s) (f_1'(\phi(s)), \dots, f_n'(\phi(s))) = \phi'(s) f'(\phi(s)) \quad \text{für alle } s \in [c, d],$$

wobei $\phi'(s)$ ein Skalar und $f'(\phi(s))$ ein Vektor im \mathbb{R}^n ist. Ist s regulär für g , so liegt also der Tangentialvektor der Kurve f zur Zeit $\phi(s)$ auf derselben Geraden wie der Tangentialvektor der Kurve g zur Zeit s . Ist ϕ zudem orientierungstreu, so stimmen auch die Richtungen der beiden Tangentialvektoren überein.



f wie in Beispiel 4 oben mit um den Faktor $1/10$ skalierten Tangentialvektoren

Schnittwinkel

Mit Tangentialvektoren können wir einen Winkel definieren, in dem sich zwei reguläre Kurven schneiden. Wir verwenden hierzu das kanonische Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} v_i w_i \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Bekanntlich definiert man den *Winkel* zwischen zwei Vektoren $v, w \neq 0$ im \mathbb{R}^n als das eindeutige $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \in [-1, 1].$$

Diese Definition übertragen wir nun auf Kurven.

Definition (Schnittwinkel zweier Kurven)

Seien $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Kurven, die in $t \in [a, b]$ bzw. $s \in [c, d]$ differenzierbar und dort regulär sind. Es gelte $f(t) = g(s)$. Dann heißt das eindeutige $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle f'(t), g'(s) \rangle}{\|f'(t)\| \|g'(s)\|}$$

der *Winkel* zwischen f und g bei t und s .

Ausblick: Peano-Kurven

Wie komplex kann eine Kurve $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ in der Ebene sein? Die Anschauung, dass eine Kurve eine einfache Linie ist, täuscht:

Satz (*Existenz raumfüllender Kurven*)

Es gibt eine Kurve $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, die surjektiv ist.

Eine stetige Surjektion $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ nennt man auch eine *Peano-Kurve* von $[0, 1]$ nach $[0, 1]^2$. Für alle Punkte (x, y) des abgeschlossenen Einheitsquadrats existiert ein Punkt t des abgeschlossenen Einheitsintervalls mit $f(t) = (x, y)$, und die Abbildung f ist zudem auch noch stetig. Die Spur von f ist der Laufweg eines Saugroboters, der in der Zeit $[0, 1]$ den Teppich $[0, 1]^2$ Punkt für Punkt absaugt. Die kinematische Interpretation ist hier nur noch ideell möglich. Aber auch aus abstrakter topologischer Sicht ist das Ergebnis überraschend. Wir können das Intervall $[0, 1]$ stetig in das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ überführen!

Widersprechen raumfüllende Kurven nicht unseren topologischen Ergebnissen über stetige Funktionen auf kompakten Intervallen? Dies ist nicht der Fall. Zunächst ist das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Funktion wieder kompakt. Dies ist erfüllt, da $[0, 1]^2$ kompakt ist. Weiter ist das Bild einer zusammenhängenden Menge wieder zusammenhängend. Dies ist auch erfüllt, denn $[0, 1]^2$ ist zusammenhängend. Ebenso ist $[0, 1]^2$ wie $[0, 1]$ auch wegzusammenhängend. Unsere topologischen Ergebnisse schließen die Existenz einer Peano-Kurve also nicht aus. Sie zeigen aber:

Satz (*Peano-Kurven sind nicht injektiv*)

Es gibt keine stetige Bijektion $g: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Insbesondere ist jede Peano-Kurve $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ nicht injektiv.

Beweis

Annahme, es gibt eine stetige Bijektion $g: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Sei dann $z^* \in \mathbb{R}^2$ das Urbild des Punktes $1/2$ unter g , sodass also $g(z^*) = 1/2$.

Wir betrachten nun die Einschränkung h von g auf das punktierte Einheitsquadrat $P = [0, 1]^2 - \{z^*\}$. Da g bijektiv ist, ist

$h: P \rightarrow [0, 1] - \{1/2\}$ stetig und bijektiv.

Aber die Menge P ist wegzusammenhängend, das Bild $[0, 1] - \{1/2\}$ von P unter h dagegen nicht. Dies ist ein *Widerspruch*, da stetige Surjektionen den Zusammenhang erhalten.

Zum Zusatz: Wäre $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ eine injektive Peano-Kurve, so wäre die Umkehrfunktion $g: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ von f eine stetige Bijektion nach

– dem Homöomorphiesatz, was nicht sein kann.

Das Argument lautet in Kurzform:

*Punktierungen erhalten den Zusammenhang der Ebene,
zerstören aber den Zusammenhang der Geraden.*

Unsere Intuition über die unterschiedlichen Dimensionen der Ebene und der Geraden ist also insofern gerettet, dass es keine stetige Bijektion zwischen $[0, 1]$ und $[0, 1]^2$ geben kann. Allgemeiner gilt, dass es für alle $n \neq m$ keine stetige Bijektion zwischen $[0, 1]^n$ und $[0, 1]^m$ gibt (Satz von Luitzen Brouwer 1911).

Der Leser wird sich nun wahrscheinlich fragen, wie man Peano-Kurven konstruieren kann. Wir skizzieren zwei Möglichkeiten. Bei der ersten konstruieren wir zunächst Approximationen an die gesuchte Kurve und führen dann einen Grenzübergang durch. Bei der zweiten nutzen wir die topologische Struktur der Cantor-Menge für eine direkte Konstruktion.

Konstruktion einer Peano-Kurve nach Hilbert

Die Idee der Konstruktion ist, einfache Kurven

$$f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

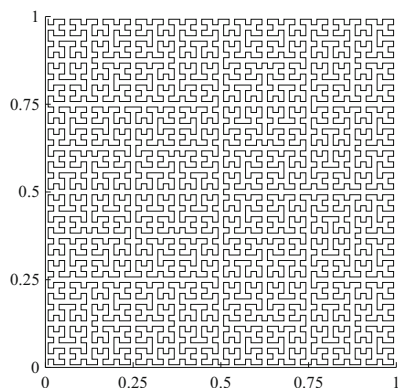
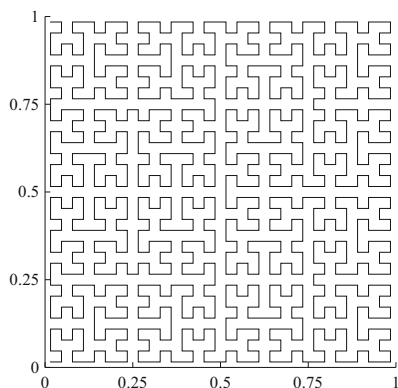
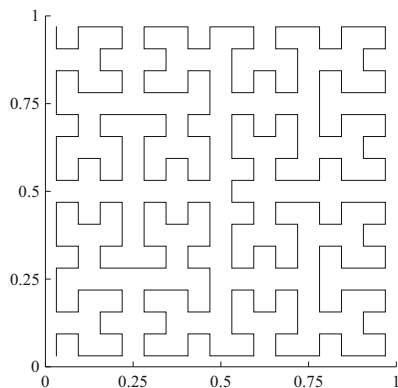
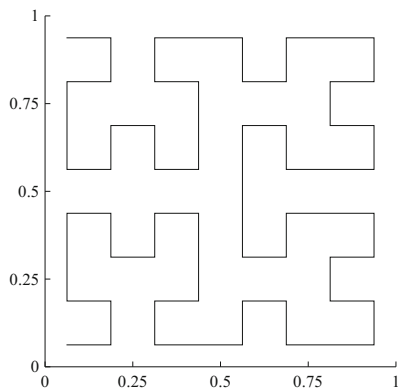
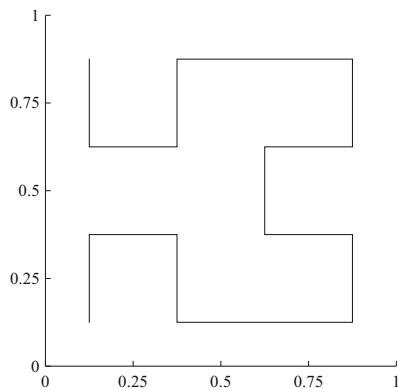
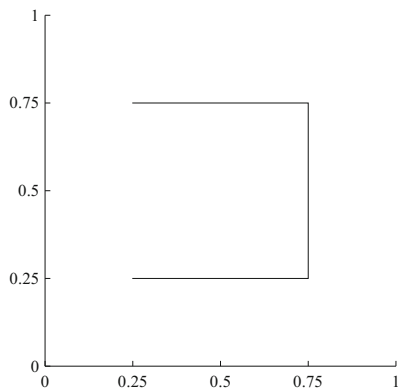
zu konstruieren, die das Einheitsquadrat dichter und dichter durchlaufen. Dabei entfernt sich die nächste Kurve f_{n+1} nicht weit von f_n , sodass eine stetige Grenzfunktion f definiert werden kann. Die Verdichtung der Kurven f_n führt zur Surjektivität von f . (Das Bild jeder Kurve von $[0, 1]$ nach $[0, 1]^2$ ist kompakt und damit abgeschlossen, sodass eine in $[0, 1]^2$ dichte Wertemenge bereits zur Surjektivität führt.) Zur Umsetzung dieser Idee betrachten wir die folgenden numerierten Aufteilungen des Einheitsquadrats $[0, 1]^2$, die der Lesbarkeit halber skaliert sind:

1	2
4	3

1	4	5	6
2	3	8	7
15	14	9	10
16	13	12	11

1	2	15	16	17	20	21	22
4	3	14	13	18	19	24	23
5	8	9	12	31	30	25	26
6	7	10	11	32	29	28	27
59	58	55	54	33	36	37	38
60	57	56	53	34	35	40	39
61	62	51	52	47	46	41	42
64	63	50	49	48	45	44	43

Wir erhalten nun Kurven f_1, f_2, f_3 von $[0, 1]$ nach $[0, 1]^2$, indem wir die Mittelpunkte der einzelnen Quadrate gemäß der Numerierung durch gerade Linien verbinden, wobei die Kurven auf diesen Verbindungslinien eine konstante Geschwindigkeit besitzen sollen. Führt man die Konstruktion fort, so erhält man eine konvergente Folge von Kurven f_n , deren punktweiser Limes f eine Peano-Kurve ist.



Die Diagramme zeigen die Spuren der Approximationen $f_1, \dots, f_6 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ an die Peano-Kurve f . Jedes f_n ist durch eine Liste von 4^n Punkten definiert. In jedem Schritt wird jeder Punkt nach einem bestimmten Schema durch vier neue Punkte ersetzt, die mit dem alten Punkt eine 5 wie auf einem Würfel bilden.

Konstruktion einer Peano-Kurve mit Hilfe der Cantor-Menge

Sei $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq [0, 1]$ die Cantor-Menge, mit durch wiederholtes Entfernen von Drittelintervallen definierten Mengen C_n . Wir verwenden, dass die Menge C aus allen Punkten $t \in [0, 1]$ besteht, die eine Ternärdarstellung der Form

$$t = 0, d_1 d_2 d_3 \dots = \sum_{k \geq 1} \frac{d_k}{3^k}, \quad d_k \in \{0, 2\} \text{ für alle } k \geq 1$$

besitzen. Jede Ternärdarstellung eines Punktes $t \in C$ ist eindeutig. Für jedes ternär dargestellte $t = 0, d_1 d_2 d_3 \dots \in C$ können wir also einen Punkt

$$g(p) = (x, y) \in [0, 1]^2,$$

definieren, indem wir in Binärdarstellung schreiben

$$x = 0, b_1 b_3 b_5 \dots, \quad y = 0, b_2 b_4 b_6 \dots, \quad \text{wobei}$$

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } d_k = 0, \\ 1, & \text{falls } d_k = 2. \end{cases}$$

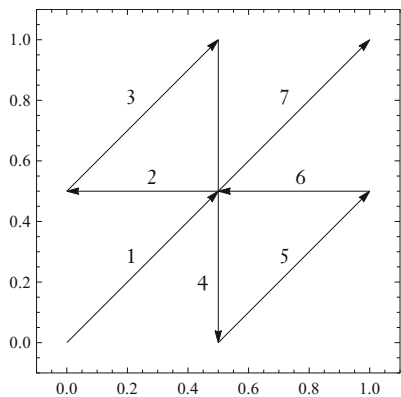
Mit anderen Worten:

Wir ersetzen in der eindeutigen Ternärdarstellung von $p \in C$ alle Zweien durch Einsen und erhalten durch Aufspalten der Nachkommastellen zwei 0-1-Folgen. Diese Folgen definieren, binär gelesen, einen Punkt in $[0, 1]^2$.

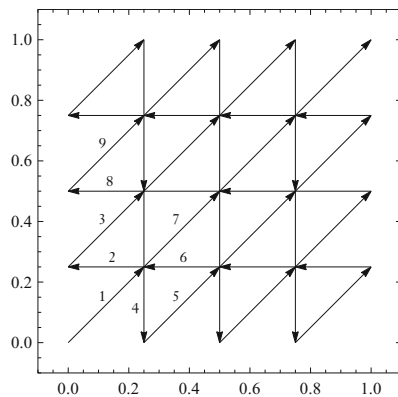
Die Konstruktion liefert eine stetige Surjektion $g : C \rightarrow [0, 1]^2$. Erneut kann g nicht bijektiv sein, da sonst aufgrund der Kompaktheit von C die Umkehrfunktion $g^{-1} : [0, 1]^2 \rightarrow C$ stetig und bijektiv wäre; dies ist unmöglich, da C unzusammenhängend ist. Die Funktion $g : C \rightarrow [0, 1]^2$ können wir stetig nach $[0, 1]$ fortsetzen, indem wir sie auf den bei der Konstruktion von C entfernten mittleren Drittelintervallen linear interpolieren; an den Randpunkten dieser Drittelintervalle ist g ja bereits definiert. Diese stetige Fortsetzung von g nach $[0, 1]$ – die wir wieder g nennen – ist eine Peano-Kurve von $[0, 1]$ nach $[0, 1]^2$.

Die topologische Natur von C spielt für diese Konstruktion eine wichtige Rolle. Jedes durch Vermeidung von 9-er Perioden eindeutig dezimal dargestellte $t \in [0, 1]$ können wir durch Aufspalten von Nachkommastellen auf $h(t) \in [0, 1]^2$ abbilden. Die so entstehende Abbildung $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ ist surjektiv, aber unstetig, etwa an der Stelle $t = 0,1 = \lim_n 0,09\dots 9$ mit n Neunen. Analoges gilt für beliebige b -adische Darstellungen mit $b \geq 2$.

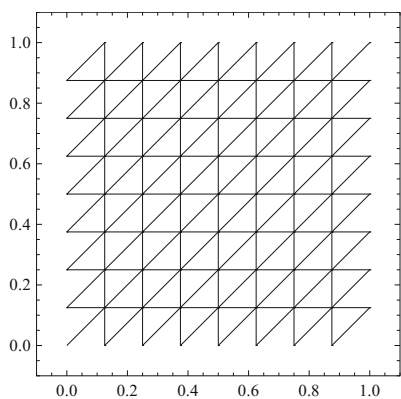
Die Konstruktion der Peano-Kurve g mit Hilfe der Cantor-Menge C können wir visualisieren, indem wir $g_n(t) = g(t)$ für die Randpunkte der Intervalle in C_n setzen und g_n linear interpolieren, um eine auf $[0, 1]$ definierte Funktion zu erhalten. Die entstehenden Funktionen g_n grasen $[0, 1]^2$ „von links unten nach links oben nach rechts unten nach rechts oben“ ab, unter Wiederholung dieses Schemas in kleineren Quadranten.



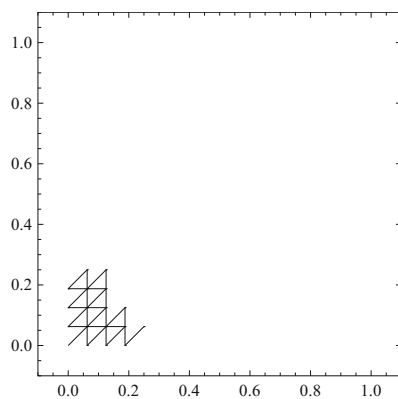
Verlauf von g_2



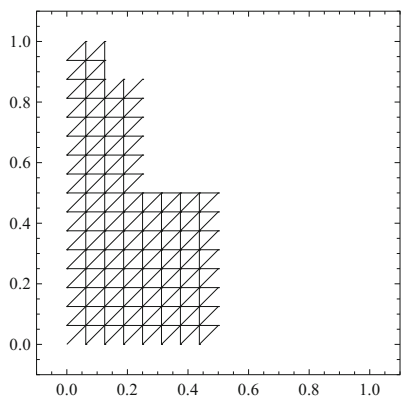
Verlauf von g_4



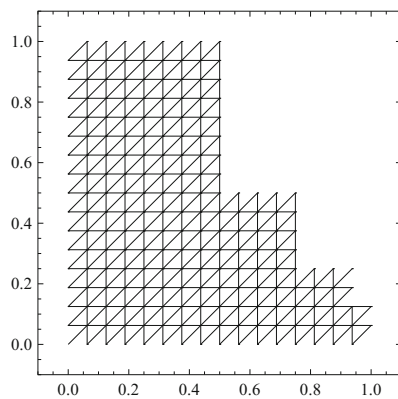
Spur von g_6



Aufbau von g_8 , I



Aufbau von g_8 , II



Aufbau von g_8 , III

2. Rektifizierbare Kurven

Für eine einfache Kurve in der Ebene oder im dreidimensionalen Raum besitzen wir eine gute Anschauung der Länge der Spur der Kurve und der Länge der Kurve selbst. Stellen wir uns die Spur der Kurve als Faden vor, so erhalten wir die Länge der Spur, indem wir den Faden gerade ziehen ohne ihn dabei zu dehnen. Ist die Kurve fast injektiv, so ist die Länge der Spur zugleich auch die Länge der Kurve. Bewegt sich dagegen die Kurve auf ihrer Spur vor und zurück, so müssen wir die mehrfach durchlaufenen Abschnitte der Spur mehrfach zählen, also den Faden dort mehrfach auslegen. Alternativ können wir ein der Kurve folgendes Rad auf der Spur abrollen und die Anzahl der Umdrehungen zählen, ein Kilometerzähler eines Fahrrads oder Autos funktioniert in dieser Weise. Ist die Kurve jedoch zu komplex – etwa eine Peano-Kurve –, so versagt unsere der kinematischen oder geometrischen Interpretation entspringende Anschauung.

Im Folgenden definieren und untersuchen wir den Längenbegriff für Kurven. Dabei entdecken wir einen engen Zusammenhang mit der in der Integrationstheorie schon eingeführten Variation. Weiter führen wir Kurvenintegrale ein, die nicht nur in der Mathematik, sondern auch in den Naturwissenschaften eine wichtige Rolle spielen.

Die Länge einer Kurve

Einen präzisen Längenbegriff erhalten wir durch die Approximation einer vorliegenden Kurve mit Hilfe von Polygonzügen, deren Länge elementargeometrisch bekannt ist. Bei der geometrischen Berechnung des Kreisumfangs hatten wir diese Methode bereits angewandt. Wir hatten dem Kreis regelmäßige n -Ecke einbeschrieben, und seinen Umfang durch einen Grenzübergang bestimmt (vgl. 3.5 in Band 1 und auch den Ausblick zu 1.5). Für die Definition der Längenapproximation einer beliebigen Kurve leisten die aus der Integration bekannten Partitionen gute Dienste:

Definition (*Polygonzug-Approximation*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve.

Für eine Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$

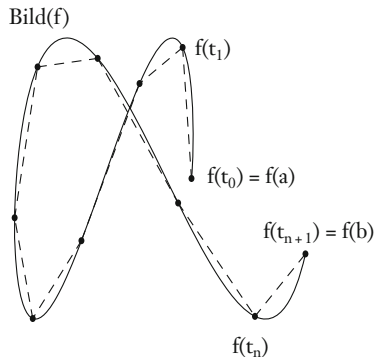
von $[a, b]$ setzen wir

$$L_p f = \sum_{k \leq n} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\|.$$

Die reelle Zahl $L_p f$ ist die euklidische Länge des durch die Punkte

$$f(a) = f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_{n+1}) = f(b)$$

definierten Polygonzugs. Damit können wir nun definieren:



Polygon-Approximation von f

Definition (*rektifizierbar, Länge, $L(f)$*)

Eine Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar*, falls ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit:

Für alle Partitionen p von $[a, b]$ der Feinheit δ gilt $|L_p f - c| < \varepsilon$.

(Rektifizierbarkeitsbedingung für c)

Die reelle Zahl c heißt dann die (*euklidische*) *Länge* von f , und wir schreiben

$$c = L(f).$$

Der Leser vergleiche die Rektifizierbarkeitsbedingung mit der Riemannschen Integrierbarkeitsbedingung. Die beiden Bedingungen sind analog, wobei nun die Polygonzug-Längen $L_p f$ an die Stelle der Riemann-Summen $\sum p f$ treten. Wie für das Riemann-Integral lässt sich Rektifizierbarkeit als Limes formulieren. Und wie dort erhalten wir: Ist f rektifizierbar und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen mit $\lim_n \delta(p_n) = 0$, so gilt $L(f) = \lim_n L_{p_n}(f)$.

Wie erwartet hängt die Länge einer Kurve nicht von der Parametrisierung ab:

Satz (*Unabhängigkeit der Länge von der Parametrisierung*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ rektifizierbar, und sei $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig und bi-jektiv. Dann ist $g = f \circ \phi$ rektifizierbar, und es gilt $L(f) = L(g)$.

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.

Unser Längenbegriff berücksichtigt mehrfach durchlaufene Abschnitte der Spur. So hat zum Beispiel die Kurve $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = |2(t - 1/2)| \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

die Länge 2, während die Spur $[0, 1]$ von f die Länge 1 besitzt. Die Kurve beschreibt einen Punkt, der sich in der Zeit $[0, 1/2]$ von 1 nach 0 und in der Zeit $[1/2, 1]$ von 0 nach 1 bewegt. Die Länge einer fast injektiven Kurve hängt dagegen nur von ihrer Spur ab.

Der folgende Satz besagt, dass die stetige Differenzierbarkeit einer Kurve ihre Rektifizierbarkeit nach sich zieht und dass die Länge einer derartigen Kurve das Integral über die Norm der Momentangeschwindigkeiten ist:

Satz (*Längensatz*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist f rektifizierbar und

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt. \quad (\text{Längenformel})$$

Das Ergebnis ist ein bemerkenswertes Zusammenspiel von Differentiation und Integration. Die Länge einer Kurve ist das Mittel der Momentangeschwindigkeiten (genauer: ihrer Normen), multipliziert mit der Gesamtzeit $b - a$ des Durchlaufs der Kurve. Ist die Geschwindigkeit konstant gleich 1, so ist die Länge von f einfach gleich $b - a$. Die Krümmung und viele andere geometrische Größen spielen für die Länge keine Rolle. Zwei stetig differenzierbare Kurven auf $[a, b]$, die zu jedem Zeitpunkt t gleichlange Tangentialvektoren besitzen, haben dieselbe Länge.

Lesen wir das Integral als infinitesimale Summe, so ist der Satz unter der kinematischen Interpretation recht einleuchtend: „Weg ist Geschwindigkeit mal Zeit“, und damit ist $\|f'(t)\| dt$ der in der infinitesimalen Zeit dt zurückgelegte infinitesimale Weg eines die Kurve durchlaufenden Punktes zur Zeit t . Alle diese Wege aufintegriert ergeben die Länge der Kurve. Ohne Verwendung von infinitesimalen Größen können wir die Formel so begründen:

Kinematische Begründung der Längenformel

Ist $p = (t_k)_{k \leq n}$ eine hinreichend feine Partition, so können wir $f'(t)$ in den Intervallen von p mit kleinem Fehler durch Differenzenquotienten ersetzen:

$$\begin{aligned} \int_a^b \|f'(t)\| dt &= \sum_{k \leq n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|f'(t)\| dt \sim \\ \sum_{k \leq n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\|f(t_{k+1}) - f(t_k)\|}{t_{k+1} - t_k} dt &= \sum_{k \leq n} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\| = L_p f. \end{aligned}$$

Diese Heuristik möge vorläufig genügen. Einen vollständigen Beweis der Formel geben wir später mit Hilfe einer äquivalenten Definition der Länge einer Kurve, die den Begriff der Variation verwendet.

Ein Spezialfall der Längenberechnung von Kurven ist die Berechnung der Länge von Graphen reellwertiger Funktionen. Die Integrationstheorie ermöglichte die Berechnung der von einem Graphen und der x -Achse eingeschlossenen signierten Fläche, die natürliche Frage, wie die Länge des Graphen bestimmt werden könne, blieb bislang unbeantwortet. Aus dem Satz erhalten wir nun eine Formel hierfür:

Korollar (*Länge von Graphen*)

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_a^b \sqrt{1 + g'(t)^2} \, dt$$

die Länge des Graphen von g , d.h., die Länge der Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t, g(t))$ für alle $t \in [a, b]$.

Beweis

Die Kurve f ist stetig differenzierbar mit

$$f'(t) = (1, g'(t)) \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Damit gilt also

$$\|f'(t)\| = \sqrt{1 + g'(t)^2} \quad \text{für alle } t \in [a, b],$$

– sodass die Behauptung aus der Längenformel folgt.

Wir bestimmen nun die Längen einiger Graphen und Kurven.

Beispiel 1: Geraden

Seien $c, d \in \mathbb{R}$, und sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) = ct + d$ für alle $t \in [a, b]$.

Dann ist die Länge des Graphen von g gleich

$$\int_a^b \sqrt{1 + g'(t)^2} \, dt = (b - a) \sqrt{1 + c^2} = \sqrt{(b - a)^2 + (g(b) - g(a))^2},$$

in Übereinstimmung mit dem Satz des Pythagoras.

Beispiel 2: Kreisbögen

Sei $r > 0$. Wir betrachten die Kurve $f_r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f_r(t) = r e^{it} = r(\cos t, \sin t) \quad \text{für alle } t \in [a, b],$$

also die gleichmäßige Bewegung auf einem Kreis mit Radius r gegen den Uhrzeigersinn. Die Kurve f_r ist stetig differenzierbar, und es gilt

$$f_r'(t) = r i e^{it} = r(-\sin t, \cos t) \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Also ist

$$L(f) = \int_a^b \|f_r'(t)\| \, dt = \int_a^b r \, dt = r(b - a).$$

Ist speziell $[a, b] = [0, 2\pi]$, so ist $L(f_r) = r2\pi$ der Umfang des Kreises mit Radius r und Mittelpunkt 0 in der Ebene.

Beispiel 3: Die Länge eines Parabelbogens

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Parabelkurve auf $[a, b]$, d. h., es gilt

$$f(t) = (t, t^2) \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Dann gilt für alle $t \in [a, b]$:

$$\|f'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2} = 2\sqrt{1/4 + t^2}.$$

Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = \frac{x g(x) + c^2 \log(x + g(x))}{2}$$

eine Stammfunktion der Funktion g mit

$$g(x) = \sqrt{c^2 + x^2}.$$

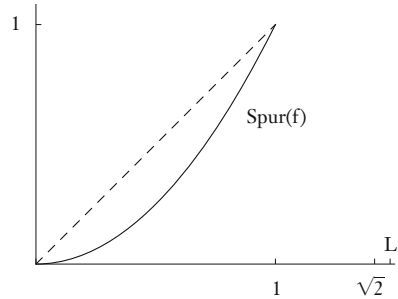
Mit $c = 1/2$ gilt also

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \left[x g(x) + \frac{1}{4} \log(x + g(x)) \right]_{x=a}^{x=b}.$$

Setzen wir $a = 0$ und $b = 1$, so ergibt sich für die Länge L des Parabelbogens über dem Einheitsintervall $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} L &= g(1) + \frac{1}{4} \left(\log(1 + g(1)) - \log(g(0)) \right) = \\ &= g(1) + \frac{1}{4} \log\left(\frac{1 + g(1)}{g(0)} \right) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Numerisch ist $L = 1,4789\dots$. Die Differenz zur Länge $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ der Diagonalen im Einheitsquadrat ist überraschend gering.

**Beispiel 4: Die Zykloide**

Wir legen den Einheitskreis auf den Nullpunkt der reellen Achse und markieren den Auflagepunkt $(0, 0)$ des Kreises. Nun rollen wir den Kreis gleichmäßig entlang der x -Achse ab. Der markierte Punkt durchläuft dabei einen Bogen, der nach einer halben Umdrehung des Kreises bei $(\pi, 2)$ und nach einer vollen Umdrehung des Kreises bei $(2\pi, 0)$ angelangt ist. Die entstehende Kurve ist als *Zykloide* bekannt. Analytisch können wir die Zykloide $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definieren durch

$$f(t) = e^{-i(t + \pi/2)} + (t, 1) = -i e^{-it} + (t, 1) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

Dann gilt für alle $t \in [0, 2\pi]$:

$$\|f'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} =$$

$$\sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} =$$

$$\sqrt{2 - 2\cos(t)} = \sqrt{4\sin^2(t/2)} =$$

$$2 |\sin(t/2)| = 2 \sin(t/2),$$

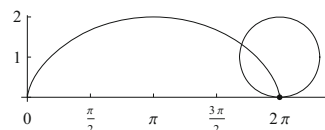
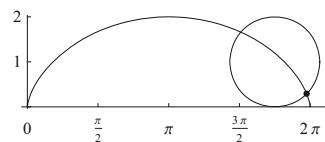
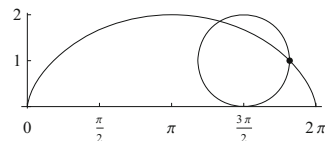
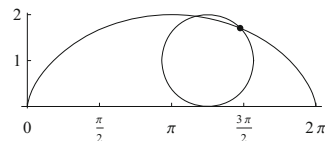
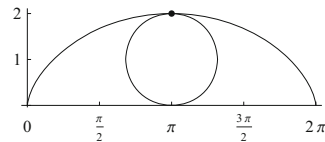
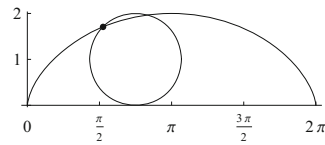
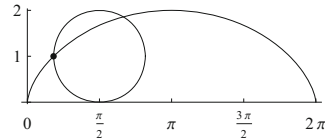
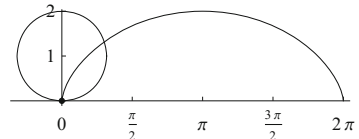
wobei wir $1 - \cos(t) = 2 \sin^2(t/2)$ verwendet haben. Damit berechnet sich die Länge zu

$$L(f) = \int_0^{2\pi} 2 \sin(t/2) dt = -4 \cos(t/2) \Big|_0^{2\pi} = 8.$$

Die Länge der Zykloide ist also eine natürliche Zahl, die an die Kreiszahl π , die bei der Erzeugung der Zykloide präsent ist, nicht mehr erinnert.

Die Zykloide spielt in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle. Eine Pendeluhr hat eine inhärente Gangungenauigkeit, die auf den kleinen Unterschied zwischen x und $\sin(x)$ für kleine x zurückzuführen ist. Die Differenz zwischen x und $\sin(x)$ führt selbst bei Vernachlässigung aller Reibungen dazu, dass die Schwingungsdauer eines Fadenpendels von seinem Ausschlag abhängt. Wir werden in Kapitel 5 zeigen, dass die Schwingungsdauer unabhängig vom Ausschlag wird, wenn sich der Pendelfaden links und rechts an eine Zykloide anschmiegt. Das Pendel selbst schwingt dann ebenfalls auf einer Zykloide und nicht mehr auf einem Kreis. Diese Erkenntnis geht auf Christiaan Huygens, einem Astronom, Physiker und Uhrmacher des 17. Jahrhunderts, zurück.

Eine zweite Bedeutung kommt der Zykloide in einem Optimierungsproblem der Variationsrechnung zu. Ein Körper, der eine reibungsfreie Bahn herabgleitet, benötigt hierzu eine gewisse von der Form der Bahn abhängige Zeit. Wie muss man die Bahn gestalten, dass diese Zeit minimal wird? Bereits Leibniz war bekannt, dass die Zykloide die Laufzeit minimiert.



Beispiel 5: Die Archimedische Spirale

Sei $a > 0$. Dann ist die *Archimedische Spirale* zum Parameter a die Funktion $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

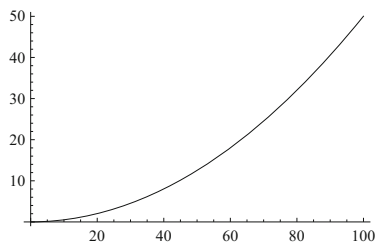
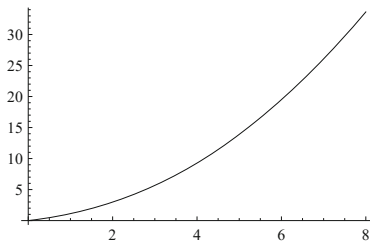
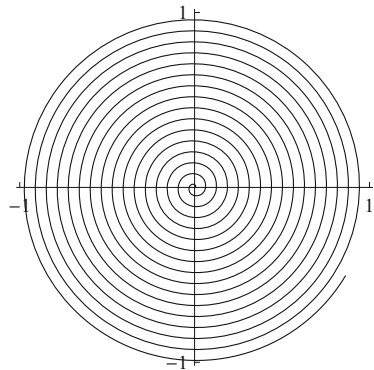
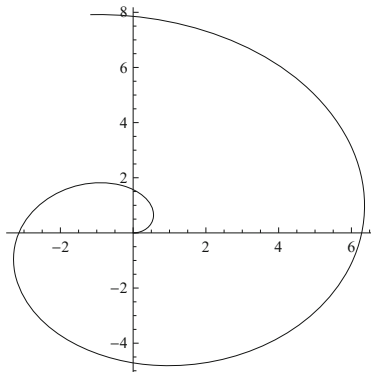
$$f(t) = a(t \cos(t), t \sin(t)) \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Für alle t liegt $f(t)$ auf einem Kreis mit Radius at . Die Funktion f beschreibt also in der Zeit t eine Spiralbewegung gegen den Uhrzeigersinn mit linear wachsenden Radien. Für alle $\varphi > 0$ berechnet sich die Länge der Spirale bis zum Zeitpunkt φ mit Hilfe der Stammfunktion wie in Beispiel 3 für $c = 1$ als

$$L(f|[0, \varphi]) = a \int_0^\varphi \|(\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t))\| dt =$$

$$a \int_0^\varphi \left(\cos(t)^2 - 2t \cos(t) \sin(t) + t^2 \sin(t)^2 + \right. \\ \left. \sin(t)^2 + 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \cos(t)^2 \right)^{1/2} dt =$$

$$a \int_0^\varphi \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{a}{2} \left(\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \log(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}) \right).$$

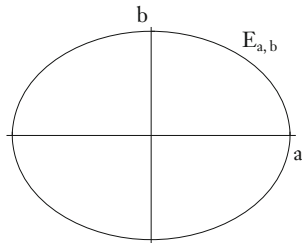


Archimedische Spirale $f_a(t)$ und ihre Längenentwicklung $L(f_a|[0, t])$
in der Zeit $t \in [0, 8]$ für $a = 1$ bzw. $t \in [0, 100]$ für $a = 1/100$ rechts

Beispiel 6: Der Umfang einer Ellipse

Für $a \geq b > 0$ sei

$$E_{a,b} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 \right\}.$$



Die Ellipsenfläche ist $a b \pi$, in Erweiterung der Formel $r^2 \pi = r r \pi$ der Kreisfläche. Mit Blick auf den Kreisumfang $(r + r) \pi$ würde man vielleicht $(a + b) \pi$ für den Umfang der Ellipse vermuten. Dies ist jedoch falsch, da $(a + b) \pi$ für b gegen 0 nicht gegen $4a$ strebt. Um eine korrekte Formel zu finden, parametrisieren wir (aus traditionellen Gründen) $E_{a,b}$ durch die Kurve $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(t) = (a \cos(\pi/2 - t), b \sin(\pi/2 - t)) = (a \sin(t), b \cos(t)).$$

Dies entspricht einem Durchlaufen der Ellipse im Uhrzeigersinn mit Start bei $(0, 1)$. Die Länge des durch $\varphi \in [0, 2\pi]$ definierten Ellipsenbogens ist

$$L(f| [0, \varphi]) = \int_0^\varphi \|f'(t)\| dt = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt =$$

$$a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2(t) + b^2/a^2 \sin^2(t)} dt = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(t)} dt,$$

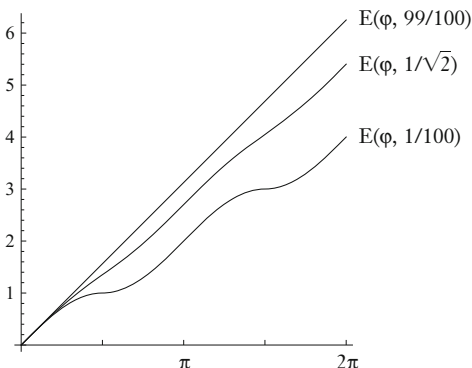
mit der *numerischen Exzentrizität*

$$\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}, \text{ sodass } b^2/a^2 = 1 - \varepsilon^2.$$

Das Integral hat für $\varepsilon < 1$ innerhalb der elementaren Funktionen keine Stammfunktion! Man muss eine neue Funktion einführen. Für $\varepsilon \in]0, 1[$ definiert man das *elliptische Integral zweiter Art in Legendre-Form* durch

$$E(\varphi, \varepsilon) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(t)} dt \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $L(f| [0, \varphi]) = a E(\varphi, \varepsilon)$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$, also $L(f) = a E(2\pi, \varepsilon)$.



Die elliptischen Integral-Funktionen für einige ε . Für $a = 1$ und $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ ist $b = \varepsilon$, sodass diese Exzentrizität ausgezeichnet ist. Der Umfang der Ellipse mit diesen Halbachsen ist $E(2\pi, \varepsilon) = 5,40257552\dots$ während $(a + b)\pi = 5,36303412\dots$

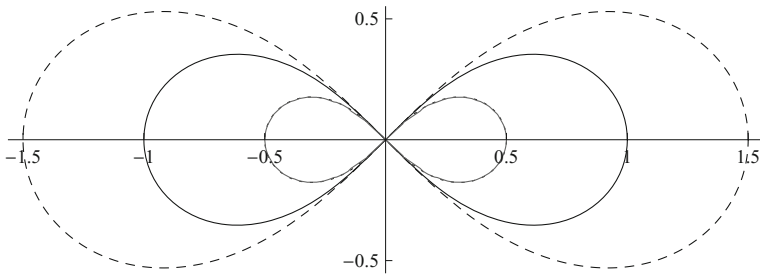
Beispiel 7: Die Lemniskate von Jakob Bernoulli

Sei $a > 0$. Dann heißt die Kurve $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(t) = a \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi]$$

die *Lemniskate* (Schleife) zum Parameter $a > 0$. Ein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ liegt genau dann auf der Lemniskate, wenn das Produkt der Abstände von (x, y) zu den Punkten $(-p, 0)$ bzw. $(p, 0)$ gleich p^2 ist, wobei $p = a/\sqrt{2}$. Damit gilt

$$\text{Spur}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)\}.$$



Lemniskaten zu den Parametern 1/2 (Innen), 1 (Mitte) und 3/2 (Außen)

Die Quotientenregel und trigonometrische Umformungen ergeben

$$(1 + \sin^2 t)^2 f_1'(t) = a \sin t (\sin^2 t - 3),$$

$$(1 + \sin^2 t)^2 f_2'(t) = a (1 - 3 \sin^2 t),$$

$$(1 + \sin^2 t)^4 (f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2) = a^2 (1 + \sin^2 t)^3.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} L(f) &= 4 \int_0^{\pi/2} \|f'(t)\| dt = 4a \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 + \sin^2 t}} = \\ &= 4a \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}} = 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - 1/2 \sin^2 t}}. \end{aligned}$$

Wie im letzten Beispiel ist das Integral nicht mehr elementar. Integrale mit Integranden der Form $(1 - \varepsilon^2 \sin^2 t)^{-1/2}$ heißen *elliptische Integrale erster Art in Legendre-Form*. Eine numerische Berechnung ergibt

$$L(f) = 2a \, 2,622057554292119810464839589891119... =: 2a \, \varpi.$$

Die von Gauß in Analogie zu $2a\pi$ für den Umfang eines Kreises mit Radius a eingeführte *Lemniskatische Konstante* ϖ (gelesen Varpi) ist wie π transzendent.

Rektifizierbarkeit und beschränkte Variation

Bei unserer Untersuchung der integrierbaren Funktionen hatten wir die Variation $\text{var}(f) \in [0, \infty]$ einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\text{var}(f) = \sup \left(\left\{ \sum_{k \leq n} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \mid (t_k)_{k \leq n} \text{ ist eine Partition von } [a, b] \right\} \right)$$

definiert und gezeigt, dass eine Funktion mit beschränkter Variation integrierbar ist. Wir erweitern den Begriff nun auf Funktionen, die Werte im \mathbb{R}^n annehmen.

Definition (*Variation, beschränkte Variation*)

Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir die (*totale*) *Variation* von f durch

$$\text{var}(f) = \sup \left(\left\{ \sum_{k \leq n} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\| \mid (t_k)_{k \leq n} \text{ ist eine Partition von } [a, b] \right\} \right).$$

f heißt *von beschränkter Variation* oder eine *bv-Funktion*, falls $\text{var}(f) < \infty$.

Im Vergleich zur alten Definition werden also die Betragsstriche durch die euklidische Norm im \mathbb{R}^n ersetzt. Der enge Zusammenhang zwischen der Variation und der Länge für Kurven f ist augenfällig, denn nach Definition gilt:

$$\text{var}(f) = \sup_p L_p f.$$

In der Tat sind „Länge“ und „Variation“ für Kurven identisch:

Satz (*Rektifizierbarkeit und beschränkte Variation*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist rektifizierbar.
- (b) f ist eine bv-Funktion.

In diesem Fall gilt $L(f) = \text{var}(f)$.

Beweis

(a) *impliziert* (b): Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen mit $\lim_n \delta(p_n) = 0$ derart, dass

$$\lim_n L_{p_n} f = \text{var}(f) \leq \infty.$$

Da f rektifizierbar ist, gilt $\lim_n L_{p_n} f = L(f) < \infty$. Also ist $\text{var}(f) < \infty$ und zudem $\text{var}(f) = L(f)$.

(b) *impliziert* (a): Wir zeigen, unter Verwendung der gleichmäßigen Stetigkeit von f , die Rektifizierbarkeitsbedingung für $c = \text{var}(f) < \infty$. Sei also $\varepsilon > 0$. Da $L_p f \leq \text{var}(f)$ für alle Partitionen p gilt, genügt es, ein $\delta > 0$ zu finden, sodass für alle Partitionen p von $[a, b]$ der Feinheit δ gilt:

$$(\+) \quad \text{var}(f) - \varepsilon < L_p f.$$

Sei p^* eine Partition von $[a, b]$ der Länge m mit

$$\text{var}(f) - L_{p^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiter sei $\delta > 0$ derart, dass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{4m}.$$

Sei nun p eine beliebige Partition von $[a, b]$ der Feinheit $\delta > 0$. Die Partition p^{**} , die durch die Zerlegungspunkte von p und p^* gebildet wird, ist eine Partition der Feinheit δ , und es gilt

$$L_{p^*} f \leq L_{p^{**}} f \leq L_p f + 2m \frac{\varepsilon}{4m} = L_p f + \frac{\varepsilon}{2},$$

denn die m Zerlegungspunkte von p^* tauchen in höchstens $2m$ Summanden von $L_{p^{**}} f$ auf. Dann ist aber wie gewünscht

$$\text{—} \quad \text{var}(f) - \varepsilon = \text{var}(f) - L_{p^*} f + L_{p^*} f - \varepsilon < \varepsilon/2 + L_p f - \varepsilon/2 = L_p f.$$

Der Satz liefert für ein stetiges $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine neue Interpretation der Variation: Die reelle Zahl $\text{var}(f)$ ist die Länge der Kurve $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g(t) = (t, f(t)) \quad \text{für alle } t \in [a, b],$$

also die von einem Punkt in der Zeit $[a, b]$ zurückgelegte Strecke, der sich gemäß g auf der y -Achse von $f(a)$ nach $f(b)$ bewegt. Diese Kurve können wir als die Projektion des Graphen von f auf die y -Achse interpretieren.

Da $\text{var}(f) = \text{var}(f \circ \phi)$ für eine stetige Bijektion $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ gilt, liefert der Satz noch einmal die Unabhängigkeit der Länge einer Kurve von der Parametrisierung. Weiter zeigt er:

Korollar (*Vektorraum-Struktur und Umfang der rektifizierbaren Kurven*)

Die n -dimensionalen rektifizierbaren Kurven auf $[a, b]$ bilden einen Vektorraum, der die Lipschitz-stetigen und damit die stetig differenzierbaren Kurven umfasst.

Dass mit zwei Kurven f, g auch $f + g$ rektifizierbar ist, ist mit Variation leicht einzusehen. Die Rektifizierbarkeitsbedingung erscheint hier weniger geeignet.

Wir beweisen nun noch die Längenformel. Hierzu sind einige Abschätzungen für integrierbare Kurven nützlich. Das Integral einer Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir dabei wie für komplexwertige Funktionen komponentenweise, d. h., wir setzen

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt, dass für alle integrierbaren Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Denn ist $\langle v, w \rangle = \sum_{k \leq n} v_k w_k$ das kanonische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n , so gilt für

$$v = \int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}^n$$

die Abschätzung

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \left\langle \int_a^b f(t) dt, v \right\rangle = \int_a^b \langle f(t), v \rangle dt \leq \text{Cauchy-Schwarz}$$

$$\int_a^b \|f(t)\| \|v\| dt = \|v\| \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Eine Abschätzung in der anderen Richtung liefert der folgende Satz.

Satz (*Normabschätzung*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $[c, d] \subseteq [a, b]$ mit $d - c \leq \delta$ gilt:

$$\int_c^d \|f(t)\| dt \leq \left\| \int_c^d f(t) dt \right\| + \varepsilon(d - c).$$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\|f(t) - f(c)\| \leq \varepsilon/2 \quad \text{für alle } t, c \in [a, b] \text{ mit } |t - c| \leq \delta.$$

Dann gilt für alle $[c, d] \subseteq [a, b]$ mit $d - c \leq \delta$:

$$\int_c^d \|f(t)\| dt \leq \int_c^d \|f(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} dt = \left\| \int_c^d f(c) dt \right\| + \frac{\varepsilon(d - c)}{2} =$$

$$\left\| \int_c^d f(t) + f(c) - f(t) dt \right\| + \frac{\varepsilon(d - c)}{2} \leq$$

$$\left\| \int_c^d f(t) dt \right\| + \int_c^d \|f(c) - f(t)\| dt + \frac{\varepsilon(d - c)}{2} \leq$$

$$\left\| \int_c^d f(t) dt \right\| + \frac{\varepsilon(d - c)}{2} + \frac{\varepsilon(d - c)}{2} = \left\| \int_c^d f(t) dt \right\| + \varepsilon(d - c).$$

Damit können wir nun die Berechnungsformel beweisen:

Satz (Längensatz)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist f rektifizierbar und

$$L(f) = \text{var}(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Beweis

Für jede Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$ gilt nach dem Hauptsatz:

$$L_p f = \sum_{k \leq n} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\| = \sum_{k \leq n} \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t) dt \right\| \leq$$

$$\sum_{k \leq n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

$$\text{Also ist } \text{var}(f) = \sup_p L_p f \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Für die andere Ungleichung sei $\varepsilon > 0$. Weiter sei $\delta > 0$ wie im Satz über die Normabschätzung für die stetige Funktion f' . Ist nun $p = (t_k)_{k \leq n}$ eine Partition der Feinheit δ , so gilt

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt = \sum_{k \leq n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|f'(t)\| dt \leq$$

$$\sum_{k \leq n} \left(\left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t) dt \right\| + \varepsilon (t_{k+1} - t_k) \right) =$$

$$\sum_{k \leq n} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\| + \varepsilon(b-a) = L_p f + \varepsilon(b-a).$$

$$\text{Da dies für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt, ist } \text{var}(f) = \sup_p L_p f \geq \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Im Fall $n = 1$ lässt sich der Satz mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung elegant beweisen:

Einfacher Beweis des Satzes für $n = 1$

Für jede Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$ seien $x_k \in [t_k, t_{k+1}]$ mit

$$\frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = f'(x_k) \quad \text{für alle } k \leq n.$$

Dann gilt für die um die Stützstellen $(x_k)_{k \leq n}$ ergänzte Partition p :

$$L_p f = \sum_{k \leq n} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| = \sum_{k \leq n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|f(t_{k+1}) - f(t_k)|}{t_{k+1} - t_k} dt =$$

$$\sum_{k \leq n} |f'(x_k)| (t_{k+1} - t_k) = \sum_p |f'|.$$

Ist nun p_n eine Folge von Partitionen mit $L(f) = \text{var}(f) = \sup_n L_{p_n} f$ und $\lim_n \delta(p_n) = 0$, so gilt aufgrund der Integrierbarkeit von $|f'|$, dass

$$\text{var}(f) = \lim_n L_{p_n} f = \lim_n \sum_{p_n} |f'| = \int_a^b |f'(t)| \, dt.$$

Für Funktionen, die Werte im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, annehmen, steht der Mittelwertsatz nicht mehr zur Verfügung (vgl. die Übungen), so dass dieses einfache Argument nicht übernommen werden kann.

Erweiterung des Ergebnisses

Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit ist manchmal etwas zu eng, da zum Beispiel eine Kurve $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, die das Einheitsquadrat der Ebene in konstanter Geschwindigkeit durchläuft, nicht stetig differenzierbar ist. Es ist deswegen günstig, endlich viele „Knicke“ zuzulassen. Wir definieren in Analogie zur stückweisen Stetigkeit:

Definition (stückweise differenzierbar)

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise (stetig) differenzierbar*, falls eine Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$ existiert, sodass für alle $k \leq n$ gilt:

$f|]t_k, t_{k+1}[$ besitzt eine (stetig) differenzierbare Fortsetzung nach $[t_k, t_{k+1}]$.

Eine stückweise differenzierbare Funktion muss nicht stetig sein. Ist f jedoch stetig (also eine Kurve), so können wir uns f als eine Aneinanderreihung von endlich vielen differenzierbaren Kurven vorstellen. Endzeit und Endpunkt sind dabei Startzeit und Startpunkt der folgenden Kurve.

Aufgrund der Aufspaltungseigenschaft des Integrals können wir über reellwertige stückweise stetig differenzierbare Funktionen freizügig integrieren, auch wenn diese Ableitung an endlich vielen Stellen nicht definiert ist. Wir schreiben also zum Beispiel kurz

$$\int_a^b \|f'(x)\| \, dx \quad \text{für} \quad \sum_{k \leq n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|f'_k(x)\| \, dx,$$

wobei f_k die stetig differenzierbare Fortsetzung von $f|]t_k, t_{k+1}[$ nach $[t_k, t_{k+1}]$ ist.

Die Längenformel gilt, wie leicht zu sehen ist, in verallgemeinerter Form:

Satz (Längensatz, II)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann ist f rektifizierbar und

$$L(f) = \text{var}(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt.$$

Kurvenintegrale für reellwertige Funktionen

Die Längenformel

$$L(f) = \text{var}(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b 1 \|f'(t)\| dt$$

motiviert die Definition eines Integrals entlang einer Kurve:

Definition (*Kurvenintegral für reellwertige Funktionen*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$, und sei $g: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei $f: [a, b] \rightarrow P$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_f g = \int_f g(x) dx = I_f(g) = \int_a^b g(f(t)) \|f'(t)\| dt$$

das *Kurvenintegral (erster Art)* der Funktion g entlang der Kurve f .

Auf der rechten Seite der Definition des Kurvenintegrals wird eine reellwertige Funktion integriert. Vorstellung ist, dass wir die Kurve f in der Zeit $[a, b]$ durchlaufen und die uns dabei begegnenden reellen Funktionswerte $g(f(t))$ unter Berücksichtigung der Momentangeschwindigkeit aufintegrieren. Je größer die Norm der Momentangeschwindigkeit zur Zeit t ist, desto größer ist der Beitrag des Integranden an der Stelle t zum Integral. Hohe Geschwindigkeiten führen aber zu kurzen Zeitintervallen $[a, b]$ und damit zu im Betrag kleineren Integralen. Insgesamt wird ein ausgleichender Effekt erreicht, denn ein Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve:

Satz (*Kurvenintegrale und Parametrisierung*)

Seien g, f wie oben, und sei $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare (oder stetige und stückweise stetig differenzierbare) Bijektion. Dann gilt

$$\int_{f \circ \varphi} g = \int_f g.$$

Ist also f fast injektiv, so hängt das Kurvenintegral von g entlang f nur von der Spur von f ab.

Beweis

Wir setzen $\sigma = 1$, falls φ orientierungserhaltend ist, und $\sigma = -1$ andernfalls. Dann gilt unter Verwendung der Ketten- und Substitutionsregel:

$$\int_{f \circ \varphi} g = \int_c^d g(f(\varphi(s))) \|(f \circ \varphi)'(s)\| ds = \int_c^d |\varphi'(s)| g(f(\varphi(s))) \|f'(\varphi(s))\| ds =$$

$$= \sigma \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} g(f(t)) \|f'(t)\| dt = \sigma^2 \int_a^b g(f(t)) \|f'(t)\| dt = \int_f g.$$

In vielen Anwendungen ist die Unabhängigkeit von der Parametrisierung erwünscht. Wollen wir zum Beispiel die mittlere Temperatur eines glühenden Drahtes bestimmen, so ist ein Kurvenintegral geeignet. Das Ergebnis darf nicht davon abhängen, in welcher Richtung oder Geschwindigkeit wir den Draht abtasten. Es gibt aber auch Beispiele, bei denen die Momentangeschwindigkeit nicht in das Integral einbezogen wird. Beschreibt $f(t)$ eine Wanderung und ist $g(f(t))$ die Temperatur am Ort $f(t)$, so hängt die mittlere vom Wanderer empfundene Temperatur vom Geschwindigkeitsverlauf ab, man vergleiche eine Rast im Schatten oder in der prallen Sonne. Hier würde man einfach über $g(f(t))$ nach der Zeit $t \in [a, b]$ integrieren, und dann durch $b - a$ teilen.

Beispiele

- (1) Der Spezialfall einer konstanten Funktion g mit $g(x) = 1$ für alle $x \in P$ entspricht der Länge von f :

$$L(f) = \int_f 1.$$

- (2) Ist $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ die Identität, so gilt

$$\int_f g(x) dx = \int_a^b g(f(t)) \|f'(t)\| dt = \int_a^b g(t) dt.$$

Ein reelles Integral kann also als Kurvenintegral aufgefasst werden.

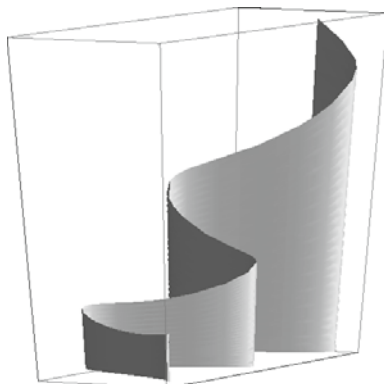
- (3) Ist $r > 0$ und $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = r e^{it}$, so ist

$$\int_f g(x) dx = \int_0^{2\pi} g(f(t)) \|f'(t)\| dt = r \int_0^{2\pi} g(r \cos(t), r \sin(t)) dt$$

Ist f fast injektiv, so können wir das Kurvenintegral über g entlang f als den signierten Inhalt der Menge

$$A = \{ (f(t), z) \mid t \in [a, b], z \text{ liegt zwischen } 0 \text{ und } g(f(t)) \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

auffassen. Beispiel 2 ist ein Spezialfall hierfür mit $n = 1$. Für die Dimension $n = 2$ ergibt sich eine anschauliche Interpretation des Kurvenintegrals: Verbinden wir für alle t den Punkt $(f(t), g(f(t)))$ des Raumes mit seiner Projektion $f(t) \in \mathbb{R}^2$, so entsteht ein unendlich dünner „Vorhang“ im Raum, dessen signierte Fläche das Kurvenintegral über g entlang der ebenen Kurve f ist.



Ausblick: Kurvenintegrale für Vektorfelder

Neben dem Kurvenintegral für reellwertige Funktionen $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich auch ein Kurvenintegral für Vektorfelder $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ einführen. Es spielt insbesondere in der Physik eine wichtige Rolle. Zur Motivation betrachten wir ein Kraftfeld $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und eine rektifizierbare Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. In jedem Punkt (x, y, z) des dreidimensionalen Raumes ist also ein dreidimensionaler Vektor $g(x, y, z)$ angeheftet, dessen Richtung und Betrag die dortige Kraft angibt. Bewegen wir nun einen Massepunkt in diesem Kraftfeld entlang eines f approximierenden Polygonzugs

$$f(a) = f(t_0), \quad f(t_1), \quad \dots, \quad f(t_n), \quad f(t_{n+1}) = f(b),$$

so wird gemäß „Arbeit ist Kraft mal Weg“ näherungsweise die Arbeit

$$\sum_{k \leq n} \langle g(f(t_k)), f(t_{k+1}) - f(t_k) \rangle$$

verrichtet, mit dem euklidischen Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 . Die Näherung besteht hier darin, dass wir die Kraft g auf der Strecke von $f(t_k)$ nach $f(t_{k+1})$ als konstanten Vektor ansehen. Im Grenzübergang erhalten wir die verrichtete Arbeit bei einer Bewegung im Kraftfeld g entlang f . Wie bei der Länge wird aus der Summe ein Integral und aus den Differenzen der Kurvenwerte ein Geschwindigkeitsvektor. Die verrichtete Arbeit ist also (per Definition) das Kurvenintegral über g entlang f gemäß folgender allgemeiner Begriffsbildung:

Definition (*Kurvenintegral für Vektorfelder*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$, und sei $g: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Weiter sei $f: [a, b] \rightarrow P$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_f g = \int_f \langle g(x), dx \rangle = \int_f g(x) \cdot dx = \int_f g(x) \cdot d(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\int_f g_1(x) dx_1 + \dots + g_n(x) dx_n = \int_a^b \langle g(f(t)), f'(t) \rangle dt$$

das *Kurvenintegral (zweiter Art)* von g entlang f .

Auf der rechten Seite wird wie im Kurvenintegral erster Art eine reelle Funktion integriert. Der Integrand ist nun aber anders aufgebaut. Wir durchlaufen wieder die Kurve f in der Zeit $[a, b]$, aber nun begegnet uns an jedem Kurvenpunkt $f(t) \in \mathbb{R}^n$ kein Skalar, sondern ein Vektor $g(f(t)) \in \mathbb{R}^n$. Das Skalarprodukt von $g(f(t))$ mit dem Tangentialvektor $f'(t)$ bestimmt den Beitrag zum Integranden. Dieser Beitrag ist groß, wenn der Tangentialvektor der Norm nach groß ist und zudem in die Richtung oder Gegenrichtung des Feldvektors zeigt. Er ist gleich Null, wenn der Tangentialvektor senkrecht auf dem Feldvektor steht. Im Beispiel der geleisteten Arbeit: Bewegt sich der Massepunkt senkrecht

zur Kraft, so wird keine Arbeit verrichtet, bewegt er sich zumindest anteilig mit oder gegen die Kraft, so wird eine positive bzw. negative Arbeit verrichtet.

Das Kurvenintegral zweiter Art respektiert wie das Kurvenintegral erster Art die Äquivalenz von Kurven: Gilt $f_2 = f_1 \circ \varphi$ für eine orientierungstreue stetig differenzierbare Parametertransformation φ , so sind die Kurvenintegrale von g entlang f_1 und f_2 gleich. Man spricht deswegen auch von *Wegintegralen*, da die Integrale auf Äquivalenzklassen von Kurven definiert werden können. Ist φ orientierungsumkehrend, so ändert sich, im Gegensatz zur ersten Art, das Vorzeichen.

Beispiel

Sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$g(x, y) = (y, y - x).$$

Wir betrachten die Kurven

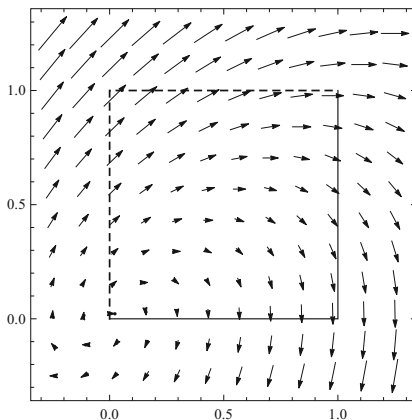
$$f_1, f_2: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit}$$

$$f_1(t) = (t, 0) \quad \text{für } t \in [0, 1],$$

$$f_1(t) = (1, t - 1) \quad \text{für } t \in [1, 2],$$

$$f_2(t) = (0, t) \quad \text{für } t \in [0, 1],$$

$$f_2(t) = (t - 1, 1) \quad \text{für } t \in [1, 2].$$



Sie führen von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ über $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ mit normierter Momentangeschwindigkeit in der geraden Laufrichtung. Es gilt

$$\int_{f_1} g(x, y) \cdot d(x, y) = \int_0^1 \langle g((t, 0)), (1, 0) \rangle dt + \int_1^2 \langle g((1, t - 1)), (0, 1) \rangle dt =$$

$$\int_0^1 \langle (0, t), (1, 0) \rangle dt + \int_1^2 \langle (t - 1, t - 2), (0, 1) \rangle dt = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\int_{f_2} g(x) \cdot d(x, y) = \int_0^1 \langle g((0, t)), (0, 1) \rangle dt + \int_1^2 \langle g((t - 1, 1)), (1, 0) \rangle dt =$$

$$\int_0^1 \langle (t, t), (0, 1) \rangle dt + \int_1^2 \langle (1, 2 - t), (1, 0) \rangle dt = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Ein Kurvenintegral von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ hängt hier also von der Kurve ab. Im nächsten Abschnitt werden wir sog. Gradientenfelder kennenlernen. In diesen Feldern hängen Kurvenintegrale wie durch Stammfunktionen ausgewertete reelle Integrale nur noch vom Anfangs- und Endpunkt ab, und speziell sind dann Integrale über geschlossene Kurven stets gleich 0.

3. Mehrdimensionale Differenzierbarkeit

Nachdem wir mit den Kurven erste Erfahrungen im Mehrdimensionalen gesammelt haben, erweitern wir nun unseren Rahmen noch einmal, indem wir auch mehrdimensionale Definitionsbereiche zulassen.

Mehrdimensionale Funktionen und ihre Visualisierung

Wir betrachten Funktionen der Form $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Dabei sind die Dimensionen n und m positive natürliche Zahlen und die Räume \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m mit der euklidischen Metrik ausgestattet. Wir kennen die Kombinationen

$n = m = 1$, *(eindimensionale Analysis)*

$n = 1, m \geq 1$. *(Kurven mit allgemeinen Definitionsbereichen)*

Der Anschauung gut zugänglich ist

$n = 2, m = 1$. *(dreidimensionale Höhenlandschaften)*

Funktionen dieses Typs können wir visualisieren, indem wir eine dreidimensionale (oder genauer: dreidimensional wirkende) Skizze ihres Graphen erstellen. Dies ist per Hand oft nur schwer möglich. Mit Hilfe des Computers lassen sich dagegen Höhenlandschaften zeichnen, die aus verschiedenen Perspektiven betrachtet, eingefärbt und virtuell ausgeleuchtet werden können. Neben diesen 3D-Plots gibt es auch eine – manchmal sogar informativere – Visualisierung, die in der Ebene verbleibt: Zweidimensionale Landkarten mit Höhenlinien. Auch hierzu ist der Computer hilfreich, aber in einfachen Fällen lässt sich eine solche Karte auch noch per Hand erstellen. Allgemein definieren wir:

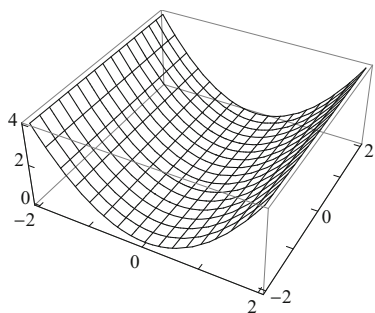
Definition *(Niveaumengen und Höhenlinien)*

Für $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, und $c \in \mathbb{R}$ heißt

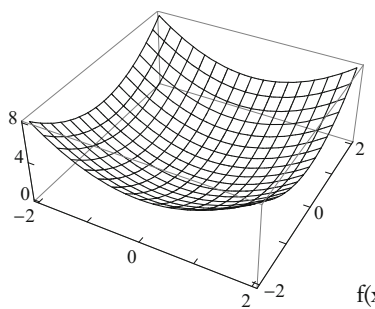
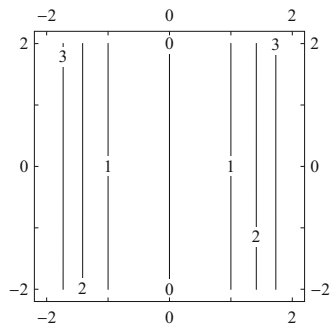
$$\text{niv}_f(c) = f^{-1}[\{c\}] = \{p \in P \mid f(p) = c\}$$

die *Niveaumenge* oder für $n = 2$ auch die *Höhenlinie* von f für den Wert c .

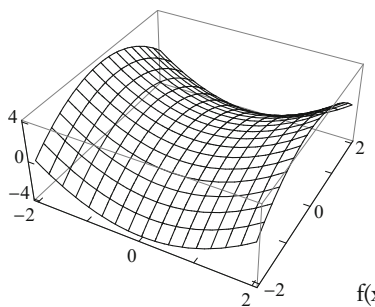
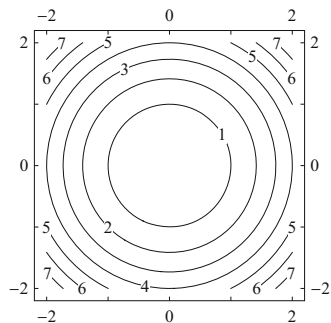
Für $n = 2$ können wir eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ durch *Höhenliniendiagramme* oder *Kontur-Plots* visualisieren, indem wir für einige Werte c die Mengen $\text{niv}_f(c)$ bestimmen, in der Ebene einzeichnen und mit dem Wert c markieren. In vielen Fällen sind diese Mengen tatsächlich Linien. Die folgenden Diagramme zeigen 3D-Plots und Kontur-Plots einiger Funktionen.



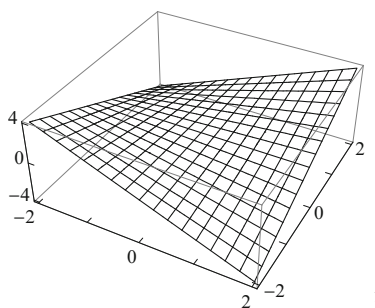
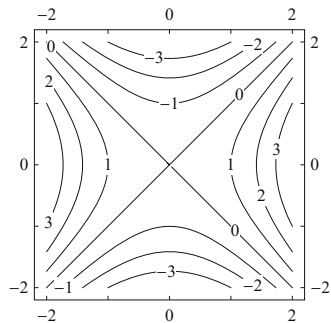
$$f(x, y) = x^2$$



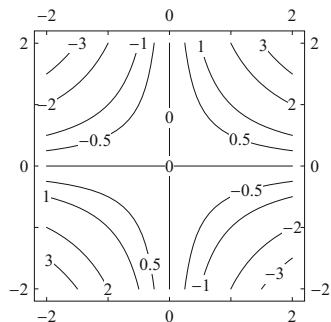
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

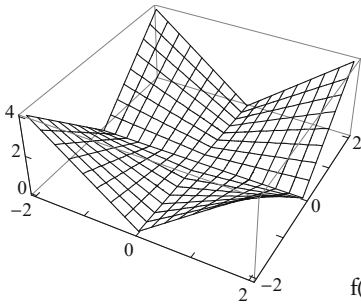


$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

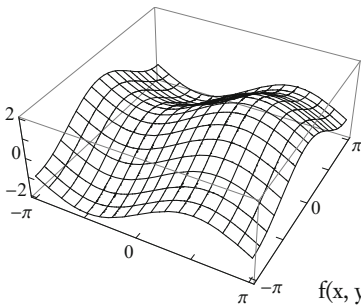
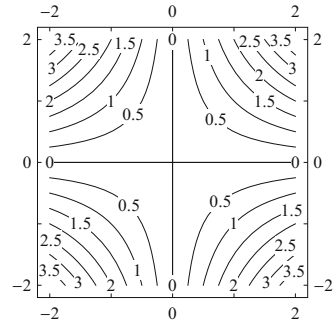


$$f(x, y) = x y$$

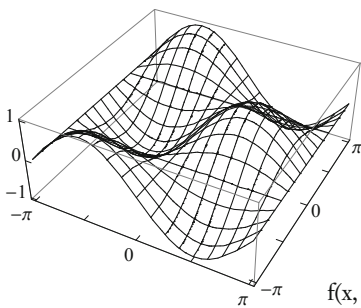
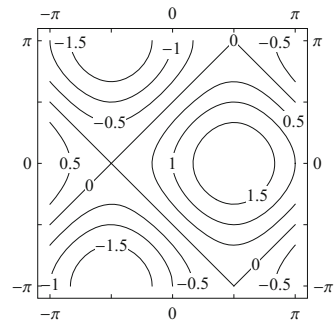




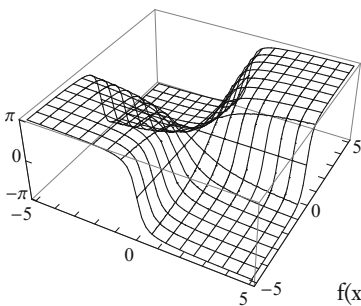
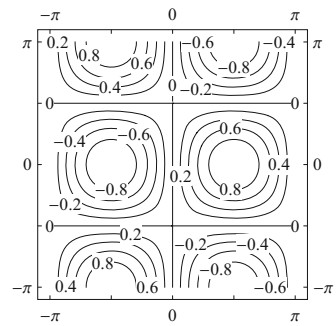
$$f(x, y) = |x| |y|$$



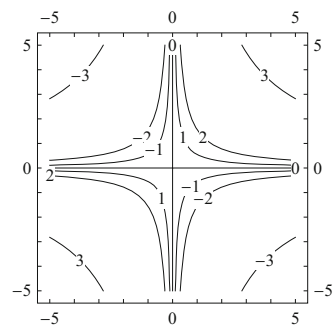
$$f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$$

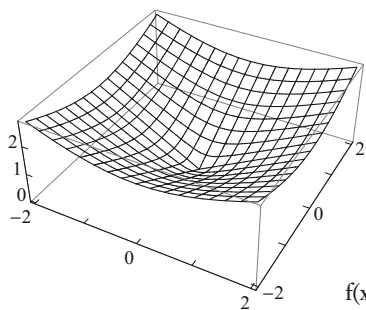


$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

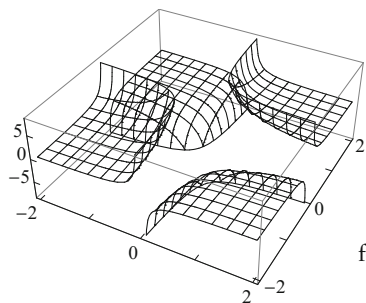
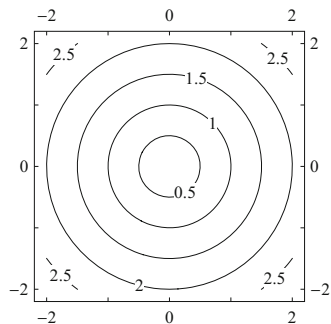


$$f(x, y) = \arctan(xy)$$

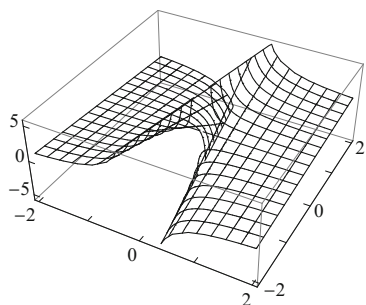
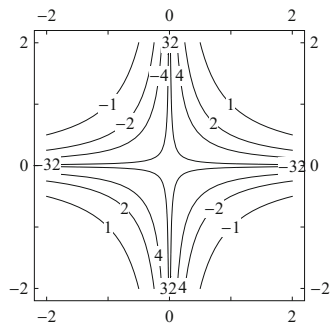




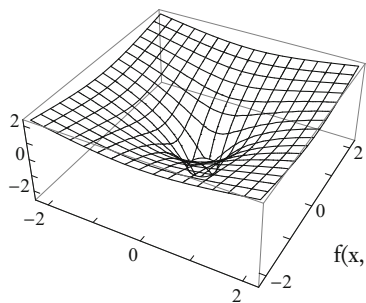
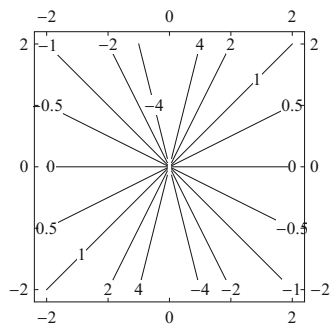
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



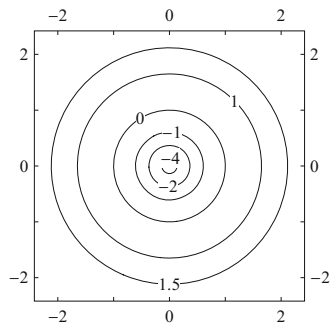
$$f(x, y) = (xy)^{-1} \\ xy \neq 0$$



$$f(x, y) = y/x \\ x \neq 0$$



$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \\ (x, y) \neq 0$$

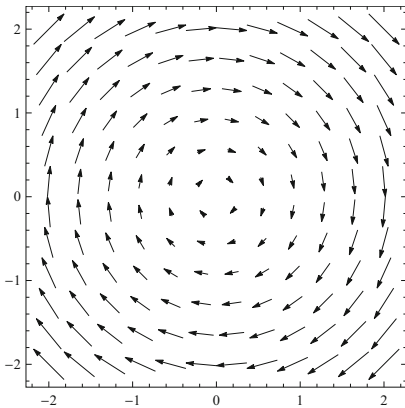


Vektorfelder in der Ebene und im Raum

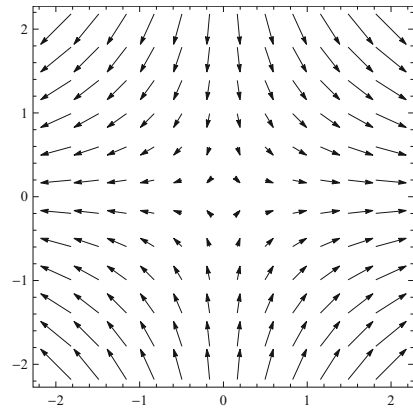
Besondere Bedeutung haben auch die Kombinationen

$n = m = 2$ bzw. $n = m = 3$.

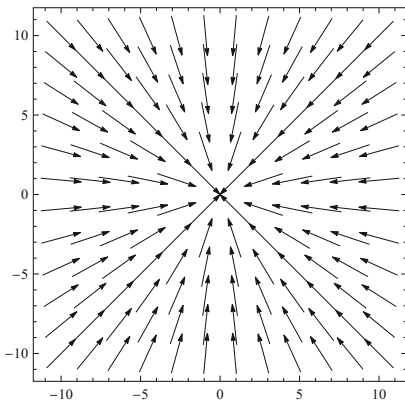
Funktionen mit diesen Dimensionen nennt man auch *zwei-* bzw. *dreidimensionale Vektorfelder*. Wir können sie veranschaulichen, indem wir an jedes $p \in P$ den Vektor $f(p)$ anheften. Für $n = m = 3$ kann zum Beispiel $f(p)$ eine am Punkt p wirkende Kraft sein (vgl. auch die Kurvenintegrale zweiter Art im letzten Kapitel).



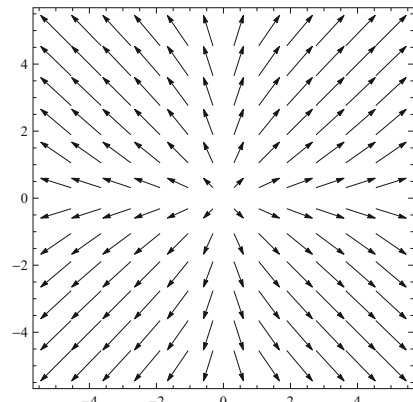
$$f(x, y) = (y, -x)$$



$$f(x, y) = (x, -y)$$



$$f(x, y) = - \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|}$$



$$f(x, y) = (\arctan(x), \arctan(y))$$

In den Visualisierungen von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind die Vektoren der Übersichtlichkeit halber skaliert. Zudem befindet sich die Mitte des Pfeils $f(x, y)$ am Punkt (x, y) , nicht der Anfang. Diagramme dreidimensionaler Vektorfelder finden sich in Kapitel 3.5.

Jacobi-Matrix und Differential

Bevor wir die mehrdimensionale Differenzierbarkeit definieren, treffen wir noch einige Vorbereitungen (auch zur Vermeidung späterer Irritationen).

Schreibweisen für Vektoren

Elemente des \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, schreiben wir in der Form $x = (x_1, \dots, x_d)$. Weiter verwenden wir auch die Formen (x, y) für $d = 2$ und (x, y, z) für $d = 3$.

Elemente des \mathbb{R}^3 können wir damit als (x_1, x_2, x_3) oder (x, y, z) angeben. Dass x für $d = 2, 3$ als Koordinate auftaucht, während allgemein $x \in \mathbb{R}^d$ einen d -dimensionalen Vektor $x = (x_1, \dots, x_d)$ bezeichnet (weder fettgedruckt noch mit einem Strich oder Pfeil dekoriert), ist in der Regel ungefährlich.

Die Dimensionen n, m und die Indizes j, i

Wir verwenden n für die Dimension des Definitionsbereichs und m für die Dimension des Wertebereichs unserer Funktionen, sowie $j = 1, \dots, n$ und $i = 1, \dots, m$ als zugehörige Koordinatenindizes. Durch diese Wahl erhalten wir $(m \times n)$ -Matrizen $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = (a_{ij})_{ij}$ mit m Zeilen und n Spalten, deren Einträge $A(i, j) = a_{ij}$ die übliche Form haben.

Vektoren als Spaltenvektoren (einspaltige Matrizen)

Für alle $d \geq 1$ identifizieren wir Vektoren des \mathbb{R}^d mit $(d \times 1)$ -Matrizen:

$(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ wird identifiziert mit $(x_j)_{1 \leq j \leq d} \in \mathbb{R}^{d \times 1}$.

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Matrix-Vektor-Produkt $Ax \in \mathbb{R}^m$ damit ein Produkt zweier Matrizen. Einspaltige Matrizen nennt man auch Spaltenvektoren. Im Umfeld von Matrizen sind Vektoren immer Spaltenvektoren.

Kommata und Strichpunkte in Matrizen

Die Matrix $A = (a_1, \dots, a_m)$ hat die Zeilen a_1, \dots, a_m , die Matrix $A = (b_1; \dots; b_n)$ hat dagegen die Spalten b_1, \dots, b_n . Ein Komma in einer Matrix deutet eine neue Zeile an, ein Strichpunkt eine neue Spalte. Einzeilige Matrizen (Zeilenvektoren) notieren wir ohne Kommata. Es gilt $(x_1 \dots x_n) = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, wobei allgemein $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ transponierte Matrix bezeichnet.

Offene Definitionsbereiche $P \subseteq \mathbb{R}^n$

Die Definitionsbereiche unserer Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ nehmen wir von nun an als offen und nichtleer an. Ist nichts gesagt, so ist $P \subseteq \mathbb{R}^n$.

Für jedes $p \in P$ und alle $w \in \mathbb{R}^n$ existiert dann ein $\varepsilon > 0$, sodass $p + \alpha w \in P$ für alle $\alpha \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ gilt. Wir können also p auf der Geraden $\{p + \alpha w \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ approximieren, ohne den Definitionsbereich von f zu verlassen. Für manche Begriffsbildungen würde es genügen, dass p ein Häufungspunkt von P ist oder dass es

stärker für jedes $p \in P$ linear unabhängige Vektoren v_1, \dots, v_n gibt, sodass p für alle j ein Häufungspunkt von $P \cap \{p + \alpha v_j \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ist. Letzteres ist zum Beispiel für abgeschlossene n -dimensionale Quader der Fall. Die vereinfachende Beschränkung auf offene Mengen ist aber kein großer Verlust.

Eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, können wir wieder schreiben als

$$f = (f_1, \dots, f_m) \text{ mit } f_i(x) = f(x)_i \text{ für alle } x \in P \text{ und alle } 1 \leq i \leq m.$$

Diese *Komponenten* oder *Projektionen* f_1, \dots, f_m der Funktion f sind Funktionen von P nach \mathbb{R} . Da eine Funktion aus ihren Komponenten besteht, spielt der Fall „ $n \geq 1$ und $m = 1$ “ eine Schlüsselrolle. Im Vergleich zu den Kurven sind hier die Dimensionen der Stellen und Funktionswerte vertauscht.

Die totale Differenzierbarkeit

Wir führen nun die Ableitung einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ in einem Punkt $p \in P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein. Dabei orientieren wir uns an der lokalen Approximation einer Funktion durch eine Gerade in der eindimensionalen Differentiation. Die Ableitung von f an der Stelle p wird im Fall der Existenz also als diejenige lineare Abbildung $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert, für die

$$f(p) + g(x - p) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

die bestmögliche Approximation an f an der Stelle p ist. Im eindimensionalen Fall konnten wir den linearen Anteil von f an der Stelle p durch eine reelle Zahl a kodieren, im mehrdimensionalen Fall verwenden wir Matrizen zur Kodierung der linearen Abbildung g .

Definition (*totale Differenzierbarkeit, Jacobi-Matrix, Differential*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$, und sei $p \in P$. Dann heißt f (*total*) *differenzierbar* in p , falls eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und eine Funktion $r: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ existieren, sodass

$$(a) \quad f(x) = f(p) + A(x - p) + r(x) \text{ für alle } x \in P,$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{\|r(x)\|}{\|x - p\|} = 0.$$

Wir setzen:

$$J_f(p) = f'(p) = A,$$

$$df(p) = \text{„die lineare Abbildung } g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mit } g(x) = Ax \text{ für alle } x\text{“}.$$

Die Matrix $J_f(p)$ heißt die *Jacobi-Matrix* oder die *Ableitung* von f und die lineare Abbildung $df(p)$ das *Differential* von f im Punkt p .

Die Funktion f heißt (*total*) *differenzierbar*, wenn f in allen $p \in P$ differenzierbar ist.

Eine Matrix A wie in der Definition ist eindeutig bestimmt, sodass die Definition „ $J_f(p) = A$ “ gerechtfertigt ist. Die Eindeutigkeit kann man direkt aus den Bedingungen (a) und (b) herleiten. (Sie gilt dagegen nicht, wenn wir anstelle von „ P offen“ lediglich voraussetzen, dass p ein Häufungspunkt von P ist.)

Nach Definition gilt

$$J_f(p) x = df(p)(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Auf der linken Seite steht ein Matrix-Vektor-Produkt, auf der rechten Seite eine Funktionsanwendung.

Der Leser beachte, dass in der Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\|r(x)\|}{\|x - p\|} = 0$$

im Zähler des Bruchs die euklidische Norm des \mathbb{R}^m , im Nenner dagegen die euklidische Norm des \mathbb{R}^n verwendet wird. Im Zähler können wir die Norm auch weglassen und mit dem Vektor $r(x) \in \mathbb{R}^m$ arbeiten, im Nenner ist sie für $n \geq 2$ notwendig, da dann eine Division durch $(x - p) \in \mathbb{R}^n$ nicht erklärt ist. Da alle Normen auf dem \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m äquivalent sind, können wir statt den euklidischen auch andere Normen im Zähler und Nenner verwenden, zum Beispiel die Maximumsnormen.

Beispiel 1: Lineare Abbildungen

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, und sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die f zugeordnete Matrix, d. h., es gilt $a_{ij} = f(e_j)_i$ für alle i, j , wobei e_1, \dots, e_n die kanonischen Einheitsvektoren des \mathbb{R}^n sind: „Die Spalten von A sind die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren“. Dann gilt für alle $p \in P$:

$$f(x) = Ax = Ap + A(x - p) + 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Also ist f differenzierbar und $J_f(p) = A$, $df(p) = f$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel 2: Eindimensionale Funktionen

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}$, im bisherigen eindimensionalen Sinne differenzierbar in $p \in P$, und sei $a \in \mathbb{R}$ die Ableitung von f im Punkt p . Dann gilt nach dem Approximationssatz

$$f(x) = f(p) + a(x - p) + r(x) \quad \text{für alle } x \in P,$$

mit einer Funktion $r: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{x - p} = 0 = \lim_{x \rightarrow p} \frac{|r(x)|}{|x - p|} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\|r(x)\|}{\|x - p\|}.$$

Also ist f total differenzierbar, und es gilt $J_f(p) = (a)$ für die (1×1) -Matrix (a) . Identifizieren wir die Matrix (a) mit der reellen Zahl a , so setzt der neue Differenzierbarkeitsbegriff also den alten fort.

Beispiel 3: Kurven

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $P \subseteq \mathbb{R}$, und sei $p \in P$. Hier hatten wir im Fall der Existenz schon die vektorwertige Ableitung

$$f'(p) = (f_1'(p), \dots, f_m'(p)) \in \mathbb{R}^m$$

betrachtet (dass P offen ist, ist unwesentlich: für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist die Einschränkung $f|_{[p-\varepsilon, p+\varepsilon]} \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Kurve). Lesen wir nun wie vereinbart $f'(p)$ als $(m \times 1)$ -Matrix, so zeigt der auf die Komponenten f_1, \dots, f_m von f angewendete Approximationssatz, dass

$$f(x) = (f_1(p) + f_1'(p)(x-p) + r_1(x), \dots, f_m(p) + f_m'(p)(x-p) + r_m(x)) = \\ f(p) + f'(p)(x-p) + r(x)$$

mit einer Funktion $r: P \rightarrow \mathbb{R}^m$, $r = (r_1, \dots, r_m)$ mit

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\|r(x)\|}{\|x-p\|} = 0.$$

Damit ist f total differenzierbar im Punkt p und

$$J_f(p) = (f_1'(p), \dots, f_m'(p)) = \begin{pmatrix} f_1'(p) \\ \dots \\ f_m'(p) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}.$$

Beispiel 4: Tangentialebenen

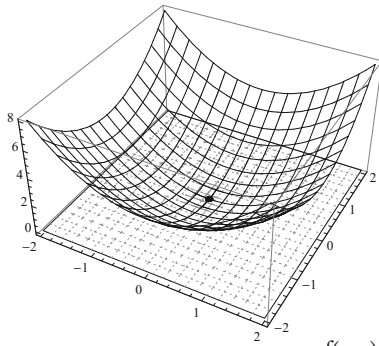
Für den Fall $n = 2$ und $m = 1$ lässt sich die Differenzierbarkeit anschaulich interpretieren: So, wie eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $p \in \mathbb{R}$ lokal wie eine Gerade aussieht, nämlich wie die dortige Tangente

$$f(p) + f'(p)(x-p), \quad x \in \mathbb{R},$$

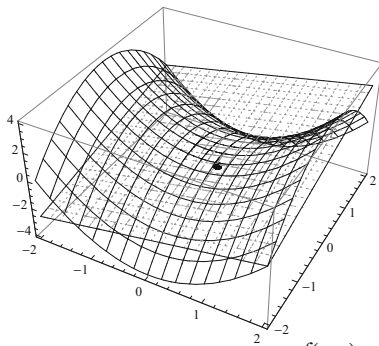
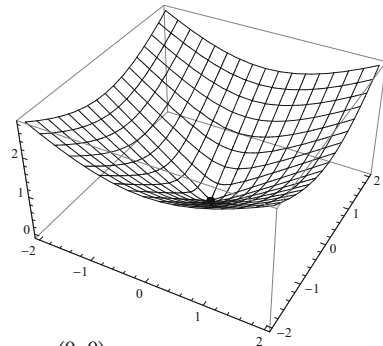
so sieht ein differenzierbares $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ lokal wie eine Ebene aus, nämlich wie ihre dortige (als Funktion dargestellte) *Tangentialebene*

$$f(p) + J_f(p)((x, y) - p) = f(p) + a(x - p_1) + b(y - p_2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

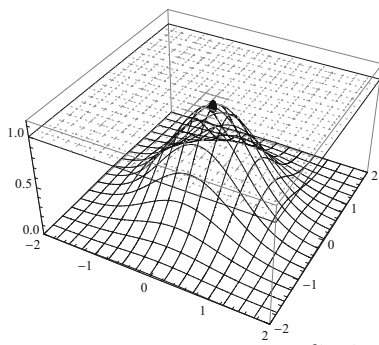
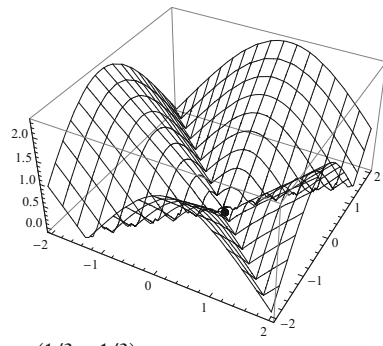
mit $J_f(p) = (a \ b)$. Stellen wir uns $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ als Höhenlandschaft vor, so sind Wanderungen auf dem Graphen von f in der Nähe des Punktes $(p, f(p))$ kaum von entsprechenden Wanderungen auf der Tangentialebene von f im Punkt $(p, f(p))$ zu unterscheiden. Und eine auf den Graphen aufgelegte Murmel beginnt auf dem Graphen so herabzurollen, wie sie auf der Tangentialebene herabrollt – wenn wir uns nicht gerade an einem Ort befinden, an dem die Tangentialebene parallel zur x - y -Ebene ist, was genau dann der Fall ist, wenn die Jacobi-Matrix die Nullmatrix ist.



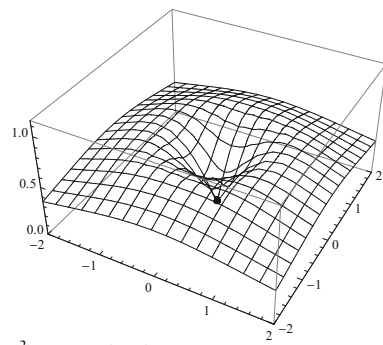
$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad p = (0, 0)$$



$$f(x, y) = x^2 - y^2, \quad p = (1/3, -1/3)$$



$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2), \quad p = (0, 0)$$



Die Diagramme links zeigen Funktionen und Tangentialebenen in einigen Punkten p . Rechts ist $\|r(x, y)\|/\|(x, y) - p\|$ gezeigt, wobei die Restfunktion $r(x, y)$ die Differenz von f und der betrachteten Tangentialebene ist. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, wie sich die die Tangentialebene kodierende Matrix $J_f(p)$ berechnen lässt. Wer es sofort wissen möchte, kann vorspringen.

Wie im Eindimensionalen sind verschiedene Umformulierungen der Definition nützlich:

Satz (*Varianten der Differenzierbarkeitsbedingung*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann sind für alle $p \in P$ äquivalent:

- (a) f ist differenzierbar in p .
- (b) Es gibt eine $(m \times n)$ -Matrix A mit

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\|f(x) - f(p) - A(x - p)\|}{\|x - p\|} = 0.$$

- (c) Es gibt eine $(m \times n)$ -Matrix A mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(p + h) - f(p) - Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

- (d) Es gibt eine $(m \times n)$ -Matrix A und eine Funktion $r: U_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq P$ und

$$f(p + h) = f(p) + Ah + r(h) \quad \text{für alle } h \in U_\varepsilon(0),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

- (e) Es gibt eine $(m \times n)$ -Matrix A und eine im Punkt 0 stetige Funktion $s: U_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq P$ und

$$f(p + h) = f(p) + Ah + \|h\| s(h) \quad \text{für alle } h \in U_\varepsilon(0),$$

$$s(0) = 0.$$

In diesem Fall gilt dann $A = J_f(p)$.

Wie früher impliziert die Differenzierbarkeit die Stetigkeit:

Satz (*Stetigkeit differenzierbarer Funktionen*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $p \in P$. Dann ist f stetig in p .

Beweis

Sind A und $r: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ wie in der Definition, so gilt $\lim_{x \rightarrow p} r(x) = 0$ und

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) - f(p) = \lim_{x \rightarrow p} A(x - p) + r(x) = 0 + 0 = 0.$$

— Also ist $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ und damit f stetig im Punkt p .

Die folgende Beobachtung, die sich ebenfalls direkt aus der Definition gewinnen lässt, unterstreicht, warum dem Fall $m = 1$ eine besondere Rolle zukommt:

Satz (*Differenzierbarkeit der Komponenten*)

Ein $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann in einem Punkt $p \in P$ differenzierbar, wenn alle Komponenten f_1, \dots, f_m von f in p differenzierbar sind. Die $(1 \times n)$ -Matrizen $J_{f_1}(p), \dots, J_{f_m}(p)$ sind dann die Zeilen der Matrix $J_f(p)$ und die Differentials $df_1(p), \dots, df_m(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Komponenten des Differentials $df(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Beherrschen wir also „ $n \geq 1$ und $m = 1$ “, so auch „ $n \geq 1$ und $m \geq 1$ “.

Das Differential als Funktion

Im Eindimensionalen hatten wir die punktweise gebildeten Ableitungen $f'(p)$ einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer Funktion $f': P \rightarrow \mathbb{R}$ zusammengefasst. Dies ist auch im Mehrdimensionalen möglich, und zwar auf prinzipiell verschiedene, wenn auch äquivalente Weisen. Bezeichnet $\mathbb{R}^{m \times n}$ den Vektorraum aller reellen $(m \times n)$ -Matrizen, so können wir J_f als Funktion der Form

$$J_f: P \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$$

auffassen. Jedem $p \in P$ wird die Matrix $J_f(p) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zugeordnet. Wir nennen die Funktion J_f die (*totale oder matrixwertige*) *Ableitung* von f und schreiben auch wieder die f' anstelle von J_f . Analog können wir df als eine Funktion der Form

$$df: P \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

auffassen, wobei $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ den Vektorraum aller linearen Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m bezeichnet. Jedem $p \in P$ wird die lineare Abbildung $df(p) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ zugeordnet. Wir nennen df das *Differential* von f . Es gilt wieder

$$J_f(p)x = df(p)(x) \quad \text{für alle } p \in P \text{ und } x \in \mathbb{R}^n,$$

weshalb oft J_f und df miteinander identifiziert werden. Sieht man $J_f(p)$ lediglich als Darstellung oder Kode der „absoluten“ linearen Abbildung $df(p)$ bzgl. einer bestimmten Basis an und interessiert man sich auch für andere Darstellungen, so dient die Unterscheidung zwischen J_f und df der Klarheit.

Die endlich-dimensionalen Vektorräume $\mathbb{R}^{m \times n}$ und $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ können zum Beispiel durch die Spektralnormen

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad \text{bzw.} \quad \|g\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|g(x)\|$$

metrisiert werden, sodass die Stetigkeit von

$$J_f: P \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{bzw.} \quad df: P \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

erklärt ist. J_f ist genau dann stetig, wenn für alle gegen p konvergenten Folgen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P die Matrizen $J_f(p_n)$ komponentenweise gegen $J_f(p)$ konvergieren. Für alle p ist die Stetigkeit von J_f in p äquivalent zur Stetigkeit von df in p .

Definition (*stetige Differenzierbarkeit*)

Ein differenzierbares $f : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *stetig (total) differenzierbar* in $p \in P$, wenn $J_f : P \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ stetig in p ist. Ist f stetig differenzierbar an allen Stellen $p \in P$, so heißt f *stetig (total) differenzierbar*.

Im nächsten Kapitel werden wir ein handliches Kriterium für die stetige Differenzierbarkeit kennenlernen.

Das Differential df können wir schließlich auch etwas anders lesen. Wir definieren $Df : P \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$Df(p, x) = df(p)(x) \quad \text{für alle } p \in P \text{ und } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Stetigkeit von Df ist durch die euklidischen Normen auf $P \times \mathbb{R}^m$ und \mathbb{R}^n erklärt. Die Funktion Df ist genau dann stetig, wenn df stetig ist.

Mehrdimensionale Ableitungsregeln

Im Eindimensionalen hatten wir die Sicht

$$„f(x) = f(p) + \text{linearer Anteil} + \text{kleiner Rest}“$$

bereits konsequent zur Gewinnung des Kalküls für die Differentiation eingesetzt. Nun diene sie uns sogar zur Definition der mehrdimensionalen Ableitung, und wie früher liefert sie Ableitungsregeln. Zunächst gilt:

Satz (*Linearität der Ableitung*)

Seien $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $p \in P$, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $h = \alpha f + \beta g$ differenzierbar in p , und es gilt

$$J_h(p) = \alpha J_f(p) + \beta J_g(p). \quad (\text{Linearität})$$

Damit ist $V = \{ f : P \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist differenzierbar} \}$ für alle $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $m \geq 1$ ein \mathbb{R} -Vektorraum. Für alle $p \in P$ ist $L : V \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $L(f) = J_f(p)$ linear.

Eine allgemeine Produkt- und Quotientenregel kann nicht formuliert werden, da das Produkt und der Quotient zweier Elemente des \mathbb{R}^m im Allgemeinen nicht definiert sind. Für reellwertige Funktionen erhalten wir aber:

Satz (*Produkt- und Quotientenregel*)

(a) Sind $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p , so auch fg , und es gilt

$$J_{fg}(p) = g(p) J_f(p) + f(p) J_g(p). \quad (\text{Produktregel})$$

(b) Ist $f : P \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ differenzierbar in p , so auch $1/f$, und es gilt

$$J_{1/f}(p) = - \frac{1}{f^2(p)} J_f(p). \quad (\text{Quotientenregel})$$

Die Beweise können anhand der Argumentation im Eindimensionalen geführt werden. Die Regeln lassen sich unter der etwas stärkeren Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit auch auf die eindimensionalen Regeln zurückführen. Dies werden wir im nächsten Kapitel sehen.

Die Kettenregel verdient wieder eine besondere Beachtung:

Satz (*mehrdimensionale Kettenregel*)

Seien $f: P \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $g: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f[P] \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}^d$.

Weiter sei f differenzierbar in einem $p \in P$ und g differenzierbar in $f(p)$.

Dann ist $g \circ f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in p und

$$J_{g \circ f}(p) = J_g(f(p)) \cdot J_f(p). \quad (\text{Kettenregel})$$

Speziell gilt

$$J_{g \circ f}(p) = g'(f(p)) J_f(p) \quad \text{für } d = m = 1, n \geq 1.$$

Beweis (*Skizze*)

Sei $q = f(p)$. Wir schreiben wie in (e) der Varianten der Differenzierbarkeit:

$$f(p+h) = f(p) + Ah + \|h\| s(h), \quad A = J_f(p),$$

$$g(q+w) = g(q) + Bw + \|w\| t(w), \quad B = J_g(q).$$

Dann gilt

$$g \circ f(p+h) = g(f(p+h)) = g(q + Ah + \|h\| s(h)) =$$

$$g \circ f(p) + BAh + \|h\| B s(h) + \|Ah + \|h\| s(h)\| t(Ah + \|h\| s(h)),$$

— und diese Darstellung ist wieder von der Form (e).

Die Jacobi-Matrix von $g \circ f$ in p ist also das Produkt der Jacobi-Matrizen von g in $f(p)$ und f in p . Es gilt also weiterhin die Regel

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p),$$

wenn wir die Ableitungsstriche als Jacobi-Matrizen lesen.

Beispiel

Seien $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = x + 2y, \quad g(x) = (x, 2x).$$

Sei $h = g \circ f$. Dann gilt $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und

$$h(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Man kann $J_h(p)$ direkt ablesen oder nach der Kettenregel berechnen:

$$J_g(f(p)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad J_f(p) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_h(p) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ein mehrdimensionales Analogon der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion werden wir bei der Diskussion impliziter Funktionen kennenlernen.

Der Mittelwertsatz

Die Kettenregel erlaubt uns, den eindimensionalen Mittelwertsatz auf reellwertige mehrdimensionale Funktionen zu übertragen. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Strecke* von a nach b durch

$$\overline{ab} = \{ a + t(b - a) \mid t \in [0, 1] \},$$

und wir sagen, dass ein p *zwischen* a und b liegt, wenn $p \in \overline{ab}$, $p \neq a, b$.

Satz (*Mittelwertsatz für reellwertige mehrdimensionale Funktionen*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Seien $a \neq b$ in P derart, dass $\overline{ab} \subseteq P$.

Dann gibt es ein p zwischen a und b mit

$$f(b) - f(a) = J_f(p)(b - a).$$

Beweis

Sei $h: [0, 1] \rightarrow P$ definiert durch

$$h(t) = a + t(b - a) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Dann ist $g = f \circ h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz gibt es also ein $t \in]0, 1[$ mit

$$f(b) - f(a) = g(1) - g(0) = g'(t) \cdot (1 - 0) = g'(t).$$

Nach der Kettenregel gilt für alle $t \in]0, 1[$:

$$g'(t) = J_g(t) = J_{f \circ h}(t) = J_f(h(t)) \cdot J_h(t) = J_f(h(t))(b - a),$$

wobei wir (1×1) -Matrizen mit reellen Zahlen identifizieren. Damit ist

– $p = h(t)$ wie gewünscht.

Der Satz liefert für eine differenzierbare Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $a, b \in P$ mit $\overline{ab} \subseteq P$ Stellen $p_1, \dots, p_m \in P$ mit

$$f(b) - f(a) = (J_{f_1}(p_1)(b - a), \dots, J_{f_m}(p_m)(b - a)).$$

Im Allgemeinen gibt es aber kein $p \in P$ mit $f(b) - f(a) = J_f(p)(b - a)$, man betrachte etwa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = e^{it}$ und $a = 0$, $b = 2\pi$.

In Analogie zum Eindimensionalen erhalten wir aus dem Mittelwertsatz:

Korollar (*Charakterisierung der konstanten Funktionen*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konstant, wenn $J_f = 0$.

Beweis

Ist f konstant, so ist offenbar $J_f = 0$. Für die andere Implikation sei ohne Einschränkung $m = 1$. Da P wegzusammenhängend und offen ist, gibt es für alle $a, b \in P$ Punkte $a_0 = a, a_1, \dots, a_r = b$ in P mit $\overline{a_k a_{k+1}} \subseteq P$ für alle k .

- Wegen $J_f = 0$ ist dann aber $f(a_k) = f(a_{k+1})$ für alle k nach dem Mittelwertsatz.

Ebenfalls wie im Eindimensionalen gilt, dass die Beschränktheit der Ableitung die Lipschitz-Stetigkeit der Funktion impliziert. Dabei verwenden wir wieder die Spektralnorm für die Jacobi-Matrizen.

Satz (*Schrankensatz, Lipschitz-Stetigkeit bei beschränkter Ableitung*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit P konvex, d. h., es gelte $\overline{ab} \subseteq P$ für alle $a, b \in P$. Weiter sei $L \in \mathbb{R}$ mit

$$\|J_f(p)\| \leq L \quad \text{für alle } p \in P.$$

Dann ist f Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten L , d. h.,

$$\|f(a) - f(b)\| \leq L \|a - b\| \quad \text{für alle } a, b \in P.$$

Beweis

Seien $a \neq b$ in P , $h: [0, 1] \rightarrow P \subseteq \mathbb{R}^n$, $h(t) = a + t(b - a)$ für alle t , und $g = f \circ h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann gilt nach der Kettenregel für alle $t \in [0, 1]$:

$$J_g(t) = J_f(h(t)) J_h(t) = J_f(h(t)) (b - a), \quad \text{also}$$

$$\|g'(t)\| = \|J_f(h(t)) (b - a)\| \leq \|J_f(h(t))\| \|b - a\| \leq L \|b - a\|.$$

(Wir können den Definitionsbereich $[0, 1]$ von h zu $]-\varepsilon, 1 + \varepsilon[$ vergrößern, sodass wir die Kettenregel auch auf $t = 0, 1$ anwenden können.) Nach Voraussetzung ist g eine stetig differenzierbare Kurve, sodass

$$\|f(b) - f(a)\| = \|g(1) - g(0)\| \leq L(g) = \int_0^1 \|g'(t)\| dt \leq L \|b - a\|.$$

Statt der Überführung in eine Kurve können wir auch den Mittelwertsatz anwenden. Er liefert für alle $1 \leq i \leq m$ ein $p_i \in P$ mit

$$|(f(b) - f(a))_i| = |(J_f(p_i)(b - a))_i| \leq \|J_f(p_i)\| \|b - a\| \leq L \|b - a\|,$$

sodass $\|f(b) - f(a)\| \leq \sqrt{m} L \|b - a\|$. Dies zeigt die Lipschitz-Stetigkeit mit einer etwas größeren Konstanten.

Implizite Funktionen

Ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad x, y \in \mathbb{R}^m,$$

hat bei vorgegebenem y genau dann eine eindeutige Lösung x , wenn A invertierbar ist. Sie ist durch $x = A^{-1}y$ definiert. Allgemeiner können wir das System

$$Ax + By = 0, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad B \in \mathbb{R}^{m \times d}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^d$$

betrachten. Das erste Gleichungssystem „ $Ax = y$ “ entspricht dann dem Spezialfall $d = m$ und $B = -E$ für die Einheitsmatrix $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Bei vorgegebenem y hat das allgemeine System genau dann eine eindeutige Lösung x , wenn A invertierbar ist, und diese Lösung ist gegeben durch

$$x = -A^{-1}By.$$

Definieren wir also $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$g(y) = -A^{-1}By \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^d,$$

so ist die Lösungsfunktion g eine lineare Abbildung mit

$$Ag(y) + By = 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^d.$$

Wir sagen auch, dass g durch „ $Ax + By = 0$ “ *implizit definiert* wird.

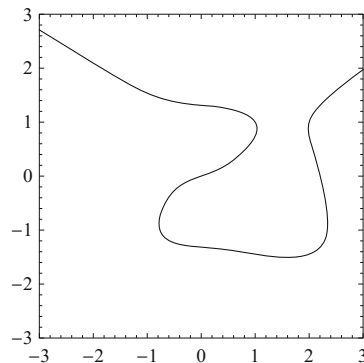
Wir betrachten nun noch allgemeinere Gleichungssysteme der Form

$$f(x, y) = 0$$

mit einer Funktion $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ziel ist wieder, das System nach $x \in \mathbb{R}^m$ aufzulösen, sodass wir eine Lösungsfunktion g in der Variablen $y \in \mathbb{R}^d$ erhalten. Natürlich können wir die Rollen von x und y vertauschen, aber Lösungsfunktionen in y entsprechen der obigen Betrachtung von linearen Systemen und weiter dem Problem, die Umkehrfunktion einer Funktion „ $y = f(x)$ “ zu bestimmen. Ein Beispiel mit $m = d = 1$ ist

$$y^5 - x^4 + 2x^3 - 3y + x = 0.$$

Offenbar ist $(a, b) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung. Andere Lösungen zeigt das Diagramm rechts. Wir erkennen, dass wir die Lösungen als Funktion g in y darstellen können, wenn wir uns auf eine hinreichend kleine Umgebung der speziellen Lösung (a, b) beschränken. Die Lösungsfunktion



g können wir nicht mehr durch einen einfachen Term in der Form „ $x = g(y)$ “ definieren, aber sie existiert dennoch und ist zudem für die gewählte Umgebung eindeutig bestimmt. Die Existenz- und Eindeutigkeit lokaler Lösungsfunktionen ist gerade das Thema der folgenden Untersuchungen.

Um den allgemeinen Fall an den linearen Fall zu knüpfen, nehmen wir an, dass f stetig differenzierbar ist, sodass wir die Funktion f in jedem Punkt durch ihre Linearisierung ersetzen können. Die Jacobi-Matrix von f im Punkt p hat die Form

$$J_f(p) = (A \mid B) \in \mathbb{R}^{m \times (m+d)}, \text{ mit}$$

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times d},$$

$$a_{ij} = J_f(p)_{ij} \text{ für } 1 \leq i, j \leq m, \quad b_{ij} = J_f(p)_{i, j+m} \text{ für } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d.$$

Anschaulich erhalten wir die Matrizen A und B , wenn wir die Matrix $J_f(p)$ nach der m -ten Spalte durchschneiden. Wir nennen A auch den *quadratischen Teil* von $J_f(p)$. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ gilt dann

$$J_f(p)(x, y) = (A \mid B)(x, y) = Ax + By \in \mathbb{R}^m.$$

Wir betrachten nun eine Nullstelle $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ von f (also eine spezielle Lösung) und die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

in der Nähe von (a, b) . Ersetzen wir f durch ihre Linearisierung

$$f(a, b) + J_f(a, b)(x - a, y - b) = J_f(a, b)(x - a, y - b), \quad x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^d$$

im Punkt (a, b) , so wird „ $f(x, y) = 0$ “ zum linearen Gleichungssystem

$$A(x - a) + B(y - b) = 0, \text{ wobei } J_f(a, b) = (A, B).$$

Dieses Gleichungssystem ist im Fall der Invertierbarkeit der $(m \times m)$ -Matrix A eindeutig nach x auflösbar mit

$$x = a - A^{-1}B(y - b).$$

Da f durch seine Linearisierung bis auf einen Fehler erster Ordnung dargestellt wird, darf man vermuten, dass im Fall der Invertierbarkeit von A auch „ $f(x, y) = 0$ “ in einer Umgebung von (a, b) eindeutig nach x auflösbar ist, d. h., zu gegebenem y nahe bei b existiert ein eindeutig bestimmtes $x = g(y)$ nahe bei a , sodass

$$f(g(y), y) = 0.$$

Der folgende Satz besagt, dass diese Vermutung korrekt ist und dass die durch „ $f(x, y) = 0$ “ implizit definierte lokale Lösungsfunktion g stetig differenzierbar ist und im Punkt b die nach unseren Überlegungen zu erwartende Linearisierung besitzt, nämlich

$$g(b) + J_g(b)(y - b) = a - A^{-1}B(y - b).$$

Satz (*Hauptsatz über implizite Funktionen*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$, $P \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, und sei $(a, b) \in P$ mit $f(a, b) = 0$. Weiter sei

$$J_f(a, b) = (A \mid B) \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times d},$$

und A sei invertierbar. Dann existieren eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^m$ von a , eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^d$ von b mit $U \times V \subseteq P$ und ein stetig differenzierbares $g: V \rightarrow U$ mit

$$(a) \quad g(y) = \text{„das eindeutige } x \in U \text{ mit } f(x, y) = 0\text{“} \quad \text{für alle } y \in V,$$

$$(b) \quad J_g(y) = -A_y^{-1}B_y, \quad \text{wobei } J_f(g(y), y) = (A_y \mid B_y).$$

Der Leser findet im folgenden Ausblick einen vollständigen Beweis dieses fundamentalen Ergebnisses.

Wir wollen uns die Aussage des Satzes noch einmal verdeutlichen. Unter den Voraussetzungen an f gilt, dass das durch $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ gelöste Gleichungssystem

$$f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_d) = 0$$

$$f_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_d) = 0$$

...

$$f_m(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_d) = 0$$

in einer Umgebung V von b nach x_1, \dots, x_m aufgelöst werden kann: Für alle Vorgaben $y = (y_1, \dots, y_d) \in V$ gibt es eine Lösung $x = (x_1, \dots, x_m)$ des Systems, und in einer Umgebung U von a sind diese Lösungen zudem eindeutig bestimmt.

Eine Paradeanwendung des Hauptsatzes ist:

Korollar (*Ableitung der Umkehrfunktion*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, stetig differenzierbar, und sei $p \in P$ derart, dass $J_f(p)^{-1}$ existiert. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq P$ von p mit:

$$(a) \quad f: U \rightarrow f[U] \text{ ist bijektiv und } f[U] \text{ ist offen,}$$

$$(b) \quad g = f^{-1}: f[U] \rightarrow U \text{ ist stetig differenzierbar,}$$

$$(c) \quad J_g(f(x)) = J_f(x)^{-1} \quad \text{für alle } x \in U.$$

Beweis

Sei $f^*: P \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f^*(x, y) = f(x) - y \quad \text{für alle } (x, y) \in P \times \mathbb{R}^n.$$

Für $(a, b) = (p, f(p))$ gilt $f^*(a, b) = 0$. Der Hauptsatz (mit $m = d = n$) liefert also ein stetig differenzierbares $g: V \rightarrow U$ mit offenen Umgebungen $U \subseteq P$ von p und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von $f(p)$ derart, dass

$g(y)$ = „das eindeutige $x \in U$ mit $f(x) = y$ “,

$$J_g(f(x)) = -J_f(x)^{-1}(-E) = J_f(x)^{-1} \text{ für alle } x \in U.$$

Also ist g die Umkehrfunktion von f auf U und f injektiv auf U . Wir können zudem $U = g[V]$ annehmen (durch evtl. Verkleinerung von U),

- da $g[V] = f^{-1}[V]$ aufgrund der Stetigkeit von f offen ist.

Die Formel für die Jacobi-Matrix der Umkehrfunktion kann man wie im Eindimensionalen auch aus der Kettenregel gewinnen, wenn man weiß, dass g differenzierbar ist. Denn mit der Einheitsmatrix $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$E = J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x),$$

sodass die Matrix $J_g(f(p))$ invers zu $J_f(p)$ ist.

Wie oben können wir das Ergebnis so lesen: Unter den Voraussetzungen des Satzes ist das Gleichungssystem

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1$$

...

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n,$$

das durch $(p, f(p)) \in P \times \mathbb{R}^n$ gelöst wird, in einer Umgebung von $y = f(p)$ nach den Variablen x_1, \dots, x_n auflösbar und in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x = p$ sind die Lösungen eindeutig.

Aus dem topologischen Anteil des Korollars erhalten wir ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis:

Korollar (*Offenheitssatz*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, und $J_f(p)^{-1}$ existiere für alle $p \in P$.

Dann ist $f[U]$ offen für alle offenen $U \subseteq P$.

Beweis

Sei $U \subseteq P$ offen. Dann gibt es für jedes $x \in U$ eine Bijektion

$$f_x: U_x \rightarrow f[U_x]$$

mit einer offenen Umgebung $U_x \subseteq U$ von x und einer offenen Menge $f[U_x]$. Dann ist aber $f[U]$ offen, denn

$$f[U] = \bigcup_{x \in U} f[U_x].$$

Die Stetigkeit einer Funktion ist durch offene Urbilder offener Mengen charakterisiert. Ist f stetig differenzierbar und sind alle Ableitungen invertierbar, so bleibt die Eigenschaft „offen“ auch für Bilder erhalten.

Ausblick: Beweis des Hauptsatzes über implizite Funktionen

Wir beweisen die Existenz von g mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Den Fixpunktsatz wenden wir dabei nicht nur auf eine Kontraktion an, sondern auf eine Schar von Kontraktionen $h_y : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y \in V$. Die gesuchte Funktion g wird aus den Fixpunkten der h_y gebildet. Die Abschätzung des Abstands zwischen Punkt und Fixpunkt verwenden wir zum Beweis der Lipschitz-Stetigkeit von g , aus der sich die Differenzierbarkeit und die Formel (b) relativ leicht ergibt.

Beweis des Satzes

Wir zeigen zunächst die Existenz einer Funktion g wie in (a). Hierzu definieren wir $h : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$h(x, y) = x - A^{-1}f(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in P.$$

Nach der Kettenregel gilt für alle $(x, y) \in P$

$$J_h(x, y) = (E \mid 0) - A^{-1}J_f(x, y) = (E - A^{-1}A_{x,y} \mid -A^{-1}B_{x,y}),$$

$$J_h(a, b) = (0 \mid -A^{-1}B).$$

Mit f ist auch h stetig differenzierbar, und folglich gibt es $U = U_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V = U_\delta(b) \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\text{cl}(U \times V) \subseteq P$ und

$$\|E - A^{-1}A_{x,y}\| \leq 1/2 \quad \text{für alle } (x, y) \in U \times V.$$

Ist also $y \in V$ und $h_y : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch $h_y(x) = h(x, y)$, so gilt

$$\|J_{h_y}(x)\| = \|E - A^{-1}A_{x,y}\| \leq 1/2 \quad \text{für alle } x \in U.$$

Nach dem Schrankensatz gilt also

$$\|h_y(x_1) - h_y(x_2)\| \leq 1/2 \|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in U.$$

Durch Verkleinerung von δ können wir wegen $h(a, b) = a - 0 = a$ und der Stetigkeit von h annehmen, dass für alle $y \in V$ gilt

$$\|h_y(a) - a\| = \|h(a, y) - a\| < \varepsilon/2 = (1 - 1/2)\varepsilon.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz für offene Kugeln und die Kontraktionen $h_y : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y \in V$, existiert also für jedes $y \in V$ ein eindeutiges $g(y) \in U$ mit $h_y(g(y)) = g(y)$. Für die so definierte Funktion $g : V \rightarrow U$ gilt

$$g(y) = \text{„das eindeutige } x \in U \text{ mit } h(x, y) = x\text{“} =$$

$$\text{„das eindeutige } x \in U \text{ mit } A^{-1}f(x, y) = 0\text{“} =$$

$$\text{„das eindeutige } x \in U \text{ mit } f(x, y) = 0\text{“} \quad \text{für alle } y \in V.$$

(+) $g : V \rightarrow U$ ist Lipschitz-stetig.

Beweis von (+)

h ist Lipschitz-stetig auf $\text{cl}(U \times V)$ und damit auf $U \times V$ mit einer Lipschitz-Konstanten L . Für alle $y_0, y \in V$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\|h_y(g(y_0)) - g(y_0)\| &= \|h(g(y_0), y) - h(g(y_0), y_0)\| \leq \\ L \| (g(y_0), y) - (g(y_0), y_0) \| &= L \|y - y_0\|.\end{aligned}$$

Mit der Abschätzung „s/(1 - 1/2)“ des Banachschen Fixpunktsatzes für die Funktion h_y mit der Kontraktionskonstanten $1/2$ folgt

$$\|g(y_0) - g(y)\| \leq \frac{\|h_y(g(y_0)) - g(y_0)\|}{1 - 1/2} \leq 2L \|y - y_0\|,$$

denn die linke Seite ist der Abstand von $g(y_0)$ zum Fixpunkt $g(y)$ von h_y .

(++) $g : V \rightarrow U$ ist differenzierbar in b mit $J_g(b) = -A^{-1}B$.

Beweis von (++)

In einer Umgebung von (a, b) gilt

$$f(x, y) = f(a, b) + (A \mid B)(x - a, y - b) + r(x, y), \quad \text{mit}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\|r(x, y)\|}{\|(x - a, y - b)\|} = 0.$$

Wegen $f(a, b) = 0$ und $f(g(y), y) = 0$ für alle $y \in V$ gilt also in einer Umgebung von b

$$0 = (A \mid B)(g(y) - a, y - b) + r(g(y), y),$$

sodass dort (mit $a = g(b)$)

$$g(y) = g(b) - A^{-1}B(y - b) - A^{-1}r(g(y), y).$$

Mit einer Lipschitz-Konstanten L für g gemäß (+) gilt dann aber

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{\|A^{-1}r(g(y), y)\|}{\|y - b\|} \leq L \|A^{-1}\| \lim_{y \rightarrow b} \frac{\|r(g(y), y)\|}{\|(g(y) - a, 0)\|} = 0,$$

wobei wir „ $(g(y), y) \rightarrow (a, b)$ “ für „ $y \rightarrow b$ “ verwenden.

Ist nun $y \in V$ beliebig, so folgt (b) aus der Eindeutigkeit von g durch Anwendung des bereits Bewiesenen auf den Ausgangspunkt $(a^*, b^*) = (g(y), y)$.

— Da f stetig differenzierbar ist, zeigt (b) zudem, dass dies auch für g gilt.

4. Partielle Ableitungen

Wir gehen nun der Frage nach, wie wir im Fall der Differenzierbarkeit die Einträge einer Jacobi-Matrix

$$J_f(p) = (a_{ij})_{ij} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

bestimmen können. Betrachten wir den Fall $n = 2$, $m = 1$ und eine Tangentialebene, so sehen wir, dass wir die Frage mit Hilfe der lokalen Steigungen von f im Punkt p in Richtung der Koordinatenachsen beantworten können. Denn die Tangentialebene – und damit die Jacobi-Matrix – ist durch diese Steigungen eindeutig bestimmt. Allgemeiner genügt es, die lokalen Steigungen in zwei linear unabhängigen Richtungen zu kennen. Wir konzentrieren uns aber zunächst auf die Achsen.

Definition (*partielle Differenzierbarkeit einer reellwertigen Funktion*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, und seien $p \in P$ und $1 \leq j \leq n$. Dann heißt f im Punkt p in der j -ten Koordinate *partiell differenzierbar*, falls

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h e_j) - f(p)}{h}$$

existiert, wobei e_j der j -te kanonische Einheitsvektor im \mathbb{R}^n ist. Die reelle Zahl a heißt die j -te *partielle Ableitung* von f im Punkt p , und wir schreiben

$$\partial_j f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(p) = a.$$

Existiert die partielle Ableitung von f in p für alle Koordinaten j , so heißt f *partiell differenzierbar in* p . Ist f partiell differenzierbar in allen $p \in P$, so heißt f *partiell differenzierbar*. Für $1 \leq j \leq n$ heißt dann

$$\partial_j f : P \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f : P \rightarrow \mathbb{R}$$

die j -te *partielle Ableitung* von f oder die *Ableitung* von f in der Koordinate j .

Sind alle $\partial_j f$ stetig in $p \in P$, so heißt f *stetig partiell differenzierbar* in p . Gilt dies für alle $p \in P$, so heißt f *stetig partiell differenzierbar*.

Die reelle Zahl $\partial_j f(p)$ gibt also die Steigung der reellwertigen Funktion f im Punkt p in Richtung der j -ten Koordinatenachse an. Eine partielle Ableitung ist

eine gewöhnliche eindimensionale Ableitung, wobei wir alle bis auf eine Koordinate festhalten. Wir zeichnen ein x_j als Variable aus und betrachten alle anderen Variablen der Funktion f zwischenzeitlich als Parameter. Gegeben $p = (p_1, \dots, p_n)$ und eine Koordinate j , bilden wir nun den Limes der Differenzenquotienten

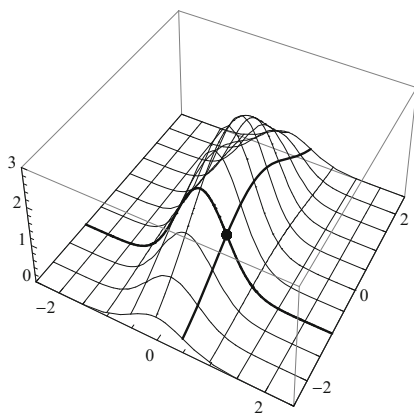
$$\frac{f(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j + h, p_{j+1}, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{h}, \quad h \text{ gegen } 0.$$

Definieren wir also $g:]p_j - \varepsilon, p_j + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ durch

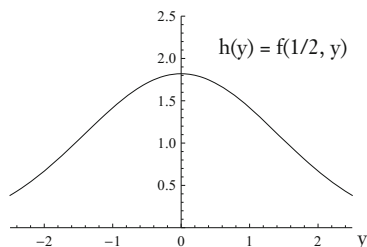
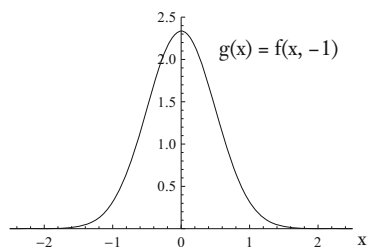
$$g(x) = f(p_1, \dots, p_{j-1}, x, p_{j+1}, \dots, p_n) \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x - p_j| < \varepsilon,$$

so gilt $\partial_j f(p) = g'(p_j)$.

Für $m = 2$ verwenden wir oft wieder x, y statt x_1, x_2 sowie $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ statt $\partial_1 f$, $\partial_2 f$. Analoges gilt für $m = 3$ und andere Variablennamen.



$$f(x, y) = 3 \exp(-2x^2 - y^2/4), \quad p = (1/2, -1)$$



$\partial_1 f(p)$ ist die Ableitung von g im Punkt $1/2$, $\partial_2 f(p)$ die von h im Punkt -1 .

Beispiel

Sei $P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0 \}$. Wir definieren $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y, z) = x + yz^2 + \frac{x}{y} \quad \text{für alle } (x, y, z) \in P.$$

Dann gilt für alle $p = (x, y, z) \in P$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 1 + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = z^2 - \frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(p) = 2yz.$$

Die Funktion f ist also stetig partiell differenzierbar.

Die Begriffsbildung können wir sehr einfach auf mehrdimensionale Wertebereiche erweitern:

Definition (*partielle Differenzierbarkeit einer mehrdimensionalen Funktion*)

Ein $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *partiell differenzierbar*, wenn alle Komponenten f_1, \dots, f_m von f partiell differenzierbar sind. Sind alle Komponenten stetig partiell differenzierbar (in p), so heißt f *stetig partiell differenzierbar* (in p).

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die Einträge der Jacobi-Matrix bestimmen.

Satz (*Identifikation der Jacobi-Matrix*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $p \in P$ differenzierbar, und sei

$$J_f(p) = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

die Jacobi-Matrix von f im Punkt p . Dann ist f partiell differenzierbar in p , und es gilt

$$a_{ij} = \partial_j f_i(p) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n.$$

Ist f reellwertig, so gilt für die $(1 \times n)$ -Matrix $J_f(p)$:

$$J_f(p) = \left(\partial_1 f(p) \quad \dots \quad \partial_n f(p) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

Beweis

Da die Jacobi-Matrix von f im Punkt p zeilenweise aus den Jacobi-Matrizen der Komponenten f_1, \dots, f_m von f im Punkt p aufgebaut ist, genügt es, die Aussage für den Fall $m = 1$ zu beweisen. Sei also $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$A = J_f(p) = \left(a_{11} \quad \dots \quad a_{1n} \right).$$

Weiter sei $r: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(p) + A(x - p) + r(x) \quad \text{für alle } x \in P, \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{\|x - p\|} = 0.$$

Damit gilt für jedes $1 \leq j \leq n$:

$$\partial_j f(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h e_j) - f(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h e_j) + r(p + h e_j)}{h} =$$

$$A e_j + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(p + h e_j)}{h} = a_{1j} + 0 = a_{1j}.$$

—

Für Höhenlandschaften ($n = 2$ und $m = 1$) ist das Ergebnis sehr anschaulich: Ist $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Ebene mit $g(x, y) = c + (a \ b)(x, y) = c + ax + by$, so sind a und b die Steigungen der Ebene in x - bzw. y -Richtung. Ist die Ebene tangential zu f im Punkt p , so gilt $a = \partial_1 f(p)$, $b = \partial_2 f(p)$, sodass $J_f(p) = (\partial_1 f(p) \ \partial_2 f(p))$.

In voller Schönheit lautet die Jacobi-Matrix:

$$J_f(p) = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = (a_{ij})_{i,j} = (\partial_j f_i(p))_{i,j} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix von f wird also aus allen partiellen Ableitungen der Komponenten gebildet. Die Berechnung von nm Ableitungen ist für große n und m sehr aufwendig, aber prinzipiell genügt die eindimensionale Differentialrechnung, um die Jacobi-Matrix Zeile für Zeile zu füllen.

Explizit halten wir folgende Umformulierung eines Spezialfalls der mehrdimensionalen Kettenregel fest:

Korollar (*Kettenregel für reellwertige Verknüpfungen*)

Seien $f : P \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f[P] \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}^d$. Ist dann f differenzierbar in $p \in P$ und g differenzierbar in $f(p)$, so gilt

$$\partial_j(g \circ f)(p) = \sum_{1 \leq k \leq d} \partial_k g(f(p)) \partial_j f_k(p) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n.$$

Beweis

$$J_g(f(p)) = (\partial_k g(f(p)))_{1 \leq k \leq d} \quad \text{ist eine } (1 \times d)\text{-Matrix,}$$

$$J_f(p) = (\partial_j f_k(p))_{1 \leq k \leq d, 1 \leq j \leq n} \quad \text{ist eine } (d \times n)\text{-Matrix,}$$

$$J_{g \circ f}(p) = (\partial_j(g \circ f)(p))_{1 \leq j \leq n} \quad \text{ist eine } (1 \times n)\text{-Matrix.}$$

Nach der mehrdimensionalen Kettenregel und der Definition der Matrizenmultiplikation gilt also für alle $1 \leq j \leq n$

$$\partial_j(g \circ f)(p) = J_{g \circ f}(p)_{1,j} = (J_g(f(p)) J_f(p))_{1,j} = \sum_{1 \leq k \leq d} \partial_k g(f(p)) \partial_j f_k(p).$$

— Rechts bilden wir dabei „erste (eindeutige) Zeile mal j -te Spalte“.

Das Differenzierbarkeitskriterium

Was uns noch fehlt, ist ein eindimensionales Kriterium für die totale Differenzierbarkeit, denn der Identifikationssatz setzt ja die totale Differenzierbarkeit von f voraus. Der folgende Satz besagt, dass diese Voraussetzung bei stetiger partieller Differenzierbarkeit automatisch gilt. Das Argument wird vom Mittelwertsatz der eindimensionalen Differentialrechnung getragen.

Satz (*hinreichendes Kriterium für die totale Differenzierbarkeit*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar in einem Punkt $p \in P$.
Dann ist f differenzierbar in p . Ist also f stetig partiell differenzierbar,
so ist f differenzierbar.

Beweis

Es genügt wieder, den Fall $m = 1$ zu beweisen. Sei

$$A = J_f(p) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(p) & \dots & \partial_n f(p) \end{pmatrix}.$$

Wir definieren $r: P \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$r(x) = f(x) - f(p) - A(x - p) \quad \text{für alle } x \in P, \text{ und zeigen, dass}$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|r(x)|}{\|x - p\|} = 0.$$

Sei hierzu $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq P$. Wir betrachten, für jedes $x \in U_\varepsilon(p)$, den folgenden „Weg“ von p nach x entlang der Koordinatenachsen:

$$x^{(1)} = p, \quad x^{(2)} = (x_1, p_2, \dots, p_n), \quad x^{(3)} = (x_1, x_2, p_3, \dots, p_n), \quad \dots, \quad x^{(n+1)} = x.$$

Wir erhalten so die Teleskopsumme

$$f(x) - f(p) = \sum_{1 \leq j \leq n} f(x^{(j+1)}) - f(x^{(j)}).$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ξ_j zwischen $x^{(j)}$ nach $x^{(j+1)}$ mit

$$\partial_j f(\xi_j)(x_j - p_j) = f(x^{(j+1)}) - f(x^{(j)}) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} \frac{|r(x)|}{\|x - p\|} &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - f(p) - A(x - p)|}{\|x - p\|} = \\ \lim_{x \rightarrow p} \frac{|\sum_{1 \leq j \leq n} f(x^{(j+1)}) - f(x^{(j)}) - \partial_j f(p)(x_j - p_j)|}{\|x - p\|} &= \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|\sum_{1 \leq j \leq n} (\partial_j f(\xi_j) - \partial_j f(p)) (x_j - p_j)|}{\|x - p\|} \leq$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\|x - p\| \sum_{1 \leq j \leq n} |\partial_j f(\xi_j) - \partial_j f(p)|}{\|x - p\|} = 0,$$

- wobei wir im letzten Schritt die Stetigkeit der partiellen Ableitungen
 — $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ im Punkt p und $\xi_1, \dots, \xi_n \rightarrow p$ für $x \rightarrow p$ verwenden.

Die Voraussetzungen des Satzes werden wir im Ausblick zu diesem Kapitel genauer untersuchen.

Beispiele

- (1) Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (xy + z, \sin(xy) + z) \text{ für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Dann ist f stetig differenzierbar und für alle $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$J_f(p) = (\partial_j f_i(p))_{i,j} = \begin{pmatrix} p_2 & p_1 & 1 \\ p_2 \cos(p_1 p_2) & p_1 \cos(p_1 p_2) & 1 \end{pmatrix}.$$

Rechnerisch bedeutet dies, dass wir in der Nähe eines festen Punktes $p \in \mathbb{R}^3$ die Funktion f durch die Funktion $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g(x, y, z) = f(p) + J_f(p)((x, y, z) - p) \text{ für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

ersetzen können, ohne allzugroße Fehler zu machen. Zur Berechnung von $g(x, y, z)$ ist keine Sinusberechnung mehr notwendig, für $f(p)$ und $J_f(p)$ muss einmalig ein Sinus- bzw. Kosinuswert berechnet werden. Die erzielte Vereinfachung fällt um so deutlicher aus, je komplizierter f und je größer die Dimensionen m und n sind.

- (2) Das Differenzierbarkeitskriterium liefert im stetig differenzierbaren Fall einen Beweis der mehrdimensionalen Produktregel. Denn sind $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist nach der eindimensionalen Regel auch fg stetig differenzierbar mit

$$\partial_j (gf)(p) = g(p) \partial_j f(p) + f(p) \partial_j g(p) \text{ für alle } p \in P \text{ und } 1 \leq j \leq n.$$

Damit ist fg differenzierbar, und nach dem Identifikationssatz gilt

$$J_{fg}(p) = g(p) J_f(p) + f(p) J_g(p) \text{ für alle } p \in P.$$

Analoges gilt die Quotientenregel. Die mehrdimensionale Kettenregel und die Regel für die Umkehrabbildung kann dagegen nicht in dieser Weise auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden.

Wir fassen unsere Ergebnisse noch einmal zusammen. Es gilt:

stetig partiell differenzierbar *impliziert* (total) differenzierbar,
(total) differenzierbar *impliziert* partiell differenzierbar.

Dass die Umkehrungen dieser Implikation im Allgemeinen nicht gelten, werden wir in den Übungen und im Ausblick sehen.

Erfreulich ist, dass wir die beiden Begriffe der stetigen Differenzierbarkeit nicht unterscheiden müssen:

Satz (*Charakterisierung der Stetigkeit*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Dann sind für alle $p \in P$ äquivalent:

- (a) $J_f : P \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ ist stetig in p ,
- (b) f ist stetig partiell differenzierbar in p .

Beweis

Eine Abbildung $F : P \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ ist genau dann stetig in p , wenn für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ die Komponentenfunktion $F_{ij} : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F_{ij}(x) = F(x)_{ij} \quad \text{für alle } x \in P$$

stetig in p ist. Hieraus folgt die Behauptung, denn die Komponentenfunktionen der Jacobi-Matrizen $J_f(x)$ sind gerade die partiellen Ableitungen von f .

Aufgrund des Satzes verwenden wir ab jetzt die Kurzform *stetig differenzierbar* für „stetig partiell differenzierbar“ bzw. gleichwertig „stetig total differenzierbar“.

Mehrfache partielle Ableitungen

Ist $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so ist jede partielle Ableitung $\partial_j f$ eine reellwertige Funktion auf P , die wir wieder auf partielle Differenzierbarkeit untersuchen können. Wir definieren:

Definition (*zweifache partielle Differenzierbarkeit*)

Eine partiell differenzierbare Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *zweimal partiell differenzierbar*, falls für alle Koordinaten j die partielle Ableitung $\partial_j f : P \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar ist, d. h., es existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial_1 \partial_j f, \partial_2 \partial_j f, \dots, \partial_n \partial_j f.$$

Sind alle $\partial_{j_2} \partial_{j_1} f$ stetig, so heißt f *zweimal stetig (partiell) differenzierbar*.

Wir schreiben auch $\partial_{i,j} f$ für $\partial_i \partial_j f$.

Beispiel

Für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x + xy$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_1 f(x, y) = 1 + y, \quad \partial_2 f(x, y) = x, \quad \partial_{1,2} f(x, y) = \partial_{2,1} f(x, y) = 1,$$

$$\partial_{1,1} f(x, y) = \partial_{2,2} f(x, y) = \partial_{1,2,1,2} f(x, y) = 0.$$

Unter unserer klassischen guten Voraussetzung gilt:

Satz (*Vertauschungssatz von Schwarz*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\partial_{j_1} \partial_{j_2} f = \partial_{j_2} \partial_{j_1} f \quad \text{für alle } j_1, j_2 \in \{1, \dots, n\}.$$

Wir beweisen den Satz der notationellen Übersichtlichkeit halber nur für den Fall $n = 2$ und $j_1 = 1$ und $j_2 = 2$. Hierzu ist eine mehrdimensionale Version des Mittelwertsatzes nützlich:

Satz (*Mittelwertsatz für Rechtecke*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^2$, zweimal differenzierbar und sei

$$R = [a, b] \times [c, d] \subseteq P.$$

Sei $w = (b - a)(d - c)$ der Flächeninhalt von R . Dann gibt es einen Punkt $(p, q) \in]a, b[\times]c, d[$ mit

$$f(a, c) + f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) = w \cdot \partial_2 \partial_1 f(p, q).$$

Beweis

Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(t) = f(t, d) - f(t, c) \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Dann ist g differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz gibt es also ein $p \in]a, b[$ mit

$$g(b) - g(a) = g'(p) (b - a).$$

Dann gilt

$$f(a, c) + f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) =$$

$$g(b) - g(a) = g'(p) (b - a) =$$

$$(\partial_1 f(p, d) - \partial_1 f(p, c)) (b - a) = \partial_2 \partial_1 f(p, q) (d - c)(b - a)$$

für ein $q \in]c, d[$ nach dem Mittelwertsatz, angewendet auf die Funktion $h: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{— } h(t) = \partial_1 f(p, t) \quad \text{für alle } t.$$

Damit können wir nun zeigen:

Beweis des Satzes von Schwarz (für $n = 2$)

Sei $(a, c) \in P$. Dann gilt

$$| \partial_2 \partial_1 f(a, c) - \partial_1 \partial_2 f(a, c) | =$$

$$\lim_{b \downarrow a} \left| \partial_2 \partial_1 f(a, c) - \frac{\partial_2 f(b, c) - \partial_2 f(a, c)}{b - a} \right| =$$

$$\lim_{b \downarrow a} \lim_{d \downarrow c} \left| \partial_2 \partial_1 f(a, c) - \frac{f(b, d) - f(b, c) - (f(a, d) - f(a, c))}{(b - a)(d - c)} \right| = 0,$$

denn der zweite Term ist nach dem Mittelwertsatz für Rechtecke von der Form $\partial_2 \partial_1 f(p, q)$ mit $(p, q) \in]a, b[\times]c, d[$, und aufgrund der Stetigkeit von $\partial_2 \partial_1 f$ in (a, b) streben diese Werte gegen $\partial_2 \partial_1 f(a, b)$, wenn b gegen a und d gegen c strebt.

Im Ausblick werden wir eine zweimal differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\partial_1 \partial_2 f \neq \partial_2 \partial_1 f$ kennenlernen.

k-fache partielle Differenzierbarkeit

In der offensichtlichen Art und Weise wird für alle $k \geq 1$ die *k-fache (stetige) partielle Differenzierbarkeit* einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Induktiv zeigt man mit Hilfe des Vertauschungssatzes von Schwarz, dass bei k -facher stetiger partieller Differenzierbarkeit die Reihenfolge der partiellen Differentiationen keine Rolle spielt. Ist

$$g = \partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f$$

für Koordinaten $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$, so hinterlässt auch die partielle Ableitung von f entlang einer beliebigen Permutation von (j_1, \dots, j_k) wieder die Funktion g . Die Zahl k kann dabei auch größer als n sein.

Gebräuchliche Notationen für mehrfache partielle Ableitungen sind:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}} = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}} f = \partial_{j_k, \dots, j_1} f = \partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f,$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_j^k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^k = \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} f = (\partial_j)^k f = \partial_j \dots \partial_j f \quad (k\text{-mal}).$$

Durch Betrachtung der Komponenten f_1, \dots, f_m einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ kann wieder die k -fache (stetige) partielle Differenzierbarkeit für beliebige Dimensionen m definiert werden.

Parameterabhängige Integrale

Ist $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so können wir bei festgehaltenem „Parameter“ $y \in [c, d]$ das Integral

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$$

bilden. Dies definiert eine Funktion $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, und es stellt sich die Frage, ob g differenzierbar ist. Der folgende Satz besagt, dass dies unter guten Voraussetzungen der Fall ist, und dass wir die Differentiation von g bereits vor der Integration durch partielles Ableiten des Integranden durchführen können:

Satz (*Vertauschungssatz für Ableitung und Integration*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^2$, stetig differenzierbar, und sei $[a, b] \times [c, d] \subseteq P$.

Dann gilt:

$$(a) \quad \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) \, dx = \int_a^b \partial_y f(x, y) \, dx,$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) \, dy = \int_c^d \partial_x f(x, y) \, dy.$$

Analoge Aussagen gelten für höhere Dimensionen.

Beweis

Wir zeigen (a). Der Beweis von (b) ist analog. Sei hierzu $p \in [c, d]$ fest gewählt, und sei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge mit $p + h_n \in [c, d]$ für alle n . Dann gilt

$$\lim_n \left(\int_a^b f(x, p + h_n) \, dx - \int_a^b f(x, p) \, dx \right) h_n^{-1} =$$

$$\lim_n \int_a^b \frac{f(x, p + h_n) - f(x, p)}{h_n} \, dx = \quad (!)$$

$$\int_a^b \lim_n \frac{f(x, p + h_n) - f(x, p)}{h_n} \, dx = \int_a^b \partial_y f(x, p) \, dx.$$

Da $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebig ist, zeigt dies die Behauptung, da

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) \, dx \Big|_{y=p} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_a^b f(x, p + h) \, dx - \int_a^b f(x, p) \, dx \right) h^{-1}.$$

Die bei „(!)“ durchgeführte Vertauschung von Limesbildung und Integration ist aufgrund der punkweisen Konvergenz der beschränkten Funktionenfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_n(x) = \frac{f(x, p + h_n) - f(x, p)}{h_n} \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

gegen die stetige (und damit integrierbare) Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \partial_y f(x, p) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

gerechtfertigt. Denn für alle n existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein p_n zwischen p und $p + h_n$ mit

$$g_n(x) = \partial_y f(x, p_n),$$

sodass aufgrund der Stetigkeit von g

$$\lim_n g_n(x) = \lim_n \partial_y f(x, p_n) = \partial_y f(x, p) = g(x).$$

Da wir den Vertauschungssatz in 1.3 nur bei gleichmäßiger Konvergenz bewiesen hatten, zeigen wir der Vollständigkeit halber noch, dass die Funktionen g_n gleichmäßig gegen g konvergieren. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Da $\partial_y f$ auf der kompakten Menge $[a, b] \times [c, d]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$(+)\quad |\partial_y f(x, y) - \partial_y f(x, p)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [a, b] \text{ und } y \in U_\delta(p) \cap [c, d].$$

Ist nun n_0 derart, dass $|h_n| < \delta$ für alle $n \geq n_0$, so gilt (+) für $y = p_n$, woraus die gleichmäßige Konvergenz der g_n gegen g folgt.

Die Reihenfolge „erst ableiten, dann integrieren“ ist bei konkreten Berechnungen oftmals einfacher als „erst integrieren, dann ableiten“:

Beispiel

Sei $f : [1, 2]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \log(xy)$ für alle x, y . Dann gilt

$$\int_1^2 f(x, y) \, dx = \int_1^2 \log(xy) \, dx = x(\log(xy) - 1) \Big|_{x=1}^{x=2} =$$

$$2(\log(2y) - 1) - (\log(y) - 1) = \log(y) + \log(4) - 1,$$

sodass

$$\frac{d}{dy} \int_1^2 f(x, y) \, dx = \frac{1}{y}.$$

Einfacher ist es, erst abzuleiten und dann zu integrieren:

$$\partial_y f(x, y) = \frac{1}{y}, \quad \int_1^2 \frac{1}{y} \, dx = \frac{1}{y} x \Big|_1^2 = \frac{1}{y}.$$

Ausblick: Gegenbeispiele

Wir betrachten einige Gegenbeispiele, die den Zusammenhang zwischen totaler und partieller Differenzierbarkeit und die Voraussetzung der stetigen partiellen Differenzierbarkeit in unseren Ergebnissen beleuchten. Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung.

Beispiel 1: Unstetig, aber im Nullpunkt partiell differenzierbar

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } y = 0, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f ist auf den Achsen gleich 0 und sonst überall gleich 1. Sie ist im Nullpunkt partiell differenzierbar mit $\partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = 0$, aber dort unstetig.

Das Beispiel zeigt, dass die partielle Differenzierbarkeit in einem Punkt nicht einmal die Stetigkeit und damit sicher nicht die totale Differenzierbarkeit impliziert. Die Funktion ist allerdings nicht wirklich überzeugend, da sie in keinem von 0 verschiedenen Achsenpunkt partiell differenzierbar ist. Interessanter wäre eine überall partiell differenzierbare Funktion, die trotzdem unstetig ist. Eine solche gibt es:

Beispiel 2: Unstetig, aber partiell differenzierbar

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion ist 0 auf den Achsen. Ist $a \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt

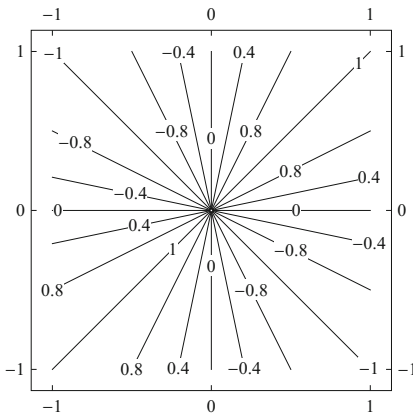
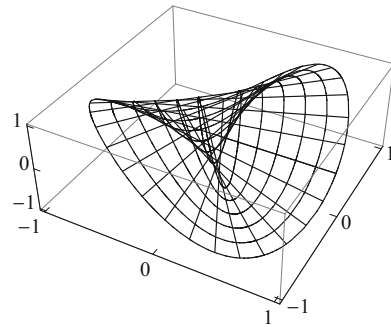
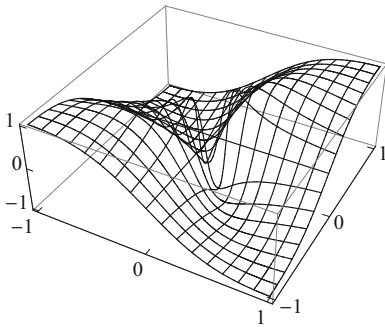
$$f(x, ax) = \frac{2a}{1 + a^2} \in [-1, 1] \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Die Höhenlinien von f sind also punktierte Geraden durch den Ursprung. Der Graph der Funktion entsteht anschaulich wie folgt:

Wir rotieren die x -Achse gegen den Uhrzeigersinn und heben und senken sie dabei an und ab. Dabei erreichen wir die Höhen

1 bei $\pi/4$, 0 bei $\pi/2$, -1 bei $3/4\pi$, 0 bei π , 1 bei $5/4\pi$.

Die folgenden Diagramme visualisieren f durch 3D-Plots und einen Kontur-Plot.



In den beiden 3D-Plots der Funktion f wurde links ein kartesisches und rechts ein polares Gitter verwendet. Der Aufbau durch „Rotation mit Anheben und Absenken der x -Achse“ wird polar deutlicher. Die Radiallinien des polaren 3D-Plots bilden eine Wendeltreppe.

Nach dem Differenzierbarkeitskriterium ist eine stetig partiell differenzierbare Funktion differenzierbar. Beispiel 2 zeigt, dass wir „stetig“ nicht streichen können. Die folgende Frage ist aber noch unbeantwortet:

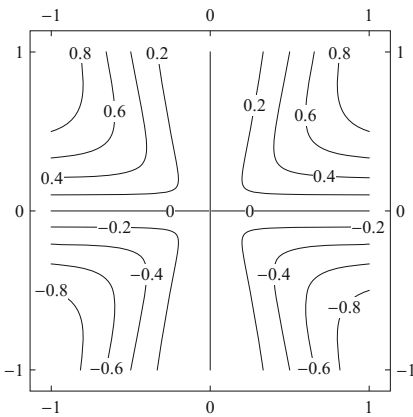
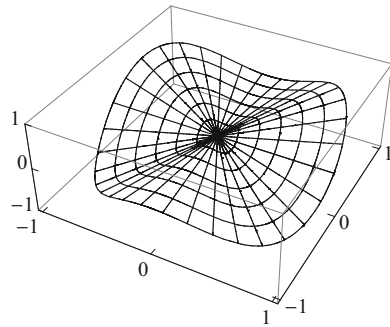
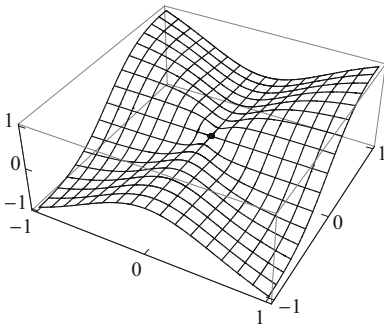
Impliziert die Stetigkeit der Funktion und ihre partielle Differenzierbarkeit die totale Differenzierbarkeit?

Die Funktion f in Beispiel 2 erzwingt ja die Nichtdifferenzierbarkeit durch eine Unstetigkeitsstelle. Eine um eine Potenz schnellere Konvergenz gegen 0 im Zähler zeigt jedoch, dass die Frage zu verneinen ist:

Beispiel 3: Stetig und partiell differenzierbar, aber nicht differenzierbar

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Wegen $f(x, y) = 2a/(1 + a^2)x$ bildet f eine Gerade der Ebene durch 0 auf eine Gerade im Raum durch 0 ab, was man im polaren 3D-Plot gut erkennen kann. Der Graph von f entsteht also durch eine gewisse dreidimensionale Rotation der x -Achse um den Nullpunkt.

Nachrechnen zeigt, dass f partiell differenzierbar ist. Die Differenzierbarkeit im Nullpunkt ist dagegen nicht gültig, da die Geraden durch 0 im Graphen von f durch ihre unterschiedlichen Steigungen die Restbedingung an $r(x)$ verletzen. Es ist instruktiv, dies anhand der Definition zu überprüfen: Wäre f differenzierbar im Nullpunkt, so wäre

$$J_f(0) = (\partial_x f(0), \partial_y f(0)) = (0 \ 0).$$

Dann wäre aber

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - J_f(0)(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0,$$

sodass speziell

$$0 = \lim_{x \downarrow 0} \frac{|f(x,x)|}{\|(x,x)\|} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2x^3}{2x^2 \|(x,x)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Insgesamt ist also f stetig und partiell differenzierbar, aber im Nullpunkt nicht total differenzierbar (und nicht stetig partiell differenzierbar).

Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit ist auch im Satz von Schwarz über die Vertauschung von partiellen Ableitungen notwendig:

Beispiel 4: Verschiedene gemischte zweite partielle Ableitungen

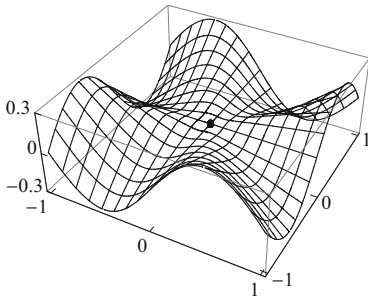
Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

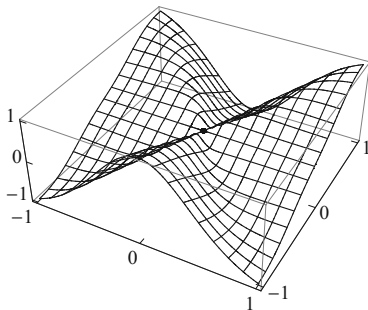
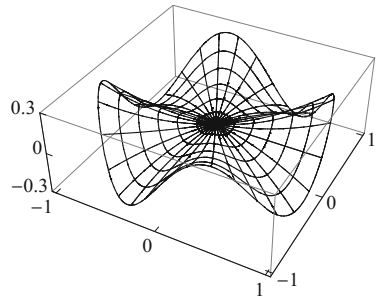
Die Funktion f ist stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_x(0, y) = -y \text{ für alle } y, \quad \partial_y(x, 0) = x \text{ für alle } x.$$

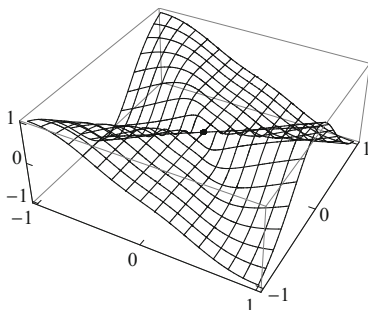
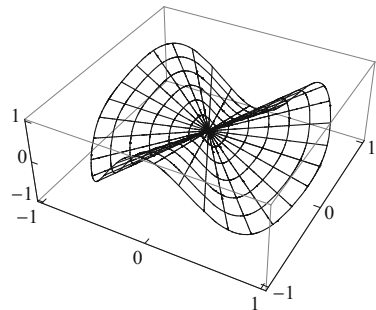
$$\text{Damit ist } \partial_x \partial_y f(0, 0) = 1 \neq -1 = \partial_y \partial_x f(0, 0).$$



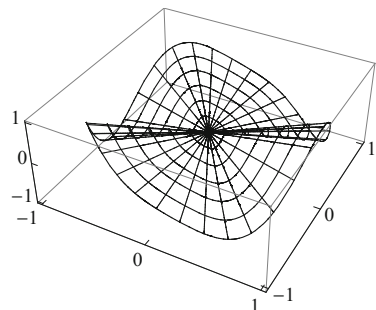
$f(x, y)$



$\partial_x f(x, y)$



$\partial_y f(x, y)$



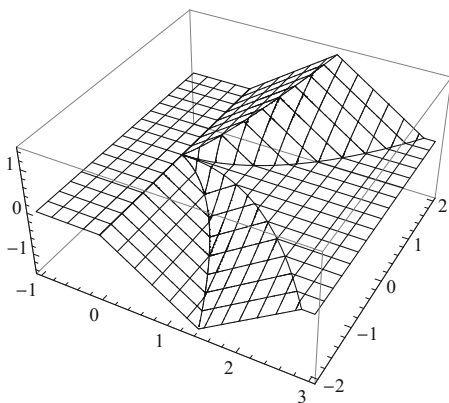
Auch für die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration sind Differenzierbarkeitsvoraussetzungen wichtig:

Beispiel 5: Falsche Ableitung bei Differentiation unter dem Integral

Für alle $y \in \mathbb{R}$ sei $w(y) = \sqrt{|y|}$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(y) x, & \text{falls } 0 \leq x \leq w(y), \\ \operatorname{sgn}(y) (2w(y) - x), & \text{falls } w(y) < x \leq 2w(y), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei wie üblich $\operatorname{sgn}(y) = -1$ für $y < 0$, $\operatorname{sgn}(y) = 1$ für $y > 0$ und $\operatorname{sgn}(0) = 0$.



Die y -Schnitte von f sind stückweise linear mit Steigungen in $\{-1, 0, 1\}$. Sie laufen im Intervall $[0, w(y)]$ von 0 nach $w(y)$ und dann im Intervall $[w(y), 2w(y)]$ von $w(y)$ nach 0. Die dabei eingeschlossene Fläche ist $2w(y)^2/2 = y$.

Die Funktion f ist stetig, 0 auf den Achsen und in allen Punkten $(x, 0)$ nach y (aufgrund des dortigen „Nullplateaus“) partiell differenzierbar mit

$$\partial_y f(x, 0) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Weiter gilt (vgl. den Kommentar zum obigen Diagramm)

$$\int_0^1 f(x, y) dx = y \quad \text{für alle } y \in [-1/4, 1/4].$$

Damit ist

$$\frac{d}{dy} \int_0^1 f(x, y) dx \Big|_{y=0} = 1 \neq 0 = \int_0^1 \partial_y f(x, 0) dx.$$

Durch eine geeignete Modifikation der Definition von f lassen sich die Knicke im Graphen von f glätten, sodass eine partiell (aber im Nullpunkt nicht total) differenzierbare Funktion entsteht, die ebenfalls nicht unter dem Integral differenziert werden kann.

5. Die Differentialoperatoren

Wir betrachten Operatoren, die auf Funktionen angewendet werden und durch partielle Differentiation dieser Funktionen neue Funktionen erzeugen. Die Interpretation der Matrizen-Multiplikation $J_f(p)x$ für eine reellwertige Funktion f als Skalarprodukt führt uns zum Paradebeispiel eines Differentialoperators, dem Gradientenfeld. Angewendet auf eine reellwertige differenzierbare Funktion liefert dieser Operator ein Vektorfeld, dessen Vektoren in die Richtung des lokal stärksten Anstiegs der Funktion zeigen. Danach lernen wir mit der Divergenz, der Rotation und dem Laplace-Operator weitere Operatoren kennen, die in der mathematischen Physik von großer Bedeutung sind. Im Verlauf der Darstellung führen wir auch die sog. Nabla-Schreibweise ein, die zu einem suggestiven Kalkül beiträgt.

Gradient, Richtungsableitung und Nabla-Operator

Ist $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit einer (offenen und nichtleeren) Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist für alle $p \in P$ die Jacobi-Matrix $J_f(p) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ eine einzeilige Matrix (ein Zeilenvektor), deren Einträge aus den partiellen Ableitungen von f im Punkt p gebildet werden. Das Matrix-Vektor-Produkt $J_f(p)x$ können wir als kanonisches Skalarprodukt $\langle J_f(p)^t, x \rangle$ im \mathbb{R}^n schreiben, mit $J_f(p)^t, x \in \mathbb{R}^n$. Diese Beobachtung führt zu einer sehr anschaulichen geometrischen Interpretation der Jacobi-Matrix. Wir definieren:

Definition (*Gradient, Gradientenfeld*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann setzen wir für alle $p \in P$:

$$\text{grad}(f)(p) = (\partial_1 f(p), \dots, \partial_n f(p)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Der Vektor $\text{grad}(f)(p)$ heißt der *Gradient* von f *im Punkt* oder *an der Stelle* p , und die Funktion $\text{grad}(f) : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt das *Gradientenfeld* von f .

Ist $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $p \in P$, so gilt

$$J_f(p)x = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j f(p) x_j = \langle \text{grad}(f)(p), x \rangle \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Den Aufbau der Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ können wir also noch einmal anders beschreiben:

Die m Zeilen der Jacobi-Matrix $J_f(p)$ sind die (zu Zeilenvektoren transponierten) Gradienten der Komponenten f_1, \dots, f_m von f im Punkt p .

Zur Ermittlung der geometrischen Bedeutung des Gradienten definieren wir eine natürliche Verallgemeinerung der partiellen Ableitung. Während wir bislang Differentialquotienten entlang der Koordinatenachsen untersucht haben, betrachten wir nun Differentialquotienten entlang beliebiger Geraden.

Definition (*Richtungsableitung*)

Seien $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in P$ und $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|w\| = 1$. Dann heißt f im Punkt p *in Richtung w differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hw) - f(p)}{h}$$

existiert. Die reelle Zahl a heißt dann die *Ableitung* von f im Punkt p in *Richtung w* , und wir schreiben

$$\partial_w f(p) = a.$$

Da $P \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq P$, sodass

$$\overline{(p - \varepsilon w)(p + \varepsilon w)} = \{p + tw \mid t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\} \subseteq P.$$

Damit ist die Frage nach der Existenz des Grenzwerts in der Definition der Richtungsableitung sinnvoll.

Die Richtungsableitung verallgemeinert die partielle Ableitung, denn für die Einheitsvektoren e_1, \dots, e_n des \mathbb{R}^n gilt nach Definition:

$$\partial_j f(p) = \partial_{e_j} f(p) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n.$$

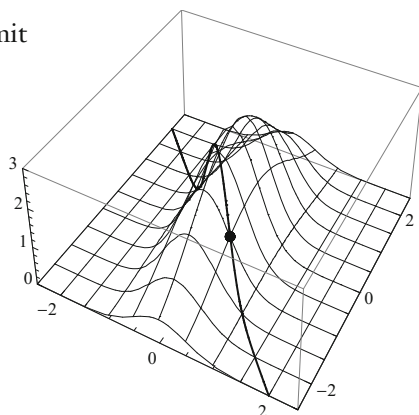
Richtungsableitungen lassen sich nun mit Hilfe des Gradienten $\text{grad}(f)(p)$ und des kanonischen Skalarprodukts $\langle x, y \rangle = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j y_j$ überraschend einfach berechnen:

Satz (*Berechnung von Richtungsableitungen*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $p \in P$, und sei $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|w\| = 1$.

Dann ist f im Punkt p in der Richtung w differenzierbar, und es gilt

$$\partial_w f(p) = \langle \text{grad}(f)(p), w \rangle = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j f(p) w_j.$$



$$p = (1/2, -1), \quad w = (1, -1)/\sqrt{2}$$

Beweis

Wie im Beweis der Identifikation der Jacobi-Matrix gilt mit $A = J_f(p)$ und der Restfunktion $r : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow p} r(x)/\|x - p\| = 0$:

$$\begin{aligned}\partial_w f(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hw) - f(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(hw) + r(p + hw)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hAw}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(p + hw)}{h} = Aw + 0 = \langle \text{grad}(f)(p), w \rangle.\end{aligned}$$

Dieser Beweis benutzt lediglich die Definition der Differenzierbarkeit. Aber auch das Vorschalten eines parametrisierten Geradenstücks bietet sich an, im letzten Kapitel hatten wir diese Methode ja schon mehrfach verwendet:

Zweiter Beweis mit Hilfe der Kettenregel

Sei $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq P$, und sei $g :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow P$ mit

$$g(t) = p + tw \quad \text{für alle } t \in]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\partial_w f(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hw) - f(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(h)) - f(g(0))}{h} = \\ &= (f \circ g)'(0) = J_f(g(0)) g'(0) = J_f(p) w = \langle \text{grad}(f)(p), w \rangle.\end{aligned}$$

Das Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j w_j = \|v\| \|w\| \cos(\varphi),$$

mit dem von v und w eingeschlossenen Winkel $\varphi \in [0, \pi]$, ist bei festgehaltenem Vektor v unter allen Vektoren w der Länge 1 genau dann am größten, wenn w in die Richtung von v zeigt, d. h., wenn $v = \alpha w$ für ein $\alpha > 0$ gilt. Die Richtungsableitung $\partial_w(p) = \langle \text{grad}(f)(p), w \rangle$ wird also genau für den Einheitsvektor

$$w = \frac{\text{grad}(f)(p)}{\|\text{grad}(f)(p)\|} \in \mathbb{R}^n$$

maximal. Damit erhalten wir:

Geometrische Bedeutung des Gradienten

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion f an einer Stelle p zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs von f an der Stelle p . Je größer sein Betrag, desto stärker steigt f an der Stelle p in dieser Richtung an.

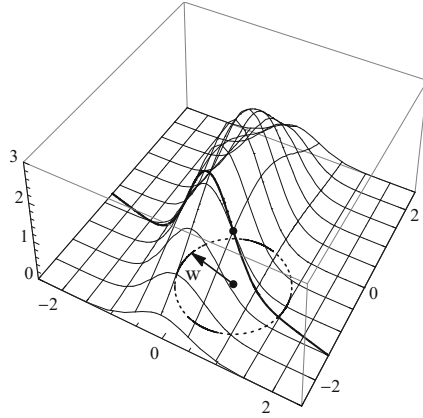
Analog zeigt $-\text{grad}(f)(p)$ in die Richtung des stärksten Abfalls von f an der Stelle p , denn $\langle v, w \rangle$ wird minimal, wenn $v = -\alpha w$ für ein $\alpha > 0$ gilt. Oder man argumentiert so: Für alle $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|w\| = 1$ gilt $\partial_{-w} f(p) = -\partial_w f(p)$.

Die Sprechweise „er zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs“ birgt, wenn man an Bergwanderungen denkt, die Gefahr der Dimensionsverwechslung. Um dem vorzubeugen halten wir fest:

Dimension des Gradienten

Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $p \in P$, so ist der Gradient $\text{grad}(f)(p)$ ein Element des \mathbb{R}^n , nicht des \mathbb{R}^{n+1} .

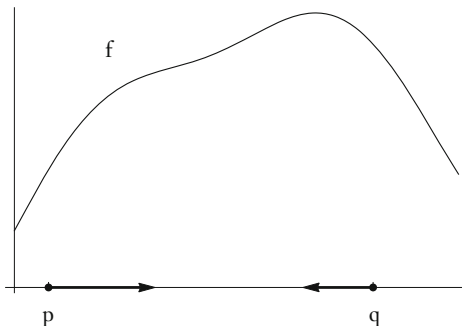
Visualisieren wir $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ als dreidimensionale Höhenlandschaft, so lebt der Gradient in der Ebene, nicht im Raum. Wir können $\text{grad}(f)(p) \in \mathbb{R}^2$ an den Punkt p anheften. Dieser Vektor zeigt dann wie ein „Steigungs-Kompass“ in die Richtung, in der unsere Höhenlandschaft in $(p, f(p))$ am steilsten ist. Eine Kugel bei $(p, f(p))$ rollt in x - y -Richtung $-\text{grad}(f)(p)$ auf der Tangentialebene von f im Punkt p ab, vorausgesetzt, der Gradient von f im Punkt p ist ungleich Null (andernfalls ist die Tangentialebene parallel zur x - y -Ebene). Ist $f(p) > 0$, so trifft die Kugel die x - y -Ebene in einem Punkt auf der Halbgeraden $\{p - \alpha \text{grad}(f)(p) \mid \alpha > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.



Der Gradient als Steigungskompass:

$$p = (1/2, -1), \quad w = \text{grad}(f)(p)$$

Verständnisschwierigkeiten bereitet bei dieser Interpretation zuweilen gerade der einfache Fall $n = 1$. Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p und $f'(p) > 0$, so zeigt $f'(p) \in \mathbb{R}^1$ auf der x -Achse nach rechts. Ist $f'(p) < 0$, so zeigt $f'(p)$ nach links. In beiden Fällen zeigt also $\text{grad}(f)(p) = f'(p)$ wieder in die Richtung des (stärksten) Anstiegs von f . Der Gradient $f'(p) \in \mathbb{R}$ darf nicht mit $(1, f'(p)) \in \mathbb{R}^2$ verwechselt werden.



Für die Dimension $n = 1$ sind

$$a = \text{grad}(f)(p) = f'(p),$$

$$b = \text{grad}(f)(q) = f'(q)$$

eindimensionale Vektoren.

Heften wir sie an die Punkte p und q der x -Achse an, so zeigen sie in die Richtung des Anstiegs von f .

Der Nabla-Operator

Oft wird der Gradient einer Funktion auch mit Hilfe des sog. *Nabla-Operators* notiert. Man schreibt

$$\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \quad (n\text{-dimensionaler Nabla-Operator})$$

Die Bezeichnung „Nabla“ geht auf das gleichlautende griechische Wort für „Harfe“ zurück, an die das Symbol ∇ vage erinnert. Aus mathematischer Sicht ist der Harfen-Operator eine Funktion, dessen Definitionsbereich aus allen partiell differenzierbaren Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ besteht. Angewendet auf eine solche Funktion liefert der Nabla-Operator das Gradientenfeld von f :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \text{grad}(f).$$

(*Nabla-Formulierung des Gradienten*)

Für alle $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ und alle $p \in P$ ist also $\nabla f(p) = \text{grad}(f)(p)$ der Gradient von f an der Stelle p . Obwohl ∇f nur eine andere Schreibweise für $\text{grad}(f)$ ist, ist die Notation $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ oft suggestiv und gut zu handhaben. Speziell in der mathematischen Physik wird sie sehr häufig verwendet.

Vektorfelder und Gradientenfelder

In Kapitel 3.3 hatten wir bereits zwei- und drei dimensionale Vektorfelder betrachtet. Allgemein definieren wir nun:

Definition (*Vektorfeld*)

Eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt auch ein *n-dimensionales Vektorfeld*. Ein Vektorfeld heißt stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar usw., falls dies für f gilt.

In einem Vektorfeld haben der Definitions- und Wertebereich dieselbe Dimension. Heften wir an jeden Punkt p von P den Vektor $f(p)$ an, so bedeutet die Stetigkeit des Vektorfeldes f anschaulich, dass sich die Pfeile $f(p)$ wenig ändern, wenn wir den Ort p hinreichend wenig ändern. Die Differenzierbarkeit des Vektorfeldes bedeutet stärker, dass die Pfeile lokal ein lineares Änderungsverhalten besitzen.

Eine sehr wichtige Klasse von Vektorfeldern entsteht durch die Gradientenbildung. Sie führt uns von den reellen Werten einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ zurück in den n -dimensionalen Ausgangsraum, sodass $\text{grad}(f): P \rightarrow \mathbb{R}^n$. Viele, aber nicht alle Vektorfelder entstehen in dieser Weise. Wir definieren hierzu:

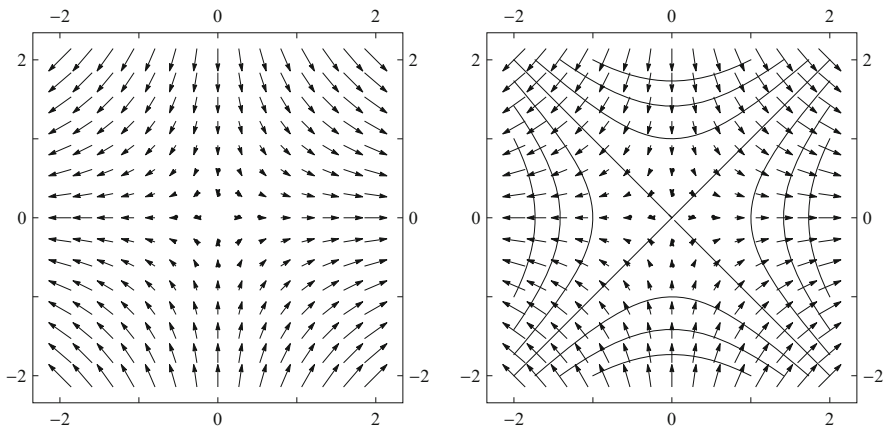
Definition (Gradientenfeld)

Ein Vektorfeld $g : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ein *Gradientenfeld*, falls es eine differenzierbare Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $g = \text{grad}(f)$. Eine solche Funktion f heißt dann auch eine *Stammfunktion* von g .

Ein Gradientenfeld nennt man vor allem in der Physik auch ein *Potentialfeld* und eine Stammfunktion f von g auch ein (*skalares*) *Potential* von g .

Gradienten und Niveaumengen

Überlagert man das Gradientenfeld einer Funktion mit einem Kontur-Plot, so stellt man fest, dass die Gradienten senkrecht auf den Niveaumengen stehen. Dieses Phänomen kann man für die Dimension $n = 2$ anschaulich erklären. Sei hierzu p ein Punkt und $c = f(p)$. Bewegen wir uns nun auf der durch p verlaufenden Höhenlinie $\text{niv}_f(c)$, so ist die Funktion unter dieser Bewegung konstant gleich c . Damit erhalten wir die Richtungsableitung 0 für Bewegungen bei p , die tangential zur Höhenlinie $\text{niv}_f(c)$ verlaufen. Da die Richtungsableitung durch das Skalarprodukt des Gradienten mit der Richtung gegeben ist, steht ein Gradient also senkrecht auf der Tangente der Höhenlinie durch p (falls diese Tangente existiert). Analoge Überlegungen gelten für höhere Dimensionen. Im folgenden Kapitel werden wir diesem Phänomen noch genauer nachgehen.



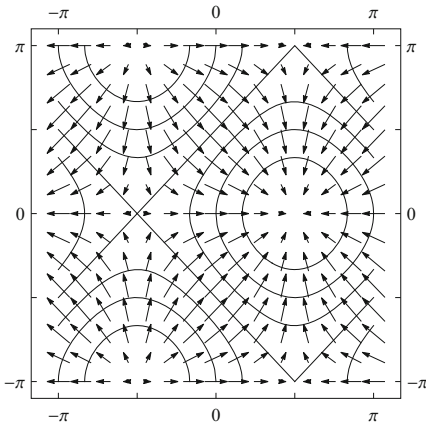
Links ist das zweidimensionale Vektorfeld g mit

$$g(x, y) = 2(x, -y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gezeigt. Dieses Vektorfeld ist das Gradientenfeld der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Rechts sind $g = \text{grad}(f)$ und ein Kontur-Plot von f überlagert. Die Gradienten stehen senkrecht auf den Höhenlinien.



Ein analoges überlagertes Diagramm für die Funktionen

$$g(x, y) = (\cos(x), -\sin(y)),$$

$$f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$$

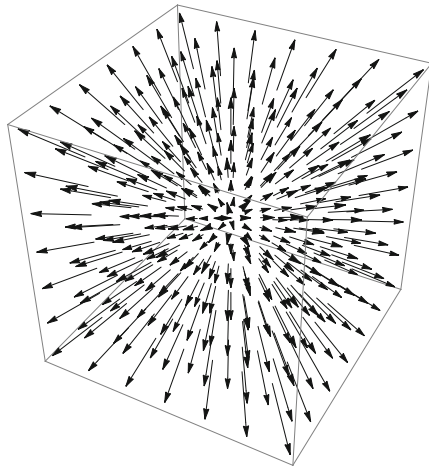
Rechts ist das dreidimensionale Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$g(x, y, z) = 2(x, y, z).$$

gezeigt. Es gilt $g = \text{grad}(f)$ für

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Niveaumengen von f sind Kugeloberflächen. Die Gradienten stehen senkrecht auf ihnen.



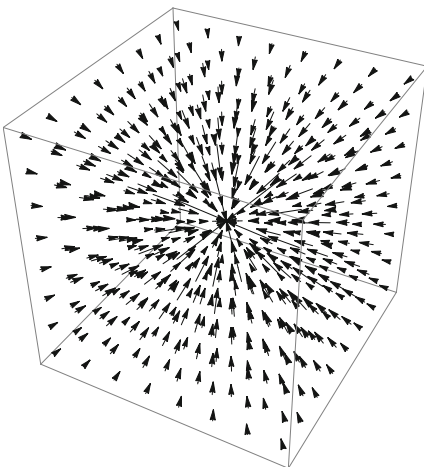
Links ist das dreidimensionale Vektorfeld g mit

$$g(x, y, z) = - \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^2}$$

für $(x, y, z) \neq 0$ gezeigt. Es gilt $g = \text{grad}(f)$ für

$$f(x, y, z) = - \|(x, y, z)\|$$

für $(x, y, z) \neq 0$. Erneut sind die Niveaumengen von f Kugeloberflächen, auf denen die Gradienten senkrecht stehen.



Divergenz eines Vektorfeldes und Laplace-Operator

Die Jacobi-Matrix $J_g(p)$ eines differenzierbaren n -dimensionalen Vektorfeldes $g: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $p \in P$ ist eine $(n \times n)$ -Matrix. Damit können alle in der linearen Algebra betrachteten Besonderheiten quadratischer Matrizen untersucht werden. Dazu gehört zum Beispiel die Spur

$$\text{spur}(A) = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{jj}$$

einer Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Die Spur einer Jacobi-Matrix $J_g(p)$ heißt aufgrund ihrer (nicht offensichtlichen) physikalischen Bedeutung die Divergenz des Vektorfeldes f im Punkt p :

Definition (*Divergenz, Quelle, Senke*)

Sei $g: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann setzen wir für $p \in P$:

$$\text{div}(g)(p) = \text{spur}(J_g(p)) = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j g_j(p) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}(p).$$

Die Funktion $\text{div}(g): P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die *Divergenz* des Vektorfeldes g .

Gilt $\text{div}(g)(p) > 0$, so heißt p eine *Quelle* von g . Gilt $\text{div}(g)(p) < 0$, so heißt p eine *Senke* von g . Gilt $\text{div}(g)(p) = 0$, so heißt g *quellfrei* in p .

In der mathematischen Physik interpretiert man die Divergenz oft als „Quelldichte“. Sie ist ein skalares Maß für die in einem Punkt p ein- oder abfließende Menge, wobei die Strömung der Materie durch das Vektorfeld g beschrieben wird. Am Beispiel von Wasser: Gilt $\text{div}(g)(p) = 0$, so fließt in den Punkt p genauso viel Wasser hinein, wie von ihm wieder hinausfließt. Ist dagegen p eine Quelle des Strömungsflusses g , so wird dem Strom an der Stelle p Wasser hinzugefügt.

Mit dem Nabla-Operator $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ können wir die Divergenz elegant als Skalarprodukt schreiben:

$$\text{div}(g) = \langle \nabla, g \rangle = \langle (\partial_1, \dots, \partial_n), g \rangle. \quad (\text{Nabla-Formulierung der Divergenz})$$

Beispiele

Wir betrachten der zweidimensionalen Vektorfelder obigen Diagramme.

- (1) Sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = 2(x, -y)$ für alle (x, y) . Dann gilt

$$\text{div}(g)(x, y) = 2 - 2 = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}.$$

- (2) Sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = (\cos(x), -\sin(y))$ für alle (x, y) . Dann gilt

$$\text{div}(g)(x, y) = -\sin(x) - \cos(y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Speziell gilt $\text{div}(g)(0) = -1$.

Die Beispiele haben die Form $\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$, wir betrachten also Divergenzen von Gradientenfeldern. Im ersten Beispiel ist das Gradientenfeld quelfrei, im zweiten gilt Quelfreiheit für (x, y) nur dann, wenn $\sin(x) = -\cos(y)$. Die Divergenz von Gradientenfeldern ist so bedeutsam, dass für sie ein eigener Operator eingeführt wird:

Definition (*Laplace-Operator Δf*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, zweimal stetig differenzierbar. Dann setzen wir

$$\Delta f = \nabla^2 f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j \partial_j f = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j^2 f.$$

Der Gradient erzeugt aus der reellwertigen Funktion f ein n -dimensionales Vektorfeld g auf dem Definitionsbereich von f . Die Anwendung der Divergenz führt dann wieder nach \mathbb{R} , sodass $\Delta f: P \rightarrow \mathbb{R}$. Der Laplace-Operator ist also eine skalare Funktion.

In Nabla-Schreibweise gilt:

$$\Delta f = \langle \nabla, \nabla f \rangle = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j \partial_j f = \langle (\partial_1 \partial_1, \dots, \partial_n \partial_n), f \rangle = \langle \nabla, \nabla \rangle f.$$

(*Nabla-Formulierungen des Laplace-Operators*)

Diese Darstellung erklärt mit Blick auf $v^2 = \langle v, v \rangle$ für Vektoren v die Notation $\nabla^2 = \langle \nabla, \nabla \rangle$ für den Laplace-Operator Δ .

Die Quelfreiheit eines Gradientenfeldes ist, wie wir in den Beispielen gesehen haben, eine besondere Eigenschaft. Wir definieren hierzu:

Definition (*harmonische Funktion*)

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, heißt eine *harmonische Funktion* auf P , falls

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = 0.$$

Die harmonischen Funktionen sind die Lösungen der sog. *Potentialgleichung* $\Delta f = 0$.

Beispiele

$f(x, y) = x^2 - y^2$ ist harmonisch auf \mathbb{R}^2 , $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$ dagegen nicht. Für $f(x, y) = x^4 - y^4$ gilt $\Delta f(x, y) = 12(x^2 - y^2)$ und $\Delta \Delta f = 0$, sodass Δf harmonisch ist.

Schließlich definieren wir noch:

Definition (*Laplace-Operator für vektorwertige Funktionen*)

Ist $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, zweimal stetig differenzierbar, so setzen wir

$$\Delta f = (\Delta f_1, \dots, \Delta f_m).$$

Der Laplace-Operator wird also komponentenweise angewendet.

Die Rotation

Ein weiteres Beispiel für eine Operation auf einem Vektorfeld, die in der Physik untersucht wird, ist die Rotation.

Definition (*Rotation, Wirbelfeld*)

Sei $g : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares dreidimensionales Vektorfeld. Dann setzen wir:

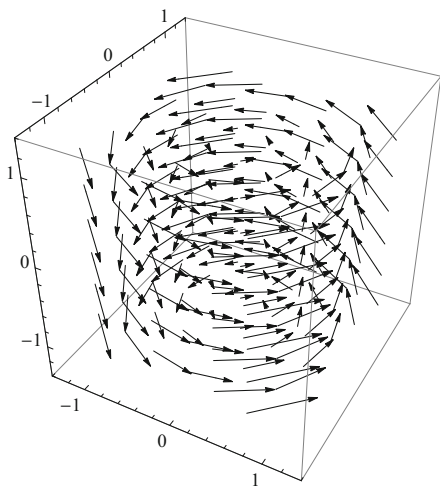
$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(g) &= (\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2, \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3, \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1) = \\ &= \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}, \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Das Vektorfeld $\operatorname{rot}(g) : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt die *Rotation* oder das *Wirbelfeld* von g . Gilt $\operatorname{rot}(g)(p) = 0$, so heißt p ein *wirbelfreier Punkt* von g .

Der Nabla-Operator kann für die Rotation besonders überzeugend eingesetzt werden. Unter Verwendung des Kreuzprodukts auf dem \mathbb{R}^3 gilt:

$$\operatorname{rot}(g) = \nabla \times g = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \times g. \quad (\text{Nabla-Formulierung der Rotation})$$

Während die Gradientenbildung einer skalaren Funktion ein Vektorfeld zuordnet und die Divergenz einem Vektorfeld eine skalare Funktion, so ordnet die Rotation einem Vektorfeld ein neues Vektorfeld zu. Der Vektor $\operatorname{rot}(g)(p)$ lässt sich als „Wirbel“ des Vektorfeldes g im Punkt p interpretieren. Die Länge von g ist ein Maß für die Stärke der Rotation. Besitzt g an der Stelle p einen „Mahlstrom“ in einer Ebene, so steht $\operatorname{rot}(g)(p)$ senkrecht auf dieser Ebene.



Gezeigt ist das Vektorfeld

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit}$$

$$g(x, y, z) = (-y, x, 0),$$

das anschaulich einen Wirbel um die z -Achse beschreibt. Es gilt

$$\operatorname{rot}(g)(x, y, z) = (0, 0, 2)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Ein Begriff einer „rotationsharmonischen Funktion“ muss nicht eingeführt werden, denn die Anwendung der Rotation auf dreidimensionales Gradientenfeld liefert immer das Nullfeld:

Satz (*Wirbelfreiheit eines Gradientenfeldes*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^3$, zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0, \text{ d.h. } \nabla \times \nabla f = 0.$$

Ebenso gilt:

Satz (*Quellfreiheit eines Rotationsfeldes*)

Sei $g: P \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P \subseteq \mathbb{R}^3$, zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(g)) = 0, \text{ d.h. } \langle \nabla, \nabla \times g \rangle = 0.$$

Die Beweise dieser Sätze können dem Leser überlassen bleiben.

Rechenregeln für die Differentialoperatoren

Wir stellen einige Regeln für den Umgang mit den Operatoren zusammen. Um Klammern zu sparen vereinbaren wir:

Konvention

Wir schreiben oft kurz $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} g$, $\operatorname{rot} g$, $\operatorname{spur} A$ usw.

Im Folgenden können f und g sowohl skalare Funktionen als auch Vektorfelder bezeichnen. Treten beide Typen gemischt auf, so verwenden wir f für skalare Funktionen und g für Vektorfelder.

Zunächst sind alle Operatoren linear:

Satz (*Linearität der Differentialoperatoren*)

Unter der Voraussetzung der Definiertheit gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{grad} f + \beta \operatorname{grad} g, \quad \text{wobei } f, g: P \rightarrow \mathbb{R}, P \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div} f + \beta \operatorname{div} g, \quad \text{wobei } f, g: P \rightarrow \mathbb{R}^n, P \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$\operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{rot} f + \beta \operatorname{rot} g, \quad \text{wobei } f, g: P \rightarrow \mathbb{R}^3, P \subseteq \mathbb{R}^3,$$

$$\Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta f + \beta \Delta g, \quad \text{wobei } f, g: P \rightarrow \mathbb{R}, P \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Wichtige Produktregeln versammelt der folgende Satz. Dabei geben wir sowohl grad - div - rot -Formulierungen als auch Nabla-Formulierungen an.

Satz (*Produktregeln für die Differentialoperatoren*)

Unter der Voraussetzung der Definiertheit gilt:

$$(a) \quad \text{grad}(fg) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f, \quad \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f,$$

$$\text{wobei } f, g : P \rightarrow \mathbb{R}, P \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$(b) \quad \text{div}(fg) = \langle \text{grad } f, g \rangle + f \text{ div } g, \quad \langle \nabla, fg \rangle = \langle \nabla f, g \rangle + f \langle \nabla, g \rangle,$$

$$\text{wobei } f : P \rightarrow \mathbb{R}, g : P \rightarrow \mathbb{R}^n, P \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$(c) \quad \text{rot}(f \times g) = (\text{rot } f) \times g + f \times (\text{rot } g),$$

$$\nabla \times (f \times g) = (\nabla \times f) \times g + f \times (\nabla \times g),$$

$$\text{wobei } f, g : P \rightarrow \mathbb{R}^3, P \subseteq \mathbb{R}^3,$$

$$(d) \quad \text{rot}(fg) = (\text{grad } f) \times g + f \text{ rot } g, \quad \nabla \times (fg) = \nabla f \times g + f (\nabla \times g),$$

$$\text{wobei } f : P \rightarrow \mathbb{R}, g : P \rightarrow \mathbb{R}^3, P \subseteq \mathbb{R}^3,$$

$$(e) \quad \Delta(fg) = g \Delta f + f \Delta g + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle,$$

$$\text{wobei } f, g : P \rightarrow \mathbb{R}, P \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Diese Rechenregeln können anhand der Definitionen der Operatoren direkt nachgewiesen werden. Wir erinnern in diesem Zusammenhang an:

Rechenregeln für Kreuz- und Skalarprodukt

Für alle Vektoren im \mathbb{R}^3 gilt:

$$u \times v = -v \times u,$$

$$\langle u, v \times w \rangle = \langle v, w \times u \rangle = \langle w, u \times v \rangle, \quad (\text{zyklische Vertauschung})$$

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w,$$

$$\langle u_1 \times u_2, v_1 \times v_2 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle \langle u_2, v_2 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle \langle u_2, v_1 \rangle.$$

Die Liste der Rechenregeln lässt sich noch fortsetzen. So gilt zum Beispiel die folgende Formel für die doppelte Rotation eines zweimal stetig differenzierbaren Vektorfeldes $g : P \rightarrow \mathbb{R}^3, P \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\text{rot rot } g = \text{grad div } g - \Delta g, \quad \nabla \times (\nabla \times g) = \nabla \langle \nabla, g \rangle - \Delta g.$$

(doppelte Rotation)

Die Divergenz $\langle \nabla, g \rangle$ von g ist skalar, sodass der Gradient $\nabla \langle \nabla, g \rangle$ gebildet werden kann. Für den zweiten Term gilt $\Delta g = (\Delta g_1, \Delta g_2, \Delta g_3)$ nach der komponentenweisen Anwendung des Laplace-Operators.

Ausblick: Kurvenintegrale in Gradientenfeldern

Im Ausblick zu Kapitel 3.2 hatten wir für ein stetiges n -dimensionales Vektorfeld $g: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow P$ das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} g(x) \cdot dx = \int_a^b \langle g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

zweiter Art eingeführt. (Wir verwenden hier und im Folgenden den Buchstaben γ für Kurven, um f für skalare Funktionen auf P frei zu haben.) Am Beispiel des Feldes $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g(x, y) = (y, y - x) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

hatten wir gesehen, dass der Wert eines Integrals entlang einer Kurve γ , die vom Startpunkt $p_1 = \gamma(a)$ zum Zielpunkt $p_2 = \gamma(b)$ führt, im Allgemeinen vom Verlauf der Kurve abhängt. Für Gradientenfelder ist dies jedoch nicht der Fall:

Satz (*Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen in Gradientenfeldern*)

Sei $g: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, und sei f eine Stammfunktion von g , sodass $g = \text{grad}(f)$. Weiter sei

$$\gamma: [a, b] \rightarrow P$$

eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt

$$\int_{\gamma} g(x) \cdot dx = f(\gamma(t)) \Big|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral von g entlang γ gleich null, wenn γ geschlossen ist.

Beweis

Nach Definition des Kurvenintegrals und wegen $g = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(x) \cdot dx &= \int_a^b \langle g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \\ &= \int_a^b \sum_{1 \leq j \leq n} g_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt = \int_a^b \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j f(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(t)) \Big|_a^b, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Kettenregel und im letzten Schritt den

— Hauptsatz verwenden.

Das vergleichsweise einfache Feld $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y) = (y, y - x)$ ist also kein Gradientenfeld. Es gibt kein f mit $\text{grad}(f) = g$. Dies können wir auch so formulieren: Es gibt kein $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\partial_x f(x, y) = y, \quad \partial_y f(x, y) = y - x.$$

Das scheinbar unwesentlich veränderte Feld \bar{g} mit

$$\bar{g}(x, y) = (y, x - y),$$

ist dagegen das Gradientenfeld von f mit

$$f(x, y) = xy - y^2/2.$$

Für dieses Feld können wir Kurvenintegrale ohne Mühe ausrechnen. Für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve γ von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ gilt zum Beispiel

$$\int_{\gamma} \bar{g}(x) \cdot dx = f(1, 1) - f(0, 0) = 1/2.$$

Eine natürliche Frage ist nun, welche Vektorfelder Gradientenfelder sind und welche nicht. Für topologisch gutartige Definitionsbereiche P existiert eine überraschend einfache Charakterisierung. Wir nennen ein $P \subseteq \mathbb{R}^n$ *sternförmig*, wenn es ein $p \in P$ gibt, sodass $\overline{px} \subseteq P$ für alle $x \in P$. Beispielsweise sind alle ε -Kugeln und alle Quader im \mathbb{R}^n sternförmig, und auch \mathbb{R}^n ist sternförmig. Dagegen ist $\mathbb{R}^n - \{0\}$ nicht sternförmig. Es gilt nun:

Satz (*Charakterisierung von Gradientenfeldern*)

Sei $g: P \rightarrow \mathbb{R}^n$, P sternförmig, ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Dann sind äquivalent:

(a) g ist ein Gradientenfeld.

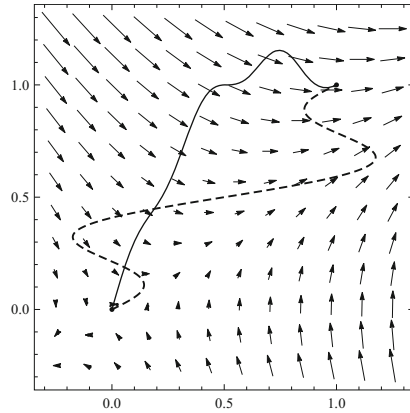
(b) $\partial_j g_i = \partial_i g_j$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. (Integrabilitätsbedingung)

Für die Dimension $n = 3$ ist g genau dann ein Gradientenfeld, wenn $\text{rot}(g) = 0$.

Dass (b) aus (a) folgt, lässt sich leicht einsehen. Ist $g = \text{grad}(f)$, so gilt

$$\partial_j g_i = \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f = \partial_i g_j \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n$$

nach dem Satz von Schwarz. Die andere Implikation ist schwieriger zu beweisen. Der Zusatz folgt direkt aus der Definition der Rotation eines Feldes.



Das Kurvenintegral von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ im Feld \bar{g} ist für jede Kurve gleich $1/2$.

Für obige Felder g und \bar{g} gilt

$$\partial_1 g_2(x, y) = -1, \quad \partial_2 g_1(x, y) = 1, \quad \partial_1 \bar{g}_2 = \partial_2 \bar{g}_1 = 1,$$

sodass die Integrabilitätsbedingung für g verletzt und für \bar{g} erfüllt ist.

Auf eine topologische Voraussetzung wie die Sternförmigkeit kann im Satz nicht verzichtet werden:

Beispiel

Wir definieren das *Windungsfeld* $g: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$g(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2} \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

Für die Kreiskurve $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ gilt dann

$$\int_{\gamma} g(x, y) \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} \langle g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Damit ist g kein Gradientenfeld, da das geschlossene Kurvenintegral sonst null wäre.

Dagegen ist $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \arctan(y/x)$$

eine Stammfunktion von $g|_P$,

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}.$$

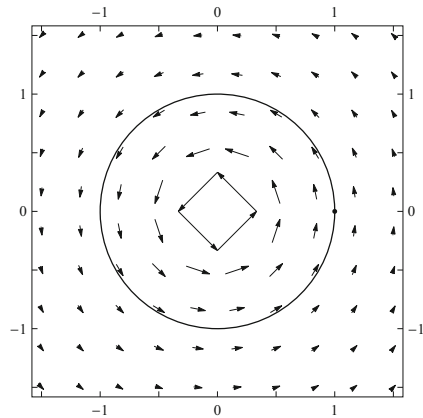
Allgemein lässt sich zeigen, dass für jede geschlossene Kurve γ das Kurvenintegral über g entlang γ das 2π -fache der Anzahl der orientierten

Umläufe der Kurve um den Nullpunkt ist, was die Bezeichnung als Windungsfeld erklärt. Das Feld g lässt sich auch schreiben als $g: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{i}{z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$

Mit $\gamma(t) = e^{it}$ liest sich obiges Kurvenintegral dann als

$$\int_{\gamma} g(z) \cdot dz = \int_0^{2\pi} \langle g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle ie^{it}, ie^{it} \rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$



6. Taylor-Entwicklung und lokale Extremwerte

In diesem Kapitel formulieren und beweisen wir ein mehrdimensionales Analogon zum Satz von Taylor. Ziel ist wieder, eine Funktion durch ein Polynom eines bestimmten vorgegebenen Grades bestmöglichst zu approximieren, wobei nun die Funktion von der Form $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, sodass die Approximationen reellwertige Polynome in n Variablen sind. Dabei sind wir vor allem an Approximationen erster und zweiter Ordnung interessiert. Mit Hilfe der dabei auftauchenden Hesse-Matrizen untersuchen wir lokale Extremwerte von f auf P oder auf einer durch eine Nebenbedingung gegebenen Teilmenge von P . Da sich die Fragestellungen und Ergebnisse für Höhenlandschaften anschaulich motivieren und darstellen lassen, schenken wir der Dimension $n = 2$ wieder besondere Beachtung.

Vorbereitungen

Für eine v -mal differenzierbare Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $P \subseteq \mathbb{R}$ hatten wir das v -te Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt $p \in P$ definiert durch:

$$T_p^v f(x) = \sum_{k \leq v} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x - p)^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir wechseln hier vom Index n zum griechischen v , da wir n weiterhin als Variable für die Dimension des Definitionsbereichs unserer Funktionen verwenden wollen. Unser erstes Ergebnis zur Taylor-Approximation im Eindimensionalen lautete (vgl. 4.4 und 4.5 in Band 1):

Satz (*allgemeiner Approximationssatz, Satz von Peano*)

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ v -mal differenzierbar in $p \in I$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{r_v(x)}{(x - p)^v} = 0.$$

für die Restfunktion $r_v = f - T_p^v f$ auf I . Damit gilt also

$$f(x) = T_p^v f(x) + o((x - p)^v) \quad \text{für } x \rightarrow p.$$

Das Restglied konnten wir unter einer etwas stärkeren Differenzierbarkeitsvoraussetzung in Lagrangescher Form angeben, wodurch sich $o((x - p)^v)$ zu $O((x - p)^{v+1})$ im Approximationssatz verbesserte (vgl. 4.5 in Band 1):

Satz (Satz von Taylor, Lagrange-Restglied)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(v+1)$ -mal stetig differenzierbar.
 Weiter sei $p \in I$. Dann gibt es für alle $x \in I - \{p\}$ ein ξ zwischen p und x mit

$$f(x) = T_p^v f(x) + \frac{f^{(v+1)}(\xi)}{(v+1)!} (x-p)^{v+1}.$$

Folglich gilt

$$f(x) = T_p^v f(x) + O((x-p)^{v+1}) \quad \text{für } x \rightarrow p.$$

Ein Analogon zum Satz von Taylor mit Lagrange-Restglied gilt nun auch für hinreichend gut differenzierbare Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht-leer, mit einer beliebigen Dimension $n \geq 1$. Um die Darstellung kompakt und übersichtlich zu halten, führen wir einige Notationen ein.

Definition (Notationen für n -Tupel natürlicher Zahlen)

Für $n \geq 1$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$(a) \quad \sigma(k) = k_1 + \dots + k_n,$$

$$(b) \quad k! = k_1! \cdot \dots \cdot k_n!,$$

$$(c) \quad x^k = x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}.$$

Ist zum Beispiel $n = 4$ und $k = (1, 0, 2, 0)$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}^4$:

$$x^k = (x_1, \dots, x_4)^{(1, 0, 2, 0)} = x_1^1 \cdot x_2^0 \cdot x_3^2 \cdot x_4^0 = x_1^1 \cdot x_3^2.$$

Speziell gilt

$$\sigma(0) = \sigma(0, \dots, 0) = 0 \quad \text{und} \quad 0! = 0! \cdot \dots \cdot 0! = 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1 \quad \text{für alle } n.$$

Die Tupelnotationen sind auch in der Kombinatorik nützlich. Für alle natürlichen Zahlen n und v und alle $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $\sigma(k) = v$ ist der *Multinomialkoeffizient* „ v über k “ definiert durch

$$\binom{v}{k} = \binom{v}{k_1, \dots, k_n} = \frac{v!}{k!} = \frac{v!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

Die Zahl $\binom{v}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, eine v -elementige Menge M in Mengen M_1, \dots, M_n derart zu zerlegen, dass jede Menge M_i genau k_i Elemente besitzt. Färben wir also v nummerierte Kugeln mit n Farben so, dass jede Farbe i genau k_i mal verwendet wird, so können wir dies auf $\binom{v}{k}$ Weisen tun. So gibt es zum Beispiel

$$\binom{10}{3, 3, 4} = \frac{10!}{3! 3! 4!} = 4200$$

Möglichkeiten, zehn Kinder in eine Igel-, Hasen- und Maulwurfgruppe aufzuteilen, sodass in der Igel- und der Hasengruppe je drei und in der Maulwurfgruppe vier Kinder sind. Die Binomialkoeffizienten entsprechen dem Fall $n = 2$ der Aufteilung in zwei Mengen M_1 und M_2 . In Urnenmodellen kann man diese beiden Mengen als „gezogen“ und „nicht gezogen“ interpretieren.

In ähnlicher Weise können wir auch die k -fache partielle Ableitung einer Funktion für ein n -Tupel $k = (k_1, \dots, k_n)$ natürlicher Zahlen einführen:

Definition (*partielle Ableitung für n -Tupel*)

Sei $n \geq 1$, und sei $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. Weiter sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $\sigma(k)$ -mal stetig differenzierbar. Dann setzen wir:

$$f^{(k)} = \partial^k f = \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f = \frac{\partial^{\sigma(k)}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} f.$$

Die Ableitung $f^{(k)}$ ist wie f eine Funktion von P nach \mathbb{R} . Der Zahlenvektor k gibt die Anzahl der partiellen Ableitungen für jede Koordinate an, die wir durchzuführen haben. Aufgrund des Satzes von Schwarz können wir die partiellen Ableitungen in einer beliebigen Reihenfolge abarbeiten. So gilt zum Beispiel für $n = 3$ und $\sigma(k) = 4$:

$$f^{(2,1,1)}(p) = \partial_{1,1,2,3} f(p) = \partial_{2,3,1,1} f(p).$$

Mehrdimensionale Taylor-Polynome

Mit unseren neuen Notationen können wir nun Taylor-Polynome für Funktionen mit n -dimensionalen Definitionsbereichen definieren. Die alte Definition kann fast wörtlich übernommen werden.

Definition (*mehrdimensionale Taylor-Polynome*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, v -mal stetig differenzierbar. Weiter sei $p \in P$.

Dann definieren wir das *Taylor-Polynom v -ter Ordnung* von f im *Entwicklungspunkt* p durch:

$$T_p^v f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n, \sigma(k) \leq v} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x - p)^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Taylor-Polynome von f sind unabhängig von P immer auf dem ganzen Raum \mathbb{R}^n definiert. Die Summe $\sum_{k \in \mathbb{N}^n, \sigma(k) \leq v}$ schreiben wir im Folgenden kurz als $\sum_{\sigma(k) \leq v}$. Dabei ist die Ordnung v fest.

Bevor wir den Satz von Taylor formulieren, wollen wir die Taylor-Polynome der Ordnungen 0, 1 und 2 etwas genauer betrachten, um ein Gefühl für die Struktur dieser Polynome zu entwickeln.

Das Taylor-Polynom nullter Ordnung

Für $v = 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$T_p^0 f(x) = \sum_{\sigma(k) \leq 0} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k = \frac{f^{(0)}(p)}{0!} (x-p)^0 = f(p),$$

wobei hier $0 = (0, \dots, 0)$ der Nullvektor des \mathbb{R}^n ist. Damit ist also wie gewohnt das Taylor-Polynom 0-ter Ordnung die Auswertung der Funktion im Entwicklungspunkt.

Das Taylor-Polynom erster Ordnung

Für $v = 1$ durchläuft k in der Summe $\sum_{\sigma(k) \leq 1}$ den Nullvektor und die kanonischen Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des \mathbb{R}^n . Damit gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} T_p^1 f(x) &= T_p^0 f(x) + \sum_{\sigma(k)=1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k = \\ &= f(p) + \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{f^{(e_j)}(p)}{e_j!} (x-p)^{e_j} = \\ &= f(p) + \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial_j f(p)}{1} (x-p)_j = \\ &= f(p) + \langle \text{grad}(f)(p), x-p \rangle. \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist das Ergebnis der Multiplikation der Jacobi-Matrix $J_f(p)$ von f im Punkt p mit dem Spaltenvektor $x-p$. Das Taylor-Polynom erster Ordnung ist also wie gewohnt die Linearisierung der Funktion im Punkt p . Der Leser vergleiche das Ergebnis noch einmal mit dem eindimensionalen Fall:

$$T_p^1 f(x) = f(p) + f'(p)(x-p).$$

Das Taylor-Polynom zweiter Ordnung

Für $v = 2$ ist das Taylor-Polynom nun schon wesentlich komplexer. In der Summe $\sum_{\sigma(k) \leq 2}$ durchläuft k nun zusätzlich alle Summen $e_i + e_j$ kanonischer Basisvektoren, also die Vektoren

$$(i) \quad 2e_1 = (2, 0, \dots, 0), \quad 2e_2 = (0, 2, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad 2e_n = (0, \dots, 0, 2),$$

$$(ii) \quad e_i + e_j \quad \text{für alle } 1 \leq i < j \leq n.$$

Die Vektoren des Typs (ii) haben genau zwei 1-Einträge. Es gilt:

$$f^{(e_i + e_j)} = \partial_{i,j} f = f^{(e_j + e_i)} \quad \text{für alle } i, j,$$

$$(x-p)^{e_i + e_j} = (x-p)_i (x-p)_j \quad \text{für alle } i, j,$$

$$(2e_j)! = 2 \quad \text{für alle } j,$$

$$(e_i + e_j)! = 1 \quad \text{für alle } i \neq j.$$

Damit berechnet sich das Taylor-Polynom zweiter Ordnung zu

$$\begin{aligned} T_p^2 f(x) &= T_p^1 f(x) + \sum_{\sigma(k)=2} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k = \\ T_p^1 f(x) &+ \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial_j^2 f(p)}{2} (x-p)_j^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \partial_{i,j} f(p) (x-p)_i (x-p)_j = \\ f(p) &+ \langle \text{grad}(f)(p), x-p \rangle + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_{i,j} f(p) (x-p)_i (x-p)_j. \end{aligned}$$

In der letzten Form wird für $i \neq j$ sowohl die Ableitung $\partial_i \partial_j f(p)$ als auch die Ableitung $\partial_j \partial_i f(p)$ betrachtet, was aber durch den Faktor $1/2$ und die Vertauschbarkeit $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ wieder ausgeglichen wird.

Auch hier zum Vergleich noch einmal die eindimensionale Version:

$$T_p^2 f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{1}{2} f''(p)(x-p)^2.$$

Der Beitrag der „zweiten Ableitung“ zum Taylor-Polynom ist im mehrdimensionalen Fall wesentlich komplizierter. Wir können diesen Beitrag sympathischer und übersichtlicher notieren, wenn wir die Brille der linearen Algebra aufsetzen und beobachten, dass der dritte Summand des Taylor-Polynoms zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{1}{2} \langle x-p, H(x-p) \rangle$$

ist mit der aus allen Ableitungen $\partial_{i,j} f(p)$ gebildeten $(n \times n)$ -Matrix H :

Definition (*Hesse-Matrix*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und sei $p \in P$. Dann ist die *Hesse-Matrix* $H_f(p)$ von f im Punkt p definiert durch

$$H_f(p) = (\partial_i \partial_j f(p))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Aufgrund des Satzes von Schwarz ist die Hesse-Matrix symmetrisch:

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}f(p) & \partial_{1,2}f(p) & \dots & \partial_{1,n}f(p) \\ \partial_{1,2}f(p) & \partial_{2,2}f(p) & \dots & \partial_{2,n}f(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_{1,n}f(p) & \partial_{2,n}f(p) & \dots & \partial_{n,n}f(p) \end{pmatrix}.$$

In der Hauptdiagonalen sehen wir den Laplace-Operator:

$$\Delta f(p) = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j^2 f(p) \text{ ist die Spur der Hesse-Matrix von } f.$$

Da die Spur einer $(n \times n)$ -Matrix A die Summe ihrer Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ist und eine symmetrische Matrix nur reelle Eigenwerte besitzt, folgt: $\Delta f(p)$ ist die Summe der reellen Eigenwerte der Hesse-Matrix von f im Punkt p . Auf die Eigenwerte der Hesse-Matrix kommen wir bei der Diskussion lokaler Extremwerte noch zurück.

Schmiegequadriken

Ist eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt also

$$T_p^2 f(x) = f(p) + \langle \text{grad}(f)(p), x - p \rangle + \frac{1}{2} \langle x - p, H_f(p) (x - p) \rangle.$$

(Taylor-Polynom zweiter Ordnung)

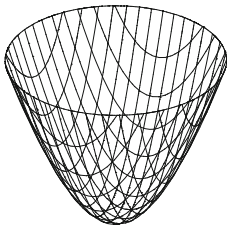
Der Graph des Taylor-Polynoms $T_p^2 f$ ist in der Sprache der analytischen Geometrie eine *Quadrik* im \mathbb{R}^{n+1} , die sog. *Schmiegequadrik* an f im Punkt $(p, f(p))$. Für $n = 1$ ist eine Schmiegequadrik eine Schmiegeparabel und durch $f'(p)$ und $f''(p)$ bestimmt. Für $n = 2$ müssen die fünf partiellen Ableitungen $\partial_1 f(p)$, $\partial_2 f(p)$, $\partial_1^2 f(p)$, $\partial_2^2 f(p)$ und $\partial_1 \partial_2 f(p)$ berechnet werden, aber die Situation bleibt dennoch übersichtlich. Ein Klassifikationssatz der analytischen Geometrie besagt nämlich, dass die Schmiegequadrik an f für $n = 2$ und $H_f(p) \neq 0$ im Punkt $(p, f(p))$ bis auf eine affine Transformation von einem der drei folgenden Typen ist:

$$\textit{elliptisches Paraboloid} \quad z = ax^2 + by^2, \text{ mit } ab > 0,$$

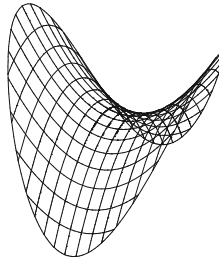
$$\textit{hyperbolisches Paraboloid} \quad z = ax^2 + by^2, \text{ mit } ab < 0,$$

$$\textit{parabolischer Zylinder} \quad z = ax^2 + by^2, \text{ mit } ab = 0.$$

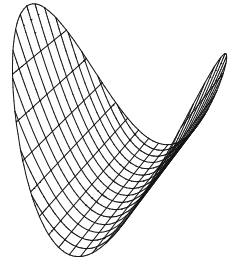
Elliptische Paraboloiden sehen aus wie Eierbecher, hyperbolische Paraboloiden wie Sattelflächen, parabolische Zylinder wie gebogene Papierblätter oder Dachrinnen.



elliptisches Paraboloid

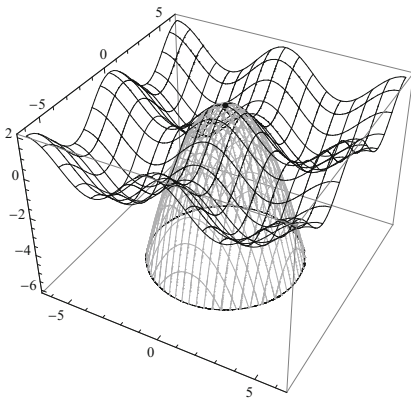


hyperbolisches Paraboloid

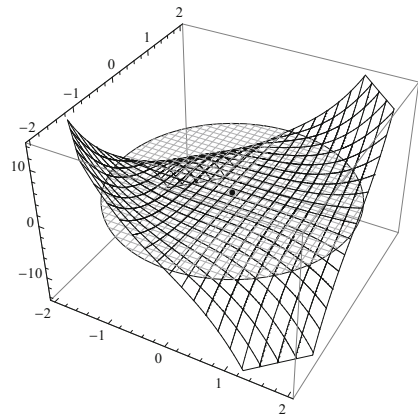


parabolischer Zylinder

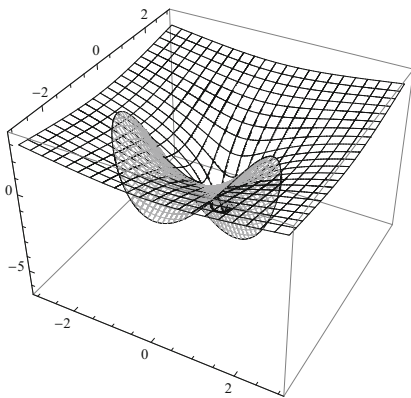
Die folgenden Diagramme zeigen Schmiegequadriken für einige f und p .



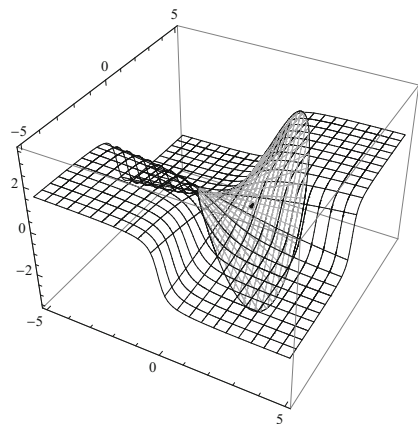
$$f(x, y) = \cos(x) + \cos(y), \quad p = (0, 0)$$



$$f(x, y) = x^3 y + x y^3, \quad p = (0, 0)$$



$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2), \quad p = (0, -1)$$



$$f(x, y) = \arctan(xy), \quad p = (1, 0)$$

Eine alternative Darstellung der Taylor-Polynome

Unsere Berechnung des Taylor-Polynoms zweiter Ordnung lieferte die Darstellung

$$(\ast) \quad f(p) + \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j f(p) (x - p)_j + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_{i,j} f(p) (x - p)_i (x - p)_j,$$

in der gleiche Summanden nicht zusammengefasst werden. Durch eine kombinatorische Umformung lässt sich ein Taylor-Polynom

$$T_p^v f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n, \sigma(k) \leq v} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x - p)^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

einer beliebigen Ordnung v als Summe der Form (\ast) schreiben:

Satz (*lange Darstellung der Taylor-Polynome*)

Für alle v -mal stetig differenzierbaren $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ und $p \in P$ gilt:

$$T_p^v f(x) = \sum_{\mu \leq v} \frac{1}{\mu!} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_\mu \leq n} \partial_{j_\mu, \dots, j_1} f(p) (x - p)_{j_1} \dots (x - p)_{j_\mu},$$

wobei die zweite Summe rechts für $\mu = 0$ als $f(p)$ erklärt wird.

Beweis

Für $\mu \leq v$ und $(j_1, \dots, j_\mu) \in \{1, \dots, n\}^\mu$ sei $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ definiert durch

$k_1 =$ „die Anzahl der $\lambda \in \{1, \dots, \mu\}$ mit $j_\lambda = 1$ “,

...

$k_n =$ „die Anzahl der $\lambda \in \{1, \dots, \mu\}$ mit $j_\lambda = n$ “.

Dann gilt $\sigma(k) = \mu$ und

$$\partial_{j_\mu, \dots, j_1} f(p) (x - p)_{j_1} \dots (x - p)_{j_\mu} = f^{(k)}(p) (x - p)^k.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}^n$ mit $\sigma(k) = \mu$ gibt es genau $\binom{\mu}{k}$ -viele (j_1, \dots, j_μ) , die k in dieser Weise definieren. Damit gilt

$$\sum_{\mu \leq v} \frac{1}{\mu!} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_\mu \leq n} \partial_{j_\mu, \dots, j_1} f(p) (x - p)_{j_1} \dots (x - p)_{j_\mu} =$$

$$\sum_{\mu \leq v} \frac{1}{\mu!} \sum_{\sigma(k) = \mu} \binom{\mu}{k} f^{(k)}(p) (x - p)^k =$$

$$\sum_{\sigma(k) \leq v} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x - p)^k = T_p^v f(x).$$

Der Satz von Taylor

Wie im eindimensionalen Fall sind die Taylor-Polynome von f in kleinen Umgebungen des Entwicklungspunktes gute polynomielle Approximationen an f . Der Satz von Taylor und der polynomielle Approximationssatz können fast wörtlich übernommen werden. Wir sagen wieder, dass ein Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$ zwischen zwei Punkten $x, p \in \mathbb{R}^n$ liegt, wenn $\xi \in \overline{xp}$ und $\xi \neq x, p$. Dabei sei wieder

$$\overline{xp} = \{x + t(p - x) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Satz (*Satz von Taylor und polynomieller Approximationssatz im \mathbb{R}^n*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $(v+1)$ -mal stetig differenzierbar, und sei $p \in P$. Ist dann $x \in P - \{p\}$ mit $\overline{xp} \subseteq P$, so existiert ein ξ zwischen p und x mit

$$f(x) = T_p^v f(x) + \sum_{\sigma(k)=v+1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x-p)^k.$$

Damit gilt für v -mal stetig differenzierbare $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ und $p \in P$:

$$f(x) = T_p^v f(x) + o(\|x-p\|^v) \quad \text{für } x \rightarrow p,$$

d.h., es gibt eine Funktion $r: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = T_p^v f(x) + r(x) \quad \text{für alle } x \in P,$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{\|x-p\|^v} = 0.$$

Beweis

Sei $g: [0, 1] \rightarrow P$ mit

$$g(t) = p + t(x-p) \quad \text{für alle } t \in [0, 1],$$

und sei $h = f \circ g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Induktion nach $\mu \leq v+1$ unter Anwendung der Kettenregel zeigt, dass für alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$(+)\quad h^{(\mu)}(t) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_\mu \leq n} \partial_{j_\mu, \dots, j_1} f(g(t)) (x-p)_{j_1} \dots (x-p)_{j_\mu}.$$

Wie für die Taylor-Polynome ist dies gleichwertig zu:

$$(++)\quad h^{(\mu)}(t) = \sum_{\sigma(k)=\mu} \binom{\mu}{k} f^{(k)}(g(t)) (x-p)^k.$$

Der alte Satz von Taylor für h und den Entwicklungspunkt 0 liefert ein $t^* \in]0, 1[$, sodass für $\xi = g(t^*)$ gilt:

$$f(x) = h(1) = T_0^v h(x) + \frac{h^{(v+1)}(t^*)}{(v+1)!} (1-0)^{v+1} =$$

$$\sum_{\mu \leq v} \frac{h^{(\mu)}(0)}{\mu!} + \frac{h^{(v+1)}(t^*)}{(v+1)!} =$$

$$\sum_{\mu \leq v} \sum_{\sigma(k)=\mu} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k + \sum_{\sigma(k)=v+1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x-p)^k =$$

$$T_p^v f(x) + \sum_{\sigma(k)=v+1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x-p)^k.$$

– Die Aussage über das Restglied ergibt sich wie früher.

Formuliert „aus der Sicht“ des Entwicklungspunktes p gilt:

$$f(p+x) = T_p^v f(p+x) + o(\|x\|^v) = \sum_{\sigma(k) \leq v} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} x^k + o(\|x\|^v).$$

In Anwendungen genügt oft eine Approximation erster oder zweiter Ordnung. Die obige Analyse der ersten Taylor-Polynome liefert:

Satz (*Taylor-Approximation zweiter Ordnung*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und sei $p \in P$. Dann gilt

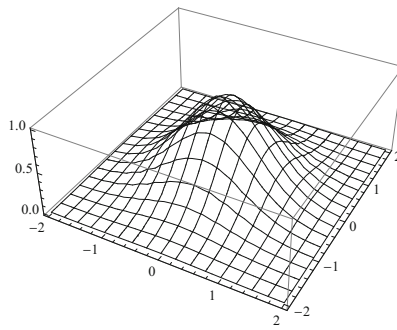
$$f(x) = f(p) + \langle \text{grad}(f)(p), x-p \rangle + \frac{1}{2} \langle x-p, H_f(p)(x-p) \rangle + o(\|x-p\|^2),$$

$$f(p+x) = f(p) + \langle \text{grad}(f)(p), x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, H_f(p)x \rangle + o(\|x\|^2),$$

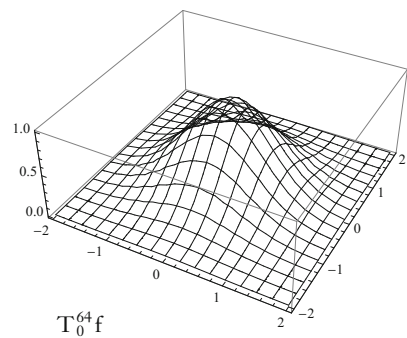
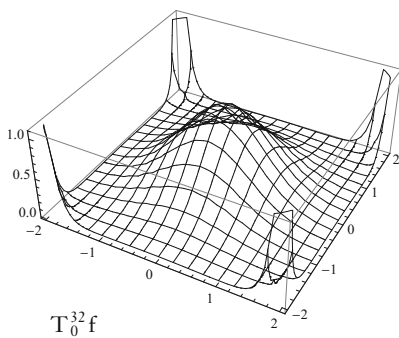
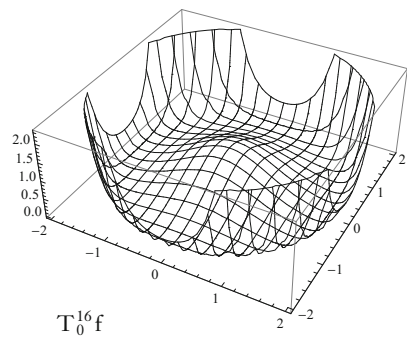
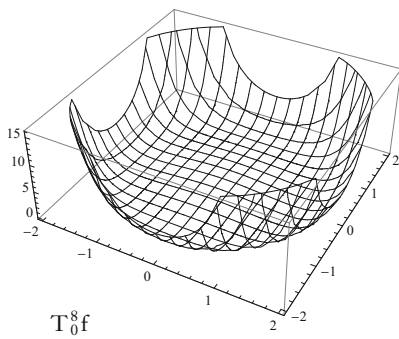
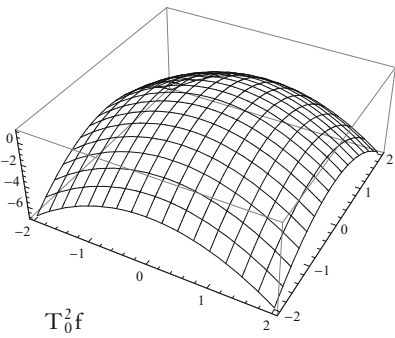
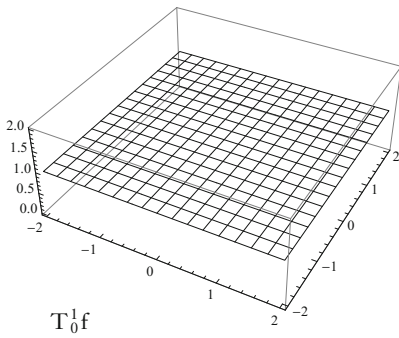
für alle $x \in P$ mit $\overline{xp} \subseteq P$ bzw. alle $x \in U_\varepsilon(p)$ mit ε hinreichend klein.

Ist die durch die Gradientenbildung definierte Tangentialebene von f im Punkt $(p, f(p))$ also zu ungenau, so stellt die Schmiegequadrik die nächste Stufe der lokalen Approximation von f dar. Im Fall $n=2$ und $H_f(p) \neq 0$ wird die Höhenlandschaft f im Punkt p dann sehr anschaulich durch ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid oder einen hyperbolischen Zylinder ersetzt. Ist $H_f(p) = 0$, so liefert die Approximation zweiter Ordnung keinen Fortschritt gegenüber der linearen Approximation. In diesem Fall (oder wenn die Approximation zweiter Ordnung immer noch nicht gut genug ist), geht man zur Approximation dritter Ordnung über usw. Erinnert sei hier noch einmal an das $\exp(-1/x^2)$ -Beispiel für die Dimension $n=1$: Die Taylor-Entwicklung kann nur polynomielle Anteile einer Funktion extrahieren.

Die folgenden Diagramme illustrieren die zweidimensionale Taylor-Entwicklung anhand einer Glockenfunktion.



$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$



Lokale Extremwerte

Auch für mehrdimensionale Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, lässt sich eine Kurvendiskussion betreiben. Eine Hauptaufgabe ist dabei wieder das Auffinden lokaler Extremwerte. Die entsprechenden Begriffe werden wir im eindimensionalen Fall definiert.

Da $\text{grad}(f)(p)$ in die Richtung des stärksten Anstiegs und $-\text{grad}(f)(p)$ in die Richtung des stärksten Abfalls zeigt, gilt:

Satz (*notwendige Bedingung für lokale Extrema*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, und sei $p \in P$ eine lokale Extremalstelle von f . Dann gilt $\text{grad}(f)(p) = 0$.

Beweis

Ist $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, so besitzt $h_w:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_w(t) = f(p + tw)$ eine lokale Extremalstelle im Punkt 0, wobei ε hinreichend klein gewählt wird. Also gilt nach dem notwendigen eindimensionalen Kriterium

$$0 = h'_w(0) = \langle \text{grad}(f)(p), w \rangle \quad \text{für alle } w \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|w\| = 1,$$

– und hieraus folgt $\text{grad}(f)(p) = 0$.

Der Satz verallgemeinert die notwendige Bedingung „ $f'(p) = 0$ “ (kritischer Punkt), die bereits im Eindimensionalen nicht hinreichend ist. Die Hesse-Matrix liefert, wie die zweite Ableitung für $n = 1$, ein hinreichendes Kriterium. Von Bedeutung sind hier die folgenden Begriffsbildungen der Linearen Algebra:

Definition (*Definitheit einer Matrix*)

Eine reelle $(n \times n)$ -Matrix A heißt

- (a) *positiv definit*, falls $\langle x, Ax \rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$,
positiv semidefinit, falls $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$,
- (b) *negativ (semi-)definit*, falls $-A$ positiv (semi-)definit ist,
- (c) *indefinit*, falls es $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\langle x, Ax \rangle > 0$ und $\langle y, Ay \rangle < 0$.

Ist $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, so nimmt die stetige Funktion $\langle \cdot, A \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wegen der Kompaktheit von S^{n-1} ihr Minimum c und ihr Maximum d auf S^{n-1} an. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt dann, mit $x_N = x/\|x\|$ für $x \neq 0$ und $0_N = 0$:

$$\langle x, Ax \rangle = \|x\|^2 \langle x_N, Ax_N \rangle \geq c \|x\|^2 \quad \text{und analog}$$

$$\langle x, Ax \rangle \leq d \|x\|^2.$$

Folglich gelten die Entsprechungen:

A positiv definit : $c > 0$,A positiv semidefinit : $c \geq 0$,A negativ definit : $d < 0$,A negativ semidefinit : $d \leq 0$,A indefinit : $c < 0$ und $d > 0$.

Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung können wir nun den folgenden ansprechenden Satz beweisen:

Satz (*hinreichende Bedingung für lokale Extrema, Definitheit der Hesse-Matrix*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und sei $p \in P$ mit $\text{grad}(f)(p) = 0$.

Dann gilt:

- (a) Ist $H_f(p)$ positiv definit, so ist p eine strikte lokale Minimalstelle.
- (b) Ist $H_f(p)$ negativ definit, so ist p eine strikte lokale Maximalstelle.
- (c) Ist $H_f(p)$ indefinit, so ist p keine lokale Extremalstelle.

Beweis

Durch Übergang zu $f(x+p) - f(p)$ können wir $p = 0$ und $f(0) = 0$ annehmen (zur Vereinfachung der Notation). Dann gilt für $A = H_f(0)$:

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + r(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{\|x\|^2} = 0.$$

Seien $c, d \in \mathbb{R}$ wie oben, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle x, Ax \rangle \geq c \|x\|^2, \quad \langle x, Ax \rangle \leq d \|x\|^2.$$

Sei nun $\delta > 0$, sodass für alle x mit $\|x\| < \delta$, $x \neq 0$, gilt:

$$|r(x)| < \frac{\min(|c|, |d|)}{2} \|x\|^2.$$

Dann gilt für alle $x \neq 0$ mit $\|x\| < \delta$:

$$f(x) \geq \frac{c}{2} \|x\|^2 + r(x) > 0, \quad \text{falls } c > 0, \text{ d.h. A positiv definit,}$$

$$f(x) \leq \frac{d}{2} \|x\|^2 + r(x) < 0, \quad \text{falls } d < 0, \text{ d.h. A negativ definit.}$$

Dies zeigt (a) und (b). Für (c) seien $x_c, x_d \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_c\| = \|x_d\| = 1$ und $\langle x_c, Ax_c \rangle = c < 0$ und $\langle x_d, Ax_d \rangle = d > 0$. Dann gilt für alle $t \in]0, \delta[$

$$f(tx_c) = \frac{t^2 c}{2} + r(tx_c) < 0, \quad f(tx_d) = \frac{t^2 d}{2} + r(tx_d) > 0.$$

— Also ist 0 keine lokale Extremalstelle von f .

Dem eindimensionalen Krümmungsverhalten „ $f''(p) > 0$ “ und „ $f''(p) < 0$ “ entspricht im Mehrdimensionalen also die positive bzw. negative Definitheit der Hesse-Matrix von f im Punkt p . Die Aussage (c) des Satzes hat im Eindimensionalen kein Analogon.

Ist die Hesse-Matrix in einem Punkt p nur semidefinit, so ist keine allgemeine Aussage möglich. Im Eindimensionalen entspricht dies dem Fall „ $f''(p) = 0$ “. Die dritte und vierte Potenz zeigen, dass in diesem Fall p dann eine lokale Extremalstelle sein kann oder auch nicht. Mehrdimensionale Beispiele besprechen wir in den Übungen.

Wir diskutieren noch einige Kriterien, die nützlich sind, die Definitheit einer Matrix zu bestimmen. Da eine Hesse-Matrix symmetrisch ist, besitzt sie reelle Eigenwerte. (Allgemein entspricht die Definitheit einer reellen Matrix A der Definitheit der symmetrischen Matrix $A + A^t$, sodass man sich prinzipiell auf symmetrische Matrizen beschränken kann.) Es gilt:

Satz (Eigenwertkriterium)

Sei A eine symmetrische reelle $(n \times n)$ -Matrix, und seien $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von A . Dann gilt:

A ist positiv definit	<i>genau dann, wenn</i>	$\lambda_1 > 0$,
A ist positiv semidefinit	<i>genau dann, wenn</i>	$\lambda_1 \geq 0$,
A ist negativ definit	<i>genau dann, wenn</i>	$\lambda_n < 0$,
A ist negativ semidefinit	<i>genau dann, wenn</i>	$\lambda_n \leq 0$,
A ist indefinit	<i>genau dann, wenn</i>	$\lambda_1 < 0$ und $\lambda_n > 0$.

Beweis

Sei (b_1, \dots, b_n) eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n mit $Ab_k = \lambda_k b_k$ für alle k . Dann gilt für alle $x = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k b_k$, dass

$$\langle x, Ax \rangle = \sum_{1 \leq k, j \leq n} \alpha_j \alpha_k \lambda_k \langle b_j, b_k \rangle = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k^2 \lambda_k.$$

— Hieraus liest man Äquivalenzen ab.

Damit ist die Diagonalisierung der Hesse-Matrix eine Möglichkeit, ihre Definitheit zu bestimmen. Nützlich ist daneben oft auch der folgende Satz, den wir ohne Beweis angeben:

Satz (Determinantenkriterium)

Sei A eine symmetrische reelle $(n \times n)$ -Matrix. Dann sind äquivalent:

- A ist positiv definit.
- Für alle $1 \leq k \leq n$ ist der k -te Hauptminor von A positiv, d. h., die Determinante der quadratischen Untermatrix $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ von A ist positiv.

Ist also $a_{11} < 0$, so ist A nicht positiv definit, und ist $a_{11} > 0$, so ist A nicht negativ definit. Wegen $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ folgt aus dem Kriterium, dass A genau dann negativ definit ist, wenn die Hauptminoren $\det(A_1), \dots, \det(A_n)$ abwechselnd negativ und positiv sind.

Ein analoges Kriterium für Semidefinitheit gilt im Allgemeinen nicht.

Beispiele

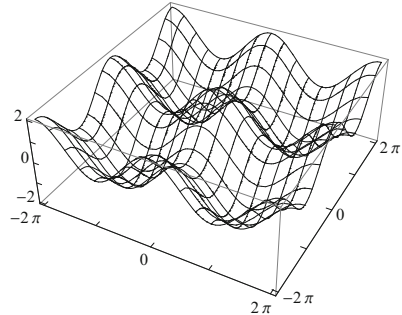
- (1) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Für alle $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\text{grad}(f)(p) = (-\sin(x), -\sin(y)),$$

$$H_f(p) = - \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen des Gradienten sind genau die Punkte

$$p_{a,b} = (a\pi, b\pi) \text{ für } a, b \in \mathbb{Z}.$$



Mit Hilfe der Hesse-Matrix können wir die Extremalstellen aus diesen Kandidaten aussondern: Sind a und b beide gerade, so ist $H_f(p) = -E$ negativ definit und damit $p_{a,b}$ eine strikte lokale Maximalstelle von f . Sind a und b beide ungerade, so ist $H_f(p) = E$ positiv definit und damit $p_{a,b}$ eine strikte lokale Minimalstelle von f . Haben a und b verschiedene Parität, so ist $H_f(p)$ indefinit und damit $p_{a,b}$ keine lokale Extremalstelle von f .

- (2) Allgemeiner gilt: Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von der additiven Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) + \dots + g_n(x_n)$$

mit Funktionen $g_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so ist die Hesse-Matrix $H_f(p)$ für alle p eine aus den zweiten Ableitungen der Funktionen g_j gebildete Diagonalmatrix. Ein Punkt p mit $g_j'(p) = 0$ für alle j ist eine lokale Maximalstelle, wenn alle g_j konkav in p sind. Analoges gilt für Minimalstellen mit konvex statt konkav. Ist in $H_f(p)$ ein Diagonaleintrag gleich 0, so ist keine allgemeine Aussage möglich.

- (3) Die Hesse-Matrix ist nicht immer die beste Wahl, um lokale Extremalstellen zu ermitteln. Ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \arctan(xy)$, so gilt $\text{grad}(f)(p) = 0$ nur für $p = 0$. Der Hesse-Matrix-Weg ist nun aber mühsamer als ein „eindimensionales“ Argument: Seien $g_1, g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_1(x) = f(x, x) = \arctan(x^2)$ und $g_2(x) = f(x, -x) = \arctan(-x^2)$. Man rechnet nach, dass $g_1''(0) = 2$, sodass g_1 in 0 ein striktes lokales Minimum besitzt. Dann hat aber $g_2 = -g_1$ in 0 ein lokales Maximum, sodass 0 keine lokale Extremalstelle von f sein kann.

Bedingte Extremalstellen und Lagrange-Multiplikatoren

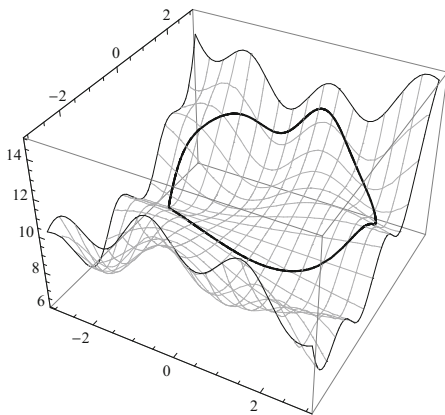
Wir untersuchen nun lokale Extremalstellen einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, die einer bestimmten Nebenbedingung genügen. Gegeben ist zusätzlich zu f eine Funktion $g: P \rightarrow \mathbb{R}$. Für ein festes $c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Niveaumenge

$$N = \text{niv}_g(c) = \{x \in P \mid g(x) = c\}.$$

Die Frage lautet:

In welchen Punkten $p \in N$ besitzt die Funktion $f|N: N \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Maximum oder Minimum?

Eine lokale Minimalstelle von $f|N$ ist zum Beispiel ein Punkt $p \in N$ derart, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $f(x) \geq f(p)$ für alle $x \in U_\varepsilon(p) \cap N$.



Das Diagramm zeigt eine Höhenlandschaft f und eine dickere Linie, die das f -Bild einer Höhenlinie N einer (nicht dargestellten) zweiten Funktion g ist. Anschaulich fragen wir nach den lokalen Extremwerten der Wanderung entlang des Pfades $f[N]$.

Für die Dimension $n = 2$, auf die wir uns hier konzentrieren wollen, lässt sich die Frage weiter motivieren. In einem meteorologischen Kontur-Plot kann zum Beispiel die Funktion g die Höhe über dem Meeresspiegel angeben und die Funktion f die aktuelle Temperatur. Wir betrachten nun eine bestimmte Höhe c und fragen, an welchen Punkten der Höhe c die aktuelle Temperatur lokal minimal oder maximal ist.

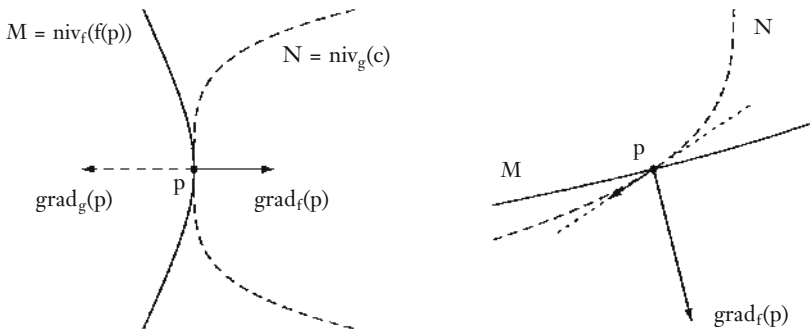
Manchmal ist ein eindimensionaler Ansatz zur Beantwortung der Frage möglich. Ist die Höhenlinie N ein „deformierter Kreis“ und $h: [0, 2\pi] \rightarrow N$ eine geschlossene, differenzierbare und auf $[0, 2\pi[$ bijektive Kurve, so sind, mit Ausnahme der Randpunkte 0 und 2π , die evtl. gesondert untersucht werden müssen, die lokalen Extremalstellen von $f|N$ genau die h -Bilder der lokalen Extremalstellen der reellen Funktion $f \circ h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Ist zum Beispiel $t \in]0, 2\pi[$ ein striktes lokales Maximum von $f \circ h$, so ist $h(t) \in N$ ein striktes lokales Maximum von $f|N$. Für die Bestimmung der lokalen Extremalstellen von $f \circ h$ können wir die bekannten eindimensionalen Methoden einsetzen.

Eine einfache Parametrisierung von N steht aber nicht immer zur Verfügung und wir brauchen dann andere Methoden, um die Frage zu beantworten. Nach unseren bisherigen Erfahrungen mit notwendigen Bedingungen für lokale Extrema ist zu vermuten, dass die Gradienten von f und g eine wichtige Rolle spielen. Eine geometrische Überlegung bringt ans Licht:

Notwendige Bedingung: Berühren der Höhenlinien

Sei $p \in N$ mit $\text{grad}(f)(p), \text{grad}(g)(p) \neq 0$. Steht der Gradient von f in p nicht senkrecht auf der Höhenlinie N , so steigt f an, wenn wir uns von p in Richtung der Projektion des Gradienten auf N bewegen. Da $\text{grad}(g)(p)$ senkrecht auf N steht, müssen die Vektoren $\text{grad}(f)(p)$ und $\text{grad}(g)(p)$ in lokalen Extremalstellen auf einer Geraden liegen. Anders formuliert:

Kreuzen sich in p die Höhenlinie $N = \text{niv}_g(c) = \text{niv}_g(g(p))$ von g und die Höhenlinie $M = \text{niv}_f(f(p))$ von f , so ist p keine lokale Maximalstelle von $f|N$. Für solche Maximalstellen ist es notwendig, dass sich die Höhenlinien N und M im Punkt p berühren.



Im Diagramm links berühren sich die Höhenlinien N und M in p , sodass p ein Kandidat für eine lokale Extremalstelle von $f|N$ ist. Im rechten Diagramm kreuzen sich dagegen die beiden Höhenlinien in p . Der Gradient von f hat dort eine nichtverschwindende Projektion auf die Tangente von N in p . Bewegen wir uns von p ausgehend auf N in Richtung bzw. Gegenrichtung zu dieser Projektion, so nimmt f zu bzw. ab. Damit kann p keine lokale Extremalstelle von $f|N$ sein.

Dass diese Überlegung korrekt ist, zeigt der folgende Satz:

Satz (Multiplikatorregel von Lagrange, Spezialfall)

Seien $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^2$, stetig differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$, $N = \text{niv}_g(c)$ und $p \in N$ derart, dass $\text{grad}(g)(p) \neq 0$ und $f|N$ eine lokale Extremalstelle in p besitzt. Es gebe eine stetig differenzierbare Kurve $h :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow N$ mit

$$h(0) = p \quad \text{und} \quad h'(0) \neq 0.$$

Dann existiert ein λ mit $\text{grad}(f)(p) + \lambda \text{grad}(g)(p) = 0$.

Beweis

Die reelle Funktion $f \circ h$ hat eine lokale Extremalstelle im Punkt 0, also gilt $(f \circ h)'(0) = 0$ nach dem notwendigen eindimensionalen Kriterium. Nach der Kettenregel gilt damit

$$0 = (f \circ h)'(0) = J_f(p) h'(0) = \langle \text{grad}(f)(p), h'(0) \rangle.$$

Die reelle Funktion $g \circ h$ ist konstant gleich c und damit gilt auch

$$0 = (g \circ h)'(0) = J_g(p) h'(0) = \langle \text{grad}(g)(p), h'(0) \rangle.$$

Damit stehen sowohl $\text{grad}(f)(p)$ als auch $\text{grad}(g)(p) \neq 0$ senkrecht auf $h'(0) \neq 0$, sodass $\text{grad}(f)(p)$ ein skalares Vielfaches von $\text{grad}(g)(p)$ ist.

Ein λ wie im Satz heißt auch ein *Lagrange-Multiplikator* für f und g im Punkt p . Wir werden das Resultat gleich noch verbessern und verallgemeinern. Speziell werden wir zeigen, dass h unter den übrigen Voraussetzungen immer existiert. Zunächst wollen wir das Ergebnis noch einmal in anderer Form aufschreiben.

Korollar (*Multiplikatoransatz*)

Seien f, g, N, p wie oben. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $h_\lambda : P \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$h_\lambda(x) = f(x) + \lambda g(x) \quad \text{für alle } x \in P.$$

Dann gibt es ein λ mit $\text{grad}(h_\lambda)(p) = 0$ und $g(p) = c$.

Beweis

– Dies folgt aus dem Satz wegen $\text{grad}(h_\lambda) = \text{grad}(f) + \lambda \text{grad}(g)$.

In der Praxis bedeutet dies: Kandidaten für bedingte Extremalstellen können durch Einführung einer Variablen λ und Lösen des Gleichungssystems

$$\text{grad}(f + \lambda g)(x) = 0, \quad g(x) = c$$

gefunden werden.

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = xy$. Weiter sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \|(x, y)\|^2$. Wir suchen die lokalen Extremalstellen von f auf der Kreislinie $S^1 = \text{niv}_g(1)$. Es gilt

$$\text{grad}(f)(x, y) = (y, x), \quad \text{grad}(g)(x, y) = 2(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Damit ist für eine lokale Extremalstelle (x, y) von $f|S^1$ notwendig, dass ein λ existiert mit

$$\text{grad}(f + \lambda g)(x, y) = (y, x) + 2\lambda(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

d.h., es muss gelten

$$(+)\quad y + 2\lambda x = 0, \quad x + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Dieses Gleichungssystem hat mit $w = 1/\sqrt{2}$ die vier Lösungen

$$(w, w, -1/2), \quad (-w, w, 1/2), \quad (-w, -w, -1/2), \quad (w, -w, 1/2).$$

Damit sind also höchstens die vier Punkte

$$p_1 = (w, w), \quad p_2 = (w, -w), \quad p_3 = (-w, w), \quad p_4 = (-w, -w)$$

lokale Extremalstellen von $f|S^1$. Diese Kandidaten liefert auch der alternative Ansatz, die Kreislinie durch $e^{it} = (\cos(t), \sin(t))$ zu parametrisieren. Zu lösen ist hier die Gleichung

$$(\cos(t) \sin(t))' = 0, \quad \text{also} \quad \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t) = 0.$$

Diese Gleichung wird im Intervall $[0, 2\pi[$ genau durch

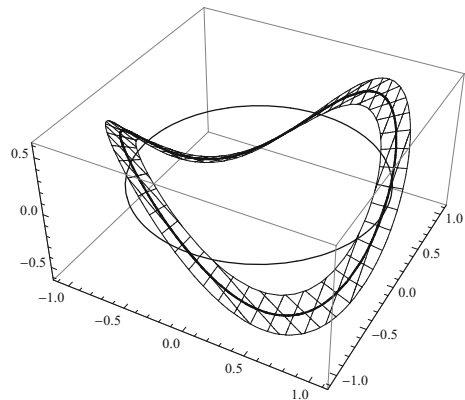
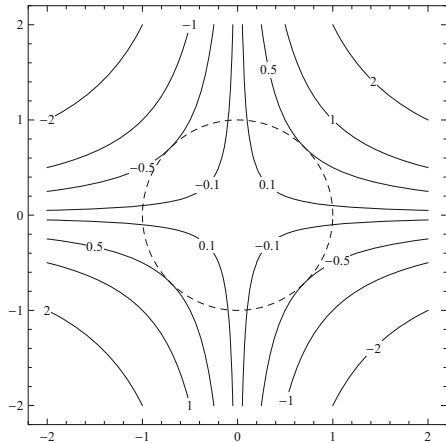
$$t_k = \frac{2k+1}{4} \pi \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3$$

gelöst. Damit haben wir die vier mit der Multiplikatormethode gefundenen Kandidaten wiedergefunden:

$$(w, w) = e^{it_1}, \quad (-w, w) = e^{it_2}, \\ (-w, -w) = e^{it_3}, \quad (w, -w) = e^{it_4}.$$

Erst zusätzliche Überlegungen zeigen, dass tatsächlich lokale Maxima und Minima von f auf S^1 vorliegen. Das Diagramm rechts zeigt einige Höhenlinien $\text{niv}_f(c)$ von f sowie S^1 von g . Das Berühren in Extremalstellen ist sichtbar und es lässt sich auch einsehen, dass p_1 und p_3 bedingte lokale Maxima und p_2 und p_4 bedingte lokale Minima sind. Das Gleiche gilt für das zweite Diagramm, das f in einer kreisförmigen Umgebung von S^1 zeigt.

Im Ausblick werden wir ein hinreichendes allgemeines Kriterium kennenlernen, das sich auf den vorliegenden Fall anwenden lässt.



Tangentialräume

Im Beweis der Multiplikatorregel haben wir benutzt, dass die Ebene die Dimension 2 besitzt: Zwei Vektoren, die senkrecht auf einem Vektor $v \neq 0$ stehen, liegen in der Ebene auf einer Geraden, im \mathbb{R}^3 ist das nicht immer richtig. Zudem haben wir die Parametrisierbarkeit von N in der Nähe von p vorausgesetzt. Das Ergebnis lässt sich aber auf höhere Dimensionen verallgemeinern, und die Voraussetzung gilt automatisch. Hierzu definieren wir:

Definition (*Tangentialraum*)

Für $N \subseteq \mathbb{R}^n$ und $p \in N$ heißt

$$T_p N = \{ h'(0) \mid h :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow N \text{ ist stetig differenzierbar mit } h(0) = p \}$$

der *Tangentialraum* von N im Punkt p .

Der Tangentialraum $T_p N \subseteq \mathbb{R}^n$ besteht also aus allen Tangential- oder Geschwindigkeitsvektoren von stetig differenzierbaren Kurven im Punkt p , die ganz in N verlaufen und p besuchen. Für Niveaumengen gilt das unabhängig von Lagrange-Multiplikatoren bedeutsame Ergebnis:

Satz (*Gradientendarstellung des Tangentialraums für Niveaumengen*)

Seien $g : P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $N = \text{niv}_g(c)$ für ein c und $p \in N$ mit $\text{grad}(g)(p) \neq 0$. Dann gilt

$$T_p N = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid J_g(p)x = 0 \} = \{ x \mid \langle \text{grad}(g)(p), x \rangle = 0 \}.$$

Beweis

Ist $x \in T_p N$ und $h :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow N$ mit $h(0) = p$ und $h'(0) = x$, so ist $g \circ h$ konstant gleich c und damit

$$J_g(p)x = J_g(h(0))h'(0) = (g \circ h)'(0) = 0.$$

Sei nun $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $J_g(p)x^* = 0$. Wir konstruieren eine stetig differenzierbare Kurve h^* in N , die p zur Zeit 0 mit dem Tangentialvektor $x^* = h^{*'}(0)$ besucht. Sei hierzu $w = \|\text{grad}(g)(p)\|$. Durch Übergang zu g/w können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $w = 1$ (die Menge aller x mit $J_g(p)x = 0$ bleibt durch diesen Übergang gleich).

Sei $b_n = \text{grad}(g)(p)$, und seien $b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ derart, dass b_1, \dots, b_n eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden. Wir definieren nun $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi(x) = (\langle b_1, (x - p) \rangle, \dots, \langle b_{n-1}, (x - p) \rangle, g(x) - c) \quad \text{für alle } x \in P.$$

Dann gilt $\varphi(p) = 0$ und für alle $x \in P$ ist die letzte Komponente von $\varphi(x)$ genau dann 0, wenn $x \in N$. Die Vektoren b_1, \dots, b_n sind die Zeilenvektoren

von $J_\varphi(p)$, und damit ist $J_\varphi(p)$ invertierbar. Also existiert eine offene Umgebung $U \subseteq P$ von p , sodass für $V = \varphi[U]$ gilt:

- (a) $\varphi : U \rightarrow V$ ist bijektiv und V ist offen,
- (b) $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ ist stetig differenzierbar,
- (c) $J_{\varphi^{-1}}(0) = J_\varphi(p)^{-1}$.

Sei $x^* = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k b_k$. Dann gilt $\alpha_n = 0$ wegen $\langle b_n, x^* \rangle = 0$. Wir definieren $h :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow V$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ durch

$$h(t) = (t\alpha_1, \dots, t\alpha_n) = (t\alpha_1, \dots, t\alpha_{n-1}, 0) \quad \text{für alle } t.$$

Dann gilt $h(0) = 0$ und $h'(t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$ für alle t . Damit gilt für die stetig differenzierbare Kurve $h^* = \varphi^{-1} \circ h :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow P$:

- (1) $h^*(0) = p$,
- (2) $h^*(t) \in N$ für alle t ,
- (3) $h^{*'}(0) = J_{\varphi^{-1}}(0) h'(0) = J_\varphi(p)^{-1} (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) = x^*$.

Dabei folgt (1) aus $\varphi(p) = h(0)$, (2) aus $\alpha_n = 0$ und schließlich (3) aus

$$- J_\varphi(p)x^* = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Der Tangentialraum $T_p N$ einer Niveaumenge $N = \text{niv}_g(c)$ ist also der $(n-1)$ -dimensionale Vektorraum aller Vektoren, die senkrecht auf dem Gradienten von g im Punkt p stehen. In der Sprache der Linearen Algebra kann man dies auch so ausdrücken: $T_p N$ ist der Kern der linearen Abbildung $dg(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Nun können wir leicht zeigen:

Satz (*Multiplikatorregel von Lagrange, allgemeine Version*)

Seien $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, stetig differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$, $N = \text{niv}_g(c)$ und $p \in N$ derart, dass $\text{grad}(g)(p) \neq 0$ und $f|_N$ eine lokale Extremalstelle in p besitzt. Dann existiert ein λ mit $\text{grad}(f)(p) + \lambda \text{grad}(g)(p) = 0$.

Beweis

Sei $x \in T_p N$. Sei $h :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow N$ mit $h(0) = p$ und $h'(0) = x$. Wie im Spezialfall oben gilt $(f \circ h)'(p) = 0$ und $g \circ h = c$, sodass

$$\langle \text{grad}(f)(p), x \rangle = 0 = \langle \text{grad}(g)(p), x \rangle.$$

Da $T_p N$ ein $(n-1)$ -dimensionaler Vektorraum ist, ist dies nur dann

- möglich, wenn $\text{grad}(f)(p)$ ein skalares Vielfaches von $\text{grad}(g)(p)$ ist.

Ohne Beweis geben wir noch ein hinreichendes Kriterium an:

Satz (*hinreichendes Kriterium für bedingte Extremalstellen*)

Seien g, f, N wie oben, und seien $p \in N$ und λ derart, dass

$$\text{grad}(f + \lambda g)(p) = 0.$$

Die Hesse-Matrix

$$H = H_{f+\lambda g}(p) = H_f(p) + \lambda H_g(p)$$

sei positiv definit auf $T_p N$, d. h., für alle $x \neq 0$ mit $\langle x, \text{grad}(g)(p) \rangle = 0$ gilt $\langle x, Hx \rangle > 0$. Dann ist p eine strikte lokale Minimalstelle von $f|_N$. Analog ist p eine strikte lokale Maximalstelle von $f|_N$, wenn H negativ definit auf $T_p N$ ist.

Im obigen Beispiel gilt für $p = (w, w)$ und $\lambda = -1/2$:

$$H = H_f(p) + \lambda H_g(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\langle (x, y), H(x, y) \rangle = -(x - y)^2$, und dies ist kleiner als 0 für alle von 0 verschiedenen Elemente von

$$T_p N = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y), 2(w, w) \rangle = 0 \} = \{ (x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

Also ist (w, w) eine strikte lokale Maximalstelle von f . Analog können die drei anderen Kandidaten als strikte lokale Extremalstellen erkannt werden.

Ausblick: Eigenwerte symmetrischer Matrizen

Ein fundamentales Ergebnis der linearen Algebra ist, dass jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Orthonormal-Basis aus Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten besitzt: Es gibt $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad \langle x_i, x_i \rangle = 1, \quad \langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \text{für alle } i \text{ und alle } j \neq i.$$

Bezüglich dieser Basis ist A eine Diagonalmatrix. Man sagt deswegen auch, dass A orthogonal diagonalisierbar ist. Der Beweis wird in der linearen Algebra mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und des Fundamentalsatzes der Algebra geführt. Wir geben zwei (verwandte) analytische Beweise, die den Fundamentalsatz nicht bemühen und wertvolle neue Einsichten mit sich bringen. Unser erstes Argument schließt an die Diskussion bedingter lokaler Extrema an:

Eigenwerte symmetrischer Matrizen à la Lagrange

Bei der Diskussion der Definitheit hatten wir das Werteverhalten von Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $f(x) = \langle x, Ax \rangle$ mit einer symmetrischen Matrix A auf der Sphäre S^{n-1} untersucht. Wir wissen aufgrund der Kompaktheit von S^{n-1} , dass bedingte Extremalstellen existieren. Die Multiplikatorregel liefert nun:

Satz (*kleinster und größter Eigenwert einer symmetrischen Matrix*)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, und seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \langle x, Ax \rangle, \quad g(x) = \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Weiter seien $S^{n-1} = \text{niv}_g(1)$ und $c, d \in \mathbb{R}$, $x_c, x_d \in S^{n-1}$ mit

$$f(x_c) = c = \min(f|S^{n-1}), \quad f(x_d) = d = \max(f|S^{n-1}).$$

Dann ist c der kleinste und d der größte Eigenwert von A und x_c, x_d sind zugehörige normierte Eigenvektoren.

Beweis

Für alle $x \in S^{n-1}$ gilt:

$$\text{grad}(f)(x) = Ax + A^t x = 2Ax, \quad \text{grad}(g)(x) = 2x.$$

Nach der Multiplikatorregel gibt es also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

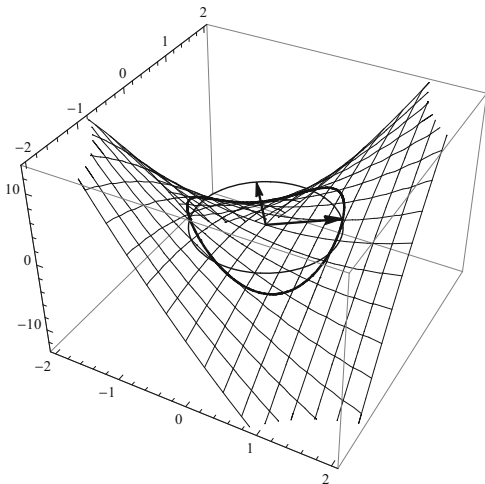
$$Ax_c = \lambda x_c, \quad Ax_d = \mu x_d.$$

Sind nun $x \in S^{n-1}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $Ax = \alpha x$, so ist

$$\alpha = \alpha \langle x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = f(x) \in [c, d].$$

— Insbesondere gilt $\lambda = c$ und $\mu = d$.

Der Beweis zeigt, dass jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mindestens einen reellen Eigenwert besitzt. Durch Bildung des orthogonalen Unterraums erhält man durch Induktion, dass eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A existiert. Der Fundamentalsatz der Algebra wird dabei nicht verwendet.



Die „Eigenuhr“
der symmetrischen
(2 x 2)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gezeigt ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \langle (x, y), A(x, y) \rangle$, sowie der Einheitskreis S^1 und das Bild von S^1 unter f . Die beiden durch Pfeile dargestellten Vektoren bilden eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 aus Eigenvektoren von A . Sie verweisen auf lokale Maximal- und Minimalstellen von $f|_{S^1}$, und die zugehörigen Werte von f sind die Eigenwerte von A .

Eigenwerte symmetrischer Matrizen à la Rayleigh

Der Einsatz der Lagrangeschen Multiplikator-Methode zur Eigenwert-Analyse symmetrischer Matrizen lässt sich vermeiden, wenn wir statt der Funktion $f(x) = \langle x, Ax \rangle$ den folgenden Quotienten betrachten:

Definition (*Rayleigh-Quotient*)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann heißt $R: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$R(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,$$

der *Rayleigh-Quotient* von A .

Gilt $Ax = \alpha x$ für $x \neq 0$, so ist $R(x) = \alpha$. Der Rayleigh-Quotient liefert also den Eigenwert zu einem Eigenvektor. Weiter gilt die Homogenität

$$(+)\quad R(\alpha x) = R(x) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

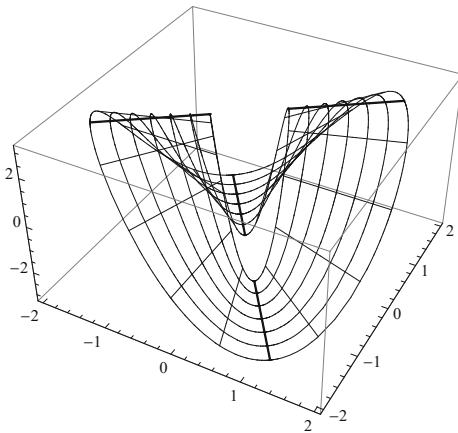
Sei wieder $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Dann nimmt $R|_{S^{n-1}}$ ihre Extremwerte an. Nach (+) sind die Extrema von $R|_{S^{n-1}}$ globale Extrema von R und folglich Nullstellen des Gradienten. Wir nehmen nun an, dass A symmetrisch ist. Dann gilt

$$\text{grad}(R)(x) = 2 \frac{\langle x, x \rangle Ax - \langle x, Ax \rangle x}{\langle x, x \rangle^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Ist nun x eine Extremalstelle von R , so gilt $\langle x, x \rangle Ax - \langle x, Ax \rangle x = 0$, also

$$Ax = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle} x = R(x) x,$$

sodass x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $R(x)$ ist (und genauer ist $R(x)$ der kleinste oder größte Eigenwert von A).



Der Rayleigh-Quotient
der symmetrischen
(2 x 2)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

für alle x mit

$$1/2 \leq \|x\| \leq 2.$$

Die Argumentation zeigt nicht nur die Diagonalisierbarkeit, sondern erlaubt es, analytische Extremwert-Methoden zur Bestimmung von Eigenvektoren und Eigenwerten symmetrischer Matrizen einzusetzen. Numerisch bedeutsam ist, dass die Anwendung des Rayleigh-Quotienten auf eine gute Approximation x_n an einen Eigenvektor x^* eine sehr gute Approximation $\alpha_n = R(x_n)$ an $\alpha^* = R(x^*)$ liefert: Konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x^* , so konvergiert $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quadratisch gegen α^* , d. h. es gibt es ein $c > 0$, sodass

$$|\alpha_n - \alpha^*| < c \|x_n - x^*\|^2 \quad \text{für alle } n.$$

Denn es gilt (Taylor-Entwicklung von R im Punkt x^*)

$$\alpha_n - \alpha^* = R(x_n) - R(x^*) = \langle \text{grad}(R)(x^*), (x_n - x^*) \rangle + O(\|x_n - x^*\|^2) = O(\|x_n - x^*\|^2).$$

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Eigenvektor konvergiert, kann durch folgende sog. Vektoriteration definiert werden. Für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{\|Ax_n\|} \quad \text{für alle } n.$$

Man kann zeigen, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Eigenvektor x^* von A mit dem betragsmäßig größten Eigenwert α^* konvergiert, falls $\langle x_0, x^* \rangle \neq 0$ und α^* einfach ist. Wir illustrieren die Iteration $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die zugehörige Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha_n = R(x_n)$, anhand von 2×2 -Matrizen. Natürlich lassen sich die Eigenwerte und Eigenvektoren hier direkter bestimmen, aber das Verfahren funktioniert auch für sehr große Matrizen. Seien also

$$A = \begin{pmatrix} 0,25 & 1,11 \\ 1,11 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad x_0 = (1, 0).$$

Eine Computer-Berechnung liefert (auf vier Stellen gerundet):

n	x_n	$\alpha_n = R(x_n)$
1	(0,2197, 0,9756)	0,7734
5	(0,6387, 0,7695)	1,3706
10	(0,7037, 0,7104)	1,3852
15	(0,6987, 0,7154)	1,3853

Die (gerundeten) wirklichen Werte sind

$$x^* = (0,6991, 0,7150), \quad \alpha^* = 1,3853.$$

Für $B = \begin{pmatrix} 0,25 & 1,11 \\ 1,11 & -0,3 \end{pmatrix}$ und $x_0 = (1, 0)$ erhalten wir dagegen:

n	x_n	$\alpha_n = R(x_n)$
10	(0,9766, -0,2152)	-0,2419
50	(0,7219, -0,6920)	-1,1224
100	(0,6289, -0,7775)	-1,1680

Dies weicht von den wirklichen Werten

$$x^* = (-0,6162, 0,7876), \quad \alpha^* = -1,1686$$

vergleichsweise weit ab, wobei die α_n wieder deutlich besser sind als die x_n . Der Grund ist, dass der Betrag des Quotienten $q = |\alpha^*/\beta^*|$ der beiden Eigenwerte $\alpha^* > \beta^*$ von B fast gleich 1 ist. Die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens ist, wie man in der numerischen linearen Algebra zeigt, $O(q^n)$ für x_n und $O(q^{2n})$ für α_n .

4. Abschnitt

Überblickswissen Fourier-Reihen

Trigonometrische Reihen

Im 19. Jahrhundert wurde, angeregt vor allem durch Joseph Fourier, eine Theorie entwickelt, deren Ziel es ist, eine Funktion f mit der Periode 2π als unendliche Überlagerung der „Elementarschwingungen“ $1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots$ darzustellen. Aufgabe ist, gegeben f , das Auffinden von Koeffizienten a_k und b_k , sodass

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei geeignete Präzisierungen von „ \sim “ anzugeben sind, wenn der Idealfall der punktweisen Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite gegen f nicht zu erreichen ist. Das Auffinden der Koeffizienten und die Analyse des Konvergenzverhaltens ist, wie sich zeigt, eine Aufgabe der Integrationstheorie.

Fourier-Reihen sind in mehrfacher Hinsicht bedeutsam. Zu den vielfältigen Anwendungen in den Naturwissenschaften und der Technik kommt eine umfassende historische Dimension. Die Untersuchung der Konvergenzfragen, die diese Reihen aufwerfen, spielte eine wesentliche Rolle in der Präzisierung der Analysis und der Entwicklung der modernen Mathematik.

Wir beginnen mit einigen Begriffen für periodische Funktionen.

Definition (*periodische Funktion, Periode, Minimalperiode*)

Eine Funktion f auf \mathbb{R} (mit Werten in einer beliebigen Menge) heißt *periodisch* mit der *Periode* $p > 0$, falls gilt:

$$(+)\quad f(x) = f(x + p) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Gilt (+) für kein $p' \in]0, p[$, so heißt p die *Minimalperiode* von f .

Die Zahl 2π ist die Minimalperiode der reellwertigen Sinus- und Kosinusfunktion und der komplexwertigen Funktion e^{ix} . Weiter ist 2π auch eine Periode der schneller oszillierenden Funktionen $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ und der Funktionen e^{ikx} für alle $k \in \mathbb{Z}$. Diese Funktionen werden im Folgenden im Mittelpunkt stehen. Wir wollen eine gegebene Funktion f mit der Periode 2π so in Bestandteile der Form $a_k \cos(kx)$ und $b_k \sin(kx)$ zerlegen, wie wir sie früher in Bestandteile der Form $a_k x^k$ zerlegen wollten, um sie als Potenzreihe darzustellen. Die Konzentration auf die Periode 2π ist dabei keine Einschränkung, denn hat eine Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Periode p , so hat die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = g\left(\frac{px}{2\pi}\right) \quad \text{für alle } x$$

die Periode 2π , da für alle x gilt:

$$f(x + 2\pi) = g\left(\frac{px + p2\pi}{2\pi}\right) = g\left(\frac{px}{2\pi} + p\right) = g\left(\frac{px}{2\pi}\right) = f(x).$$

Eine Analyse der Funktion f mit Hilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen der Form $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ liefert dann durch die Rücktransformation

$$g(x) = f\left(\frac{2\pi x}{p}\right) \text{ für alle } x$$

eine Analyse von g mit Sinus- und Kosinusfunktionen der Form $\sin(kx2\pi/p)$ und $\cos(kx2\pi/p)$.

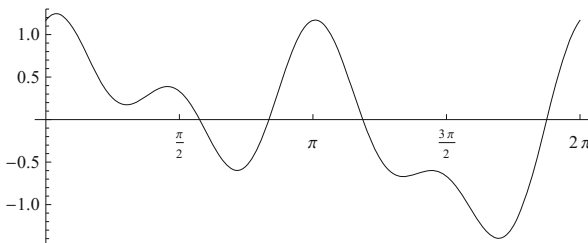
Endliche Linearkombinationen unserer Funktionen $\cos(kx)$ und $\sin(kx)$ sind als trigonometrische Polynome bekannt, wobei die Frequenz k die Rolle des Exponenten übernimmt:

Definition (*trigonometrisches Polynom*)

Sind $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ reelle Zahlen mit $a_n \neq 0$ oder $b_n \neq 0$, so heißt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

das (*reelle*) *trigonometrische Polynom* vom Grad n mit den *Koeffizienten* a_0, \dots, a_n und b_1, \dots, b_n .



$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{2}{3} \cos(2x) + \frac{2}{5} \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(4x)$$

Weiter definieren wir:

Definition (*trigonometrische Reihe*)

Sind $(a_k)_{k \geq 0}$ und $(b_k)_{k \geq 1}$ Folgen reeller Zahlen, so heißt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die *trigonometrische Reihe* mit den *Koeffizienten* $(a_k)_{k \geq 0}$ und $(b_k)_{k \geq 1}$.

Ein trigonometrisches Polynom lässt sich als trigonometrische Reihe ansehen, bei der die Koeffizienten a_k und b_k schließlich Null sind. Umgekehrt sind die trigonometrischen Polynome die Partialsummen der trigonometrischen Reihen.

Alle trigonometrischen Polynome haben die Periode 2π . Konvergiert also eine trigonometrische Reihe auf einem Intervall der Form $[a, a + 2\pi[$, so konvergiert sie auf ganz \mathbb{R} gegen eine Funktion der Periode 2π .

Betrachtet man die Definitionen, so fällt auf, dass ein Koeffizient b_0 fehlt und dass der Koeffizient a_0 halbiert erscheint. Hierzu beobachten wir, dass

$$a \cos(0x) + b \sin(0x) = a \cos(0) + 0 = a \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Damit kann der 0-Anteil als Konstante ausgelagert werden. Ein Koeffizient b_0 spielt keine Rolle und wird aus Eindeutigkeitsgründen besser ganz vermieden. Dass nun weiter der 0-Anteil in der Form $a_0/2$ und nicht in der Form a_0 angegeben wird, hat Gründe, die erst durch die Berechnungsformeln für a_k und b_k ans Licht kommen werden.

Unsere erste Frage ist nun:

*Wie bestimmt man a_k und b_k , wenn man weiß,
dass f eine trigonometrische Reihe ist?*

Für Potenzreihen $f = \sum_k a_k (x - p)^k$ hatten wir eine Antwort auf die entsprechende Frage durch gliedweises Differenzieren gefunden hatten. Hier galt

$$a_k = f^{(k)}(p)/k! \quad \text{für alle } k.$$

Während für Potenzreihen die Differentiation und damit die lokale Analyse der Funktion f im Punkt p herangezogen wurde, lassen sich die „verlorenen“ Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe bei guten Konvergenzbedingungen durch Integrieren wiederfinden:

Satz (*Berechnung der trigonometrischen Koeffizienten*)

Sei $a_0/2 + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ eine trigonometrische Reihe, die gleichmäßig gegen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gilt:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \quad \text{für alle } k \geq 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Der Beweis dieser magischen Formeln lässt sich einfacher führen und besser verstehen, wenn wir einige Elemente auslagern. Hierzu führen wir zuerst eine auch andernorts nützliche 0-1-Symbolik ein:

Definition (*Kronecker-Symbol*)

Für alle Objekte x, y wird das *Kronecker-Symbol* $\delta_{x,y}$ definiert durch:

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Dem Leser können wir überlassen:

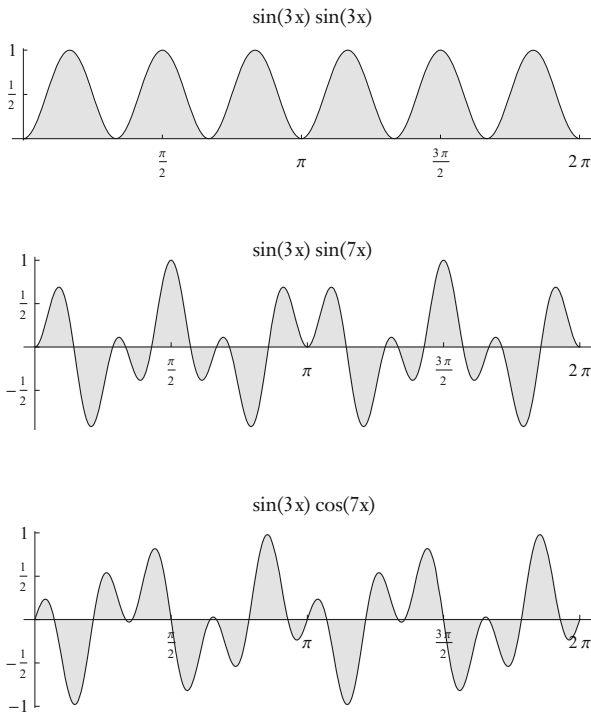
Satz (Orthogonalität von $\cos(kx)$, $\sin(kx)$)Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a) \int_0^{2\pi} \cos(0x) \cos(0x) dx = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin(0x) \sin(0x) dx = 0,$$

$$(b) \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx = \delta_{k,n} \cdot \pi,$$

falls $n \neq 0$ oder $k \neq 0$,

$$(c) \int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx = 0.$$

Für $n = 0$ in (b) und $k = 0$ in (c) erhalten wir speziell

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) dx = 0 \quad \text{für alle } k \geq 1, \quad \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx = 0 \quad \text{für alle } k \geq 0,$$

was man natürlich auch leicht mit Hilfe von Stammfunktionen zeigen kann.

Die hier und im Folgenden verwendete Bezeichnung als „Orthogonalität“ werden wir später mit Hilfe eines Skalarprodukts für Funktionen motivieren.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Berechnungssatz beweisen.

Beweis des Berechnungssatzes

Sei also, bei gleichmäßiger Konvergenz,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad \text{für alle } x.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle x :

$$f(x) \cos(nx) = \frac{a_0}{2} \cos(nx) + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kx) \cos(nx) + b_k \sin(kx) \cos(nx)),$$

und die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite ist immer noch gleichmäßig. Gliedweises Integrieren liefert

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cos(nx) dx + \\ &\quad \sum_{k \geq 1} \left(\int_0^{2\pi} a_k \cos(kx) \cos(nx) dx + \int_0^{2\pi} b_k \sin(kx) \cos(nx) dx \right). \end{aligned}$$

Nach Orthogonalität ist die rechte Seite gleich

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cos(0) dx = a_0 \pi, \quad \text{falls } n = 0,$$

und gleich

$$\int_0^{2\pi} a_n \cos(nx) \cos(nx) dx = a_n \pi, \quad \text{falls } n > 0.$$

- Die Aussage über die Sinus-Koeffizienten wird analog bewiesen.

Aus dem Satz folgt unmittelbar:

Korollar (Eindeigkeitsatz)

Die Koeffizienten einer gleichmäßig konvergenten trigonometrischen Reihe sind eindeutig bestimmt: Konvergieren trigonometrische Reihen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad \text{und}$$

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx))$$

gleichmäßig gegen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt $a_k = c_k$ und $b_k = d_k$ für alle k .

Reelle und komplexe Fourier-Reihen

Wir stellen nun die Berechnungsformeln für die Koeffizienten an die Spitze. Der Ansatz ist wieder vergleichbar mit dem Versuch der Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe: Wenn es geht, dann so.

Definition (*Fourier-Koeffizienten und Fourier-Reihe einer Funktion*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Dann heißen

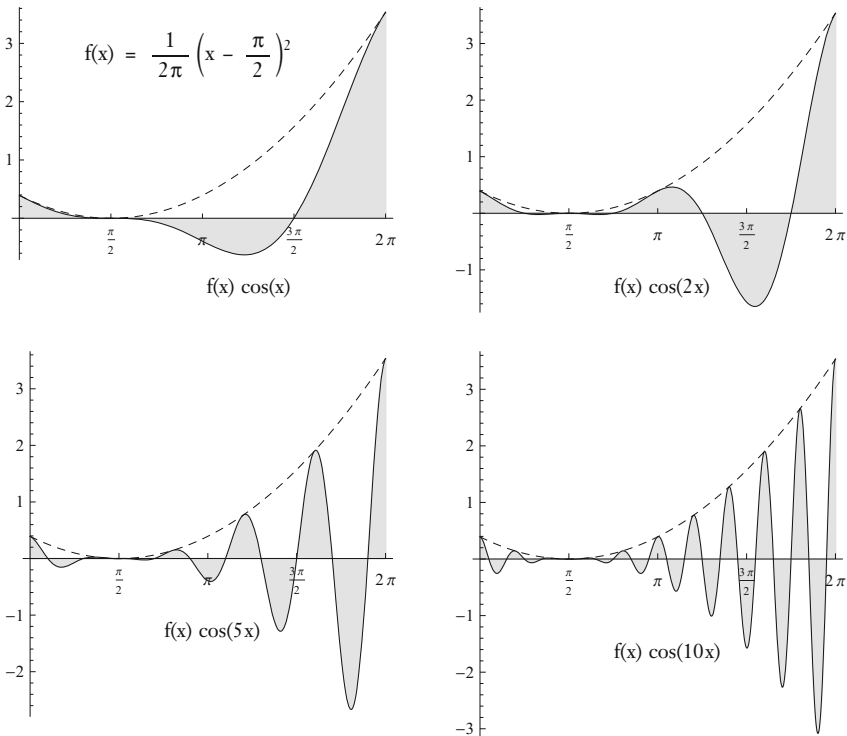
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \quad \text{für alle } k \geq 0 \quad \text{und}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \quad \text{für alle } k \geq 1$$

die *Fourier-Koeffizienten* von f . Weiter heißt

$$\text{FS}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die *Fourier-Reihe* von f („FS“ für engl. „Fourier series“).



Die große Frage lautet nun:

Unter welchen Voraussetzungen und in welcher Form konvergiert die Fourier-Reihe $FS(f)$ einer 2π -periodischen Funktion f gegen f ?

Unsere bisherigen Überlegungen zeigen:

Korollar

Konvergiert $FS(f)$ gleichmäßig gegen eine Funktion g , so sind $FS(f)$ und $FS(g)$ identisch, und damit konvergiert $FS(g)$ gleichmäßig gegen g .

Beweis

Nach dem Berechnungssatz gelten die Koeffizienten a_k und b_k von $FS(f)$ definierenden Formeln, wenn wir statt f die Funktion g unter dem

– Integral einsetzen. Folglich haben $FS(f)$ und $FS(g)$ dieselben Koeffizienten.

Wir können hier nicht erwarten, dass g gleich f ist. Ist zum Beispiel f in genau einem Punkt von $[0, 2\pi[$ von 0 verschieden, so sind alle Koeffizienten a_k und b_k gleich 0, und damit konvergiert $FS(f)$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Allgemein gilt: Ist f nicht stetig, so kann $FS(f)$ nicht gleichmäßig gegen f konvergieren, da die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen stetig ist. Einige Fragen, die sich nun stellen, sind: Konvergiert $FS(f)$ gleichmäßig oder wenigstens punktweise gegen f , wenn f stetig ist? Welches Konvergenzverhalten besitzt $FS(f)$ an Unstetigkeitsstellen? Was gilt, wenn die Funktion f lediglich integrierbar ist? Bevor wir uns aber mit derartigen Konvergenzfragen beschäftigen, wollen wir noch eine andere Darstellung der trigonometrischen Reihen entwickeln, die nicht zuletzt auch große notationelle Vorteile mit sich bringt.

Einsatz der komplexen Exponentialfunktion

Den Kosinus und den Sinus hatten wir mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion eingeführt. Es liegt nun nahe, den Komfort und die mathematische Tiefe der komplexen Exponentialfunktion auch zur Darstellung und Untersuchung trigonometrischer Reihen zu nutzen. Dabei treten Reihen mit ganzzahligen Indizes auf. Wir vereinbaren hierzu:

Konvention

Eine Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} z_k$ komplexer Zahlen soll im Folgenden die Partialsummen $\sum_{-n \leq k \leq n} z_k$ besitzen und im Fall der Existenz zudem den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n \leq k \leq n} z_k$ dieser Partialsummen bezeichnen.

Anders formuliert: Die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} z_k$ basiert auf der Folge

$$z_0, \quad z_1 + z_{-1}, \quad z_2 + z_{-2}, \quad z_3 + z_{-3}, \quad \dots$$

Damit können wir nun die Übersetzung ins Komplexe durchführen.

Satz (komplexe Darstellung einer reellen Fourier-Reihe)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \cos(kx) + b \sin(kx) = \frac{a - ib}{2} e^{ikx} + \frac{a + ib}{2} e^{-ikx}.$$

Ist also für gegebene $(a_k)_{k \geq 0}$ und $(b_k)_{k \geq 1}$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \overline{c_k} \quad \text{für alle } k \geq 1,$$

$$\text{so gilt } \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

Beweis

Die Formeln folgen wegen $1/i = -i$ aus

$$\cos(kx) = \operatorname{Re}(e^{ikx}) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin(kx) = \operatorname{Im}(e^{ikx}) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Wir nennen die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ wie im Satz die *komplexe Darstellung* der reellen trigonometrischen Reihe mit den Koeffizienten a_k und b_k . Die Rückübersetzung ins Reelle erfolgt durch die Formeln

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = \operatorname{Re}(2c_k), \quad b_k = -\operatorname{Im}(2c_k) \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Die Berechnung der Koeffizienten ist in komplexer Form besonders übersichtlich. Hierzu verwenden wir das in 1.1 schon kurz betrachtete Integral für komplexwertige Funktionen:

Definition (Integration komplexwertiger Funktionen)

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *integrierbar*, falls die reellen Funktionen $\operatorname{Re}(f): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im}(f): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dies sind. In diesem Fall heißt

$$I(f) = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f) \in \mathbb{C}$$

das *Integral* von f . Analog ist das unbestimmte Integral $\int f$ definiert.

Das Integral einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine komplexe Zahl, der Definitionsbereich ist nach wie vor reell. Für unsere Ziele ist vor allem bedeutsam:

Beispiel

$$\int e^{ix} dx = \int \cos(x) dx + i \int \sin(x) dx = -\sin(x) + i \cos(x) = -i e^{ix}.$$

Das komplexwertige Integral ist linear. Weiter gilt:

Satz (Betragsabschätzung)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar. Dann ist $|f|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Zum Beweis verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Der Vollständigkeit halber beweisen wir sie hier elementar:

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung für \mathbb{C})

Für alle $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}$ gilt:

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 \leq |v| |w|. \quad (\text{Ungleichung von Cauchy-Schwarz})$$

Beweis

Wir dürfen annehmen, dass $|v| = |w| = 1$ gilt und müssen zeigen, dass

$$(+)\quad v_1 w_1 + v_2 w_2 \leq 1.$$

Denn die Aussage ist klar, falls $v = 0$ oder $w = 0$ gilt, und der allgemeine Fall folgt aus (+) durch Übergang zu $v/|v|$ und $w/|w|$. Nach der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel gilt

$$\begin{aligned} v_1 w_1 + v_2 w_2 &\leq \sqrt{v_1^2 w_1^2} + \sqrt{v_2^2 w_2^2} \leq \frac{v_1^2 + w_1^2}{2} + \frac{v_2^2 + w_2^2}{2} = \\ &= \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} = \frac{|v|^2}{2} + \frac{|w|^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Damit können wir nun die Betragsabschätzung beweisen.

Beweis des Satzes

Wegen $|f| = \sqrt{\operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2}$ ist $|f|$ integrierbar. Wir setzen nun

$$c = I(\operatorname{Re}(f)), \quad d = I(\operatorname{Im}(f)), \quad s = |(c, d)| = \sqrt{c^2 + d^2} = \left| \int_a^b f \right|.$$

Ist $s = 0$, so ist die Behauptung trivial. Sei also $s > 0$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, punktweise für

$$v = (c, d) \quad \text{und} \quad w = f(x) = (\operatorname{Re}(f(x)), \operatorname{Im}(f(x)))$$

angewendet, gilt nach Monotonie des reellen Integrals:

$$s^2 = \int_a^b c \operatorname{Re}(f)(x) + d \operatorname{Im}(f)(x) \, dx \leq \int_a^b |(c, d)| |f(x)| \, dx = s \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

– Division durch s liefert die Behauptung.

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir nun:

Satz (*Berechnungsformel für komplexe Fourier-Koeffizienten*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi]$, und sei $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ die Fourier-Reihe von f in komplexer Darstellung. Dann gilt

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis

Die Aussage ist klar für $k = 0$. Für $k > 0$ gilt

$$\begin{aligned} 2\pi c_k &= \pi(a_k - ib_k) = \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx - i \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(x) e^{-ikx}) dx + i \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(f(x) e^{-ikx}) dx = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Für $k < 0$ zeigt man die Aussage analog oder durch komplexe Konjugation
 — der Aussage für $k > 0$.

Damit haben wir also die Funktionen $\cos(kx)$ und $\sin(kx)$ vollständig durch die einfacher zu handhabenden Funktionen e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$, ersetzt. Eine natürliche Erweiterung des komplexen Ansatzes ist nun, auch komplexwertige 2π -periodische Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zu betrachten. Die Grundfunktionen e^{ikx} sind ja bereits derartige Funktionen. Wir definieren also:

Definition (*Fourier-Reihe einer komplexwertigen Funktion*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Dann heißen die komplexen Zahlen

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

die *Fourier-Koeffizienten* von f . Weiter heißt

$$\operatorname{FS}(f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

die *Fourier-Reihe* von f . Wir setzen zudem für alle n :

$$\operatorname{FS}_n(f)(x) = \sum_{-n \leq k \leq n} c_k e^{ikx}. \quad (n\text{-te Partialsumme von } \operatorname{FS}(f))$$

Für alle 2π -periodischen und auf $[0, 2\pi]$ integrierbaren $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\operatorname{FS}(f) = \operatorname{FS}(\operatorname{Re}(f)) + i \operatorname{FS}(\operatorname{Im}(f)),$$

sodass eine komplexe Fourier-Reihe aus zwei reellen Fourier-Reihen zusammengesetzt ist. Für komplexwertige $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt im Allgemeinen jedoch nicht mehr, dass $c_{-k} = \overline{c_k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Die Orthogonalität lässt sich für komplexe Fourier-Reihen ebenso einfach formulieren wie beweisen:

Satz (*Orthogonalität von e^{ikx}*)

Für alle $k, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-ikx} dx = \delta_{n,k}.$$

Beweis

Für $n = k$ ist $e^{inx} e^{-ikx} = e^{i0x} = 1$ und die Aussage klar. Für $n \neq k$ ist

$$e^{inx} e^{-ikx} = e^{imx} \quad \text{mit } m = n - k \neq 0.$$

Damit gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \frac{1}{im} e^{imx} \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{1}{im} - \frac{1}{im} = 0.$$

Speziell ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} dx = \delta_{n,0}.$$

Wir betrachten die Partialsummen der komplexen Fourier-Reihen noch etwas genauer. Hierzu definieren wir:

Definition (*komplexes trigonometrisches Polynom*)

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$f(x) = \sum_{-n \leq k \leq n} c_k e^{ikx} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

nennen wir ein *komplexes trigonometrisches Polynom* mit *Koeffizienten* $c_k \in \mathbb{C}$.

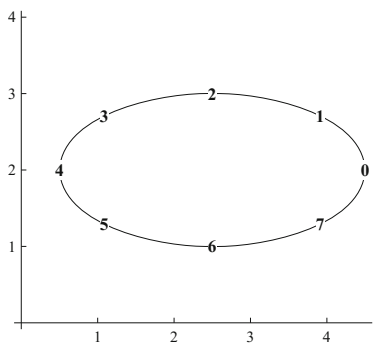
Die Partialsummen einer komplexen Fourier-Reihe sind also komplexe trigonometrische Polynome. Komplexe trigonometrische Polynome (und allgemeiner komplexwertige 2π -periodische Funktionen) können wir visualisieren, indem wir

$$\text{Bild}(f) = \text{Bild}(f| [0, 2\pi]) \subseteq \mathbb{C}$$

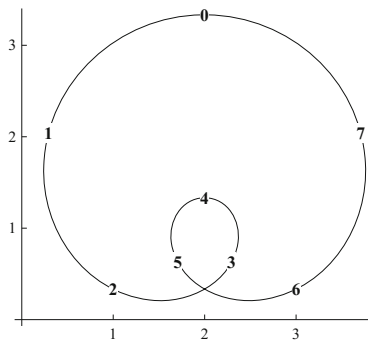
zeichnen (in der Sprache der Kurven also die Spur von f betrachten). Die folgenden Diagramme geben einige Beispiele. Um den Verlauf der Kurven deutlicher zumachen, wurden die Funktionswerte

$$f\left(\frac{k\pi}{4}\right) \quad \text{für } k = 0, \dots, 7$$

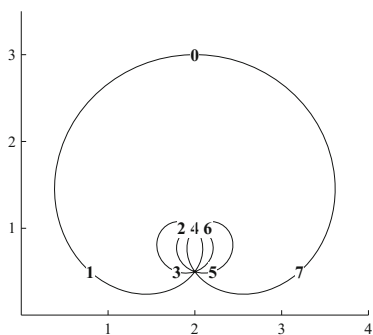
mit den Ziffern $k = 0, \dots, 7$ markiert. Nicht angegebene c_k sind gleich 0.



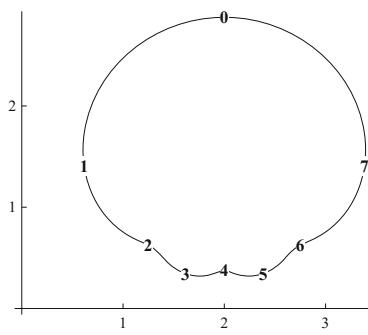
$$c_0 = 5/2 + 2i, \quad c_1 = 3/2, \quad c_{-1} = 1/2$$



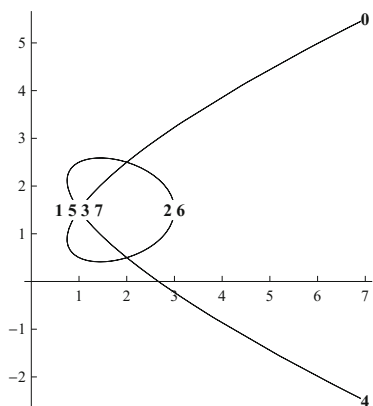
$$c_0 = 2 + 3/4i, \quad c_1 = c_2 = i$$



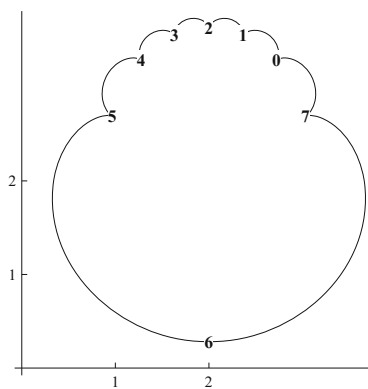
$$c_0 = 2 + i, \quad c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = i/2$$



$$c_0 = 2 + i, \quad c_k = i/2^{k-1} \text{ für } k = 1, \dots, 4$$



$$c_0 = 3 + 3/2i, \quad c_{\pm 1} = c_{\pm 3} = i, \quad c_{\pm 2} = c_{\pm 4} = 1$$



$$c_0 = 2 + 3i, \quad c_k = i^{k-1}/k \text{ für } k = 1, \dots, 8$$

Dirichlet-Kerne

Eine ausgezeichnete Fourier-Reihe erhalten wir, wenn wir alle Koeffizienten c_k gleich 1 setzen (vgl. die geometrische Reihe bei den Potenzreihen). Die Partialsummen dieser Reihe haben einen eigenen Namen:

Definition (Dirichlet-Kern)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt die Funktion $D_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$D_n(x) = \sum_{-n \leq k \leq n} e^{ikx} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

der n -te *Dirichlet-Kern*.

Nach den obigen Formeln gilt

$$\int_0^{2\pi} D_n(x) dx = \sum_{-n \leq k \leq n} \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i0x} dx = 2\pi \quad \text{für alle } n.$$

Aus der Definition kann man ablesen, dass die Dirichlet-Kerne nur Werte in \mathbb{R} annehmen. Überraschender ist die folgende einfache Darstellung:

Satz (Sinusdarstellung der Dirichlet-Kerne)

Für alle n und alle $x \in \mathbb{R} - \{2\pi a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$D_n(x) = \frac{\sin(nx + x/2)}{\sin(x/2)}.$$

Weiter ist $D_n(2\pi a) = 2n + 1$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R} - \{2\pi a \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist $e^{ix} \neq 1$ und damit gilt unter Verwendung der Formel für die endliche geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{-n \leq k \leq n} e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{0 \leq k \leq 2n} e^{ikx} = \\ e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} &= \frac{e^{-inx} e^{-ix/2}}{e^{-ix/2}} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \\ \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} &= \frac{\sin(nx + x/2)}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

Zudem gilt für alle $a \in \mathbb{Z}$, dass

$$- D_n(2\pi a) = \sum_{-n \leq k \leq n} e^{ik2\pi a} = \sum_{-n \leq k \leq n} 1 = 2n + 1.$$

Obwohl die Dirichlet-Kerne einer speziellen Fourier-Reihe entsprechen, können wir mit ihnen allgemeine Partialsummen darstellen:

Satz (*Partialsummen und Dirichlet-Kerne*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Dann gilt für alle n und x :

$$\begin{aligned} \text{FS}_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{FS}_n(f)(x) = \sum_{-n \leq k \leq n} c_k e^{ikx} =$$

$$\sum_{-n \leq k \leq n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt e^{ikx} =$$

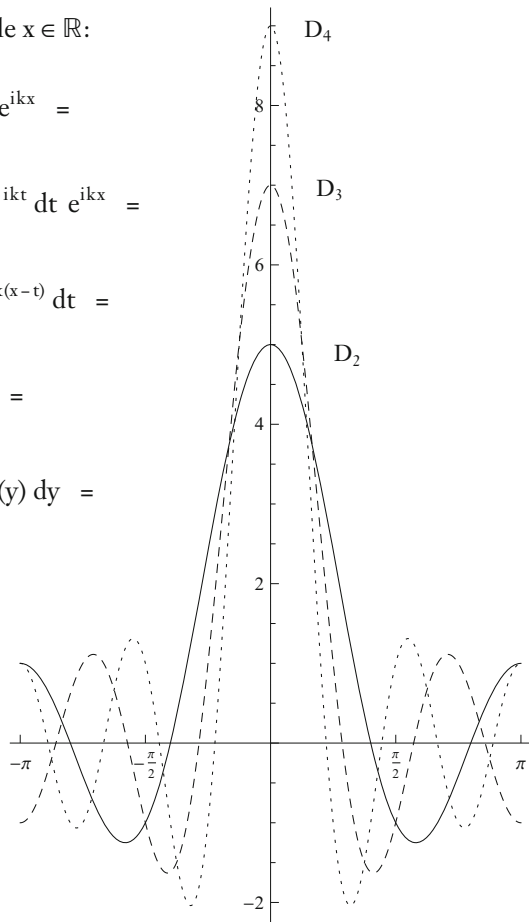
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{-n \leq k \leq n} e^{ik(x-t)} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} -f(x-y) D_n(y) dy =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) dt,$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Substitution „ $t = s(y) = x - y$ “ verwenden und im letzten Schritt benutzen, dass der Integrand 2π -periodisch ist.



Analog führt die Substitution „ $t = s(y) = x + y$ “ zusammen mit der Eigenschaft $D_n(-t) = D_n(t)$ zum Term $f(x+t)$ im Integranden.

Der Konvergenzsatz von Dirichlet

Wir beweisen nun erste Konvergenzsätze für Fourier-Reihen. Dabei beschränken wir uns zunächst auf Funktionen mit guten Differenzierbarkeitseigenschaften. Den größeren Bereich der integrierbaren Funktionen untersuchen wir später mit anderen Methoden.

Warum sollten wir überhaupt hoffen, dass die Fourier-Reihe von f in irgendeiner Weise gegen ein g konvergiert? Der folgende Satz gibt einen Hinweis.

Satz (*Lemma von Riemann*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0. \end{aligned}$$

Das Gleiche gilt für „ $\lambda \rightarrow -\infty$ “.

Bevor wir den Satz beweisen, versuchen wir eine Anschauung über seine Gültigkeit zu erlangen. Die Funktionen $\sin(\lambda x)$ sind für sehr große λ hochfrequent, auf einen Sinusberg folgt sofort ein Sinustal. Ist nun f in einem solchen Berg-Tal-Intervall vergleichsweise träge, so sind die Flächen des Produkts von f mit dem Sinusberg und des Produkts von f mit dem Sinustal dem Betrag nach ungefähr gleich groß, dabei aber unterschiedlich signiert. Das Intervall trägt also nur sehr wenig zum Integral bei. Damit sind beliebig kleine Integrale für hinreichend große Frequenzen zu erwarten.

Beweis

Wir zeigen die erste Aussage über den Sinus. Die anderen Aussagen werden analog bewiesen.

Zunächst zeigen wir die Behauptung für Treppenfunktionen. Sei also $(t_k)_{k \leq n}$ eine Partition von $[a, b]$ und seien $c_k \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = c_k$ für alle $x \in]t_k, t_{k+1}[$ und alle $k \leq n$. Dann gilt für alle $\lambda > 0$, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx \right| &= \left| \sum_{k \leq n} c_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin(\lambda x) dx \right| = \\ &= \left| \sum_{k \leq n} \frac{c_k}{\lambda} (\cos(\lambda t_{k+1}) - \cos(\lambda t_k)) \right| \leq \frac{2}{\lambda} \left| \sum_{k \leq n} c_k \right|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen Null, wenn λ gegen unendlich strebt.

Sei nun f eine beliebige integrierbare Funktion, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Treppenfunktion $g \leq f$ mit

$$\int_a^b (f - g) < \varepsilon/2.$$

Dann ist aber, für alle hinreichend großen λ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \sin(\lambda x) dx + \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \\ &= \int_a^b (f - g) + \left| \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Definition der Fourier-Koeffizienten gilt also:

Korollar (*Nullfolgensatz für Fourier-Koeffizienten*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi]$, und sei $FS(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$. Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lim_{k \rightarrow -\infty} c_k = 0$.

Die Fourier-Koeffizienten bilden also eine Nullfolge. Könnten wir nun noch stärker zeigen, dass $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, so würde $FS(f)$ nach dem Konvergenzkriterium von Weierstraß absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergieren, denn dann wäre

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{x \in [0, 2\pi]} |c_k e^{ikx}| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty.$$

Die Sache ist aber komplizierter – und spannender. Es gibt, was nicht leicht zu zeigen ist, sogar stetige Funktionen f mit $\sum_k |c_k| = \infty$. Wir werden aber sehen, dass der Ansatz über das Konvergenzkriterium von Weierstraß in wichtigen Fällen tatsächlich durchführbar ist.

Mit dem Lemma von Riemann und unserer früheren Analyse der Dirichlet-Kerne haben wir alle Hilfsmittel zusammengetragen, um einen ersten Satzesatz für Fourier-Reihen beweisen zu können. Der Übersichtlichkeit halber führen wir hierzu noch einige Notationen für links- und rechtsseitige Grenzwerte ein.

Definition (*die Werte $f(x+)$, $f(x-)$, $f(x\pm)$, $f'(x+)$, $f'(x-)$*)

Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ setzen wir im Fall der Existenz:

$$f(x+) = \lim_{h \downarrow 0} f(x+h), \quad f(x-) = \lim_{h \uparrow 0} f(x+h),$$

$$f(x\pm) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

$$f'(x+) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x+)}{h},$$

$$f'(x-) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-)}{h}.$$

Ist f 2π -periodisch und $f|_{[0, 2\pi]}$ eine Regelfunktion, so existieren $f(x+)$ und $f(x-)$ für alle x . Ist f stetig in x , so gilt $f(x+) = f(x-) = f(x)$. Ist f stückweise stetig und unstetig an der Stelle x , so ist $f(x\pm)$ das arithmetische Mittel der links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f an der Stelle x . Der tatsächliche Funktionswert $f(x)$ spielt bei der Definition von $f(x\pm)$ keine Rolle. Der Leser beachte weiter, dass bei der Definition der einseitigen Ableitungen $f'(x+)$ und $f'(x-)$ nicht der Wert $f(x)$ im Zähler verwendet wird, sondern die entsprechenden links- und rechtsseitigen Grenzwerte $f(x+)$ und $f(x-)$. Damit können diese Ableitungen auch an Unstetigkeitsstellen existieren.

Wir zeigen nun den folgenden starken Satz:

Satz (*Konvergenzsatz von Dirichlet*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Sei $x \in \mathbb{R}$ derart, dass $f(x-)$, $f(x+)$, $f'(x+)$ und $f'(x-)$ existieren. Dann gilt $FS(f)(x) = f(x\pm)$.

Beweis

Für alle n gilt nach dem Satz über die Berechnung von $FS_n(f)(x)$:

$$FS_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

Die Dirichlet-Kerne D_n sind gerade Funktionen, weswegen

$$\int_{-\pi}^0 D_n(x) dx = \int_0^{\pi} D_n(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = \pi.$$

Damit ist

$$f(x\pm) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x-) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+) D_n(t) dt.$$

Diese Integraldarstellungen von $FS_n(f)(x)$ und $f(x\pm)$ zeigen, dass

$$2\pi \left| FS_n(f)(x) - f(x\pm) \right| = \left| \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x-)) D_n(t) dt + \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x+)) D_n(t) dt \right|.$$

Wir setzen nun die Sinus-Formeln für $D_n(t)$ ein und wälzen deren Nenner $\sin(t/2)$ auf die f -Differenzen ab. Die Differenzierbarkeitseigenschaften von f , die wir bisher nicht verwendet haben, eliminieren dabei die Polstellen dieser Nenner an der oberen bzw. unteren Integrationsgrenze $t = 0$.

Wir definieren also $g_1: [-\pi, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ und $g_2: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g_1(t) = \frac{f(x+t) - f(x-)}{\sin(t/2)} = \frac{f(x+t) - f(x-)}{t} \cdot \frac{t}{\sin(t/2)} \quad \text{für } t \in [-\pi, 0[,$$

$$g_2(t) = \frac{f(x+t) - f(x+)}{\sin(t/2)} = \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \cdot \frac{t}{\sin(t/2)} \quad \text{für } t \in]0, \pi],$$

$$g_1(0) = 2 f'(x-), \quad g_2(0) = 2 f'(x+).$$

Da $f'(x-)$ und $f'(x+)$ existieren, sind g_1 und g_2 beschränkt und damit integrierbar. (Wegen $\lim_{t \rightarrow 0} t/\sin(t/2) = 2$ gilt $\lim_{t \downarrow 0} g_1(t) = g_1(0)$ und $\lim_{t \downarrow 0} g_2(t) = g_2(0)$, was wir nicht brauchen.) Obige Berechnung lautet nun

$$2\pi \left| \text{FS}_n(f)(x) - f(x\pm) \right| = \left| \int_{-\pi}^0 g_1(t) \sin((n+1/2)t) dt + \int_0^\pi g_2(t) \sin((n+1/2)t) dt \right|.$$

Nach dem Lemma von Riemann strebt die rechte Seite gegen Null, sodass

$$\text{FS}(f)(x) = \lim_n \text{FS}_n(f)(x) = f(x\pm).$$

Im Beweis brauchen wir de facto nur die Beschränktheit der links- und rechtsseitigen Differenzenquotienten von f an der Stelle x und nicht die Existenz der entsprechenden Differentialquotienten. Die Voraussetzung des Satzes ist aber für viele konkrete Funktionen sogar in einer viel stärkeren Form erfüllt. Wir definieren bzw. erinnern an:

Definition (*stückweise differenzierbar*)

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise (stetig) differenzierbar*, falls eine Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$ existiert, sodass für alle $k \leq n$ gilt:

$f|]t_k, t_{k+1}[$ besitzt eine (stetig) differenzierbare Fortsetzung nach $[t_k, t_{k+1}]$.

Weiter heißt ein 2π -periodisches $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ *stückweise stetig differenzierbar*, falls $f|]0, 2\pi]$ stückweise stetig differenzierbar ist.

Die Differenzierbarkeitsbegriffe für komplexwertige Funktionen mit reellem Definitionsbereich werden dabei wie im Reellen definiert. Man kann $f'(p) \in \mathbb{C}$ über die Existenz des Differentialquotienten $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p)$ oder gleichwertig durch $f'(p) = \text{Re}(f)'(p) + i \text{Im}(f)'(p)$ definieren, in Analogie zum Integral für komplexwertige Funktionen (vgl. hierzu auch 4.2 in Band 1).

Jede stückweise stetig differenzierbare Funktion f ist stückweise stetig. Die Kombination „stetig und stückweise differenzierbar“ entspricht anschaulich der Eigenschaft „stetig mit endlich vielen Knicken“.

Aus dem Satz von Dirichlet folgt nun unmittelbar:

Korollar (*Konvergenzsatz für stückweise differenzierbare Funktionen*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und auf $[0, 2\pi]$ stückweise differenzierbar.

Dann gilt $\text{FS}(f)(x) = f(x\pm)$ für alle x . Ist also f stetig und stückweise differenzierbar, so konvergiert $\text{FS}(f)$ punktweise gegen f .

Die Bessel-Ungleichung und gleichmäßige Konvergenz

Als nächstes zeigen wir, dass sich die punktweise Konvergenz zur gleichmäßigen Konvergenz verstärkt, wenn die betrachtete Funktion f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Das Argument beruht auf einer für die gesamte Theorie bedeutsamen Ungleichung.

Satz (Bessel-Ungleichung)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Dann gilt für die Fourier-Koeffizienten c_k von f :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (\text{Bessel-Ungleichung})$$

Beweis

Die Behauptung folgt durch Grenzübergang aus der für alle n gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{2\pi} |f(x) - \text{FS}_n(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{-n \leq k \leq n} c_k e^{ikx}|^2 dx = \\ &\int_0^{2\pi} (f(x) - \sum_{-n \leq k \leq n} c_k e^{ikx}) \overline{(f(x) - \sum_{-n \leq k \leq n} c_k e^{ikx})} dx = \\ &\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx + \sum_{-n \leq k \leq n} \left(\right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} f(x) \overline{c_k e^{ikx}} dx - \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} c_k e^{ikx} dx + \int_0^{2\pi} |c_k|^2 1 dx \right) = \\ &\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx + 2\pi \sum_{-n \leq k \leq n} (-|c_k|^2 - |c_k|^2 + |c_k|^2) = \\ &\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{-n \leq k \leq n} |c_k|^2. \end{aligned}$$

- Dabei führt die Orthogonalität der Funktionen e^{ikx} dazu, dass die beim
- Ausmultiplizieren auftauchende Doppelsumme eine einfache Summe ist.

Im nächsten Kapitel werden wir diesen Beweis noch einmal in einer algebraischen Notation vorführen. Weiter werden wir dann zeigen, dass sogar Gleichheit gilt. Hier halten wir noch fest, dass aus der Bessel-Ungleichung noch einmal folgt, dass $\lim_k |c_k| = 0$.

Zusätzlich zur Bessel-Ungleichung brauchen wir auch noch ein Ergebnis über gliedweises Differenzieren:

Satz (*Fourier-Koeffizienten der Ableitung*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch, stetig und auf $[0, 2\pi]$ stückweise stetig differenzierbar. Weiter seien

$$FS(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad \text{und} \quad FS(f') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{ikx}.$$

Dann gilt $d_k = ik c_k$ für alle k .

Beweis

Zunächst gilt

$$2\pi d_0 = \int_0^{2\pi} f'(x) 1 \, dx = f(x) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Eine partielle Integration zeigt, dass für alle $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} 2\pi d_k &= \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} \, dx = \\ f(x) e^{-ikx} \Big|_0^{2\pi} + ik \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx &= \end{aligned}$$

$$= 0 + 2\pi c_k ik.$$

Nun können wir vergleichsweise leicht zeigen:

Satz (*Konvergenzsatz für stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktionen*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch, stetig und auf $[0, 2\pi]$ stückweise stetig differenzierbar. Dann konvergiert $FS(f)$ gleichmäßig gegen f .

Beweis

Wir wissen bereits, dass $FS(f)$ bei diesen Voraussetzungen punktweise gegen f konvergiert. Nach dem Konvergenzkriterium von Weierstraß genügt es also zu zeigen, dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty.$$

Sind wieder c_k, d_k die Fourier-Koeffizienten von f bzw. f' , so gilt für alle $k \neq 0$ (unter Verwendung von $2xy \leq x^2 + y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$):

$$2|c_k| = 2 \frac{1}{k} (k|c_k|) \leq \frac{1}{k^2} + k^2 |c_k|^2 = \frac{1}{k^2} + |d_k|^2.$$

Da $\sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} 1/k^2 < \infty$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k|^2 < \infty$ nach der Bessel-Ungleichung für f' gilt, zeigt dies, dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty.$$

Weitere Konvergenzergebnisse

Wir geben noch einige weitere interessante Konvergenzergebnisse ohne Beweis an. Verzichten wir im gleichmäßigen Konvergenzsatz auf die Stetigkeit von f , so erhalten wir:

Satz (*Konvergenzsatz für stückweise stetig differenzierbare Funktionen*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und auf $[0, 2\pi]$ stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$:

- (a) Ist f stetig auf $[a, b]$, so konvergiert $FS(f)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f .
- (b) Ist f unstetig in x , so gilt $FS(f)(x) = f(x\pm)$.

Der folgende starke Satz besagt, dass punktweise Konvergenz für stetige Funktionen mit beschränkter Variation gilt:

Satz (*Konvergenzsatz von Dirichlet-Jordan*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und $f|_{[0, 2\pi]}$ habe beschränkte Variation. Dann gilt

$$FS(f)(x) = f(x\pm) \quad \text{für alle } x.$$

Ist also f stetig und $f|_{[0, 2\pi]}$ von beschränkter Variation, so konvergiert $FS(f)$ punktweise gegen f .

Andererseits genügt die bloße Stetigkeit von f nicht mehr für die punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe von f . Erste Gegenbeispiele wurden von Paul Du Bois-Reymond und Lipót Fejér konstruiert. Die Fourier-Reihen dieser Beispiele konvergieren zwar nicht überall, aber doch an vielen Stellen gegen die stetige Ausgangsfunktion, und viele Fragen blieben noch offen. Wie schon für die Charakterisierung der Riemann-integrierbaren Funktionen schuf erst die moderne Maß- und Integrationstheorie den begrifflichen Rahmen zur Klärung der Verhältnisse. Aus einem Satz von Lennart Carleson aus den 1960er Jahren folgt, dass für jede Riemann-integrierbare (und folglich beschränkte) 2π -periodische Funktion f die Menge aller x mit $FS(f)(x) \neq f(x)$ das Lebesgue-Maß Null besitzt. So wie eine Riemann-integrierbare Funktion also im Lebesgueschen Sinne fast überall stetig ist, so konvergiert die Fourier-Reihe einer Riemann-integrierbaren Funktion im Lebesgueschen Sinne fast überall gegen die Funktion.

Bestimmung einiger Fourier-Reihen

Wir betrachten nun einige Beispiele zur Illustration unserer Ergebnisse.

Beispiel 1: Die Fourier-Reihe einer Zackenfunktion

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion mit

$$f(x) = |x| \quad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi].$$

Wir bestimmen die Fourier-Reihe $FS(f)$ in reeller Darstellung,

$$FS(f) = a_0/2 + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Da f gerade ist, sind alle Fourier-Koeffizienten b_k gleich 0. Für die Kosinus-Koeffizienten gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(0x) dx = \frac{1}{\pi} \pi^2 = \pi, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \cos(kx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} ((-1)^k - 1) \quad \text{für alle } k \geq 1. \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$FS(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right).$$

Die Funktion f ist stetig und stückweise differenzierbar, sodass $FS(f)$ punktweise gegen f konvergiert. Speziell gilt $0 = f(0) = FS(f)(0)$, und damit erhalten wir

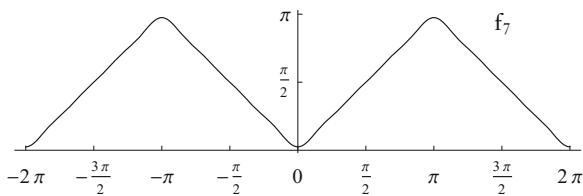
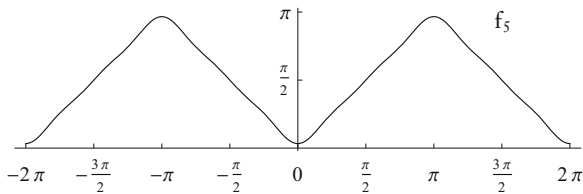
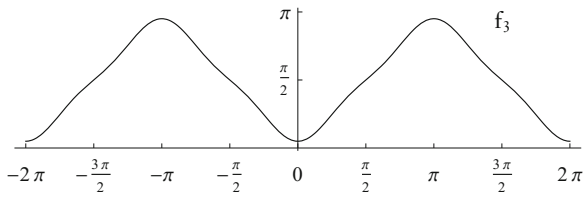
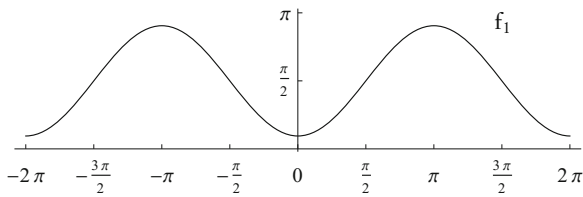
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k^2}.$$

Mit Hilfe von Summationssätzen über Reihenprodukte können wir mit diesem Ergebnis auch die Eulersche Summe $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ berechnen. Denn jede natürliche Zahl $n \geq 1$ lässt sich eindeutig als Produkt der Form $2^m k$ mit einem $m \geq 0$ und einem ungeraden k schreiben. Damit gilt

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{m \geq 0, k \text{ ungerade}} \frac{1}{(2^m k)^2} = \sum_{m \geq 0, k \text{ ungerade}} \frac{1}{4^m k^2} =$$

$$\left(\sum_{m \geq 0} \frac{1}{4^m} \right) \left(\sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{1 - 1/4} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wir werden dieses Ergebnis später noch einmal mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation erhalten.



$$f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \dots + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right).$$

Beispiel 2: Die Fourier-Reihe einer Sprungfunktion

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in]0, \pi[, \\ 0, & \text{falls } x \in \{0, \pi\}, \\ -1, & \text{falls } x \in]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

Wir bestimmen wieder die reell dargestellte Fourier-Reihe $FS(f)$. Da die Funktion f ungerade ist, sind diesmal alle Kosinus-Koeffizienten a_k gleich 0. Weiter ist $f(x)\sin(kx)$ gerade für alle $k \geq 1$, und damit gilt für alle $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = -\frac{2}{k\pi} \cos(kx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \\ &= \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(\pi k)). \end{aligned}$$

Die Werte $1 - \cos(k\pi)$ pendeln für $k \geq 1$ zwischen 2 und 0 hin und her, und damit gilt

$$FS(f)(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right).$$

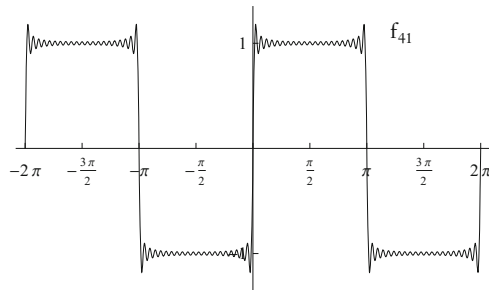
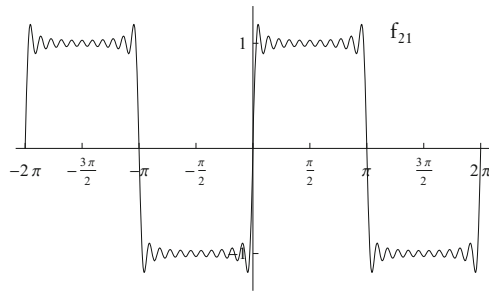
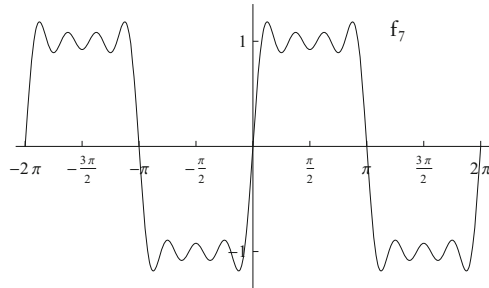
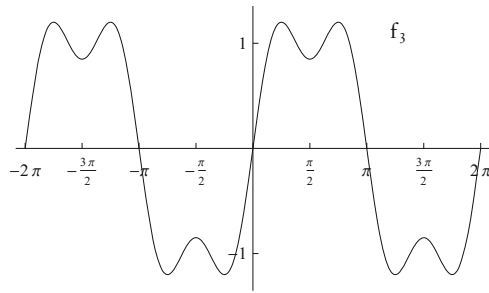
Die Funktion f ist stückweise differenzierbar. Da sie an ihren Unstetigkeitsstellen $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ das arithmetische Mittel ihrer dortigen links- und rechtsseitigen Grenzwerte -1 und 1 annimmt, konvergiert $FS(f)$ punktweise gegen f . Speziell gilt

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = FS(f)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Da $\sin(k\pi/2)$ für ungerade $k \geq 1$ zwischen 1 und -1 hin und her pendelt, haben wir also erneut gezeigt, dass

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots \quad (\text{Leibniz-Reihe})$$

In den Diagrammen zu dieser Fourier-Reihe können wir das bedeutsame *Gibbs-Phänomen* beobachten, nämlich die „Überschwinger“ an den Sprungstellen. Man kann zeigen, dass diese Überschwinger beschränkt sind, was aus den Diagrammen nicht abzulesen ist. Wir verweisen den interessierten Leser auf den mittlerweile klassischen Artikel von Edwin und Robert Hewitt: The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis, *Archive for the History of Exact Sciences* 21, S. 129 – 160.



$$f_n(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots + \frac{\sin(nx)}{n} \right).$$

Beispiel 3: Die Fourier-Reihe einer Sägezahnfunktion

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} (\pi - x)/2, & \text{falls } x \in]0, 2\pi[, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

In der reellen Fourier-Reihe von f verschwinden wieder alle Kosinus-Koeffizienten, da f ungerade ist. Partielle Integration liefert:

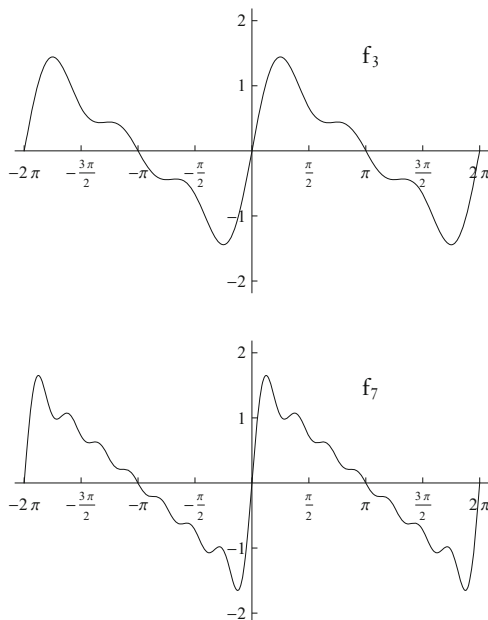
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin(kx) \, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{x-\pi}{k} \cos(kx) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k} \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{k} - \left[\frac{1}{k^2} \sin(kx) \right]_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{k} - 0 = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

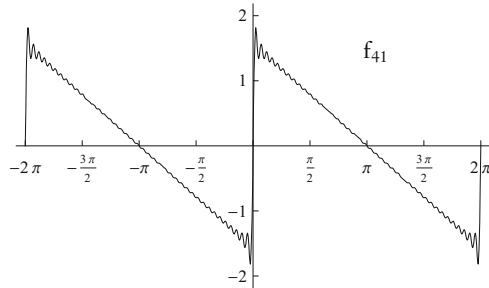
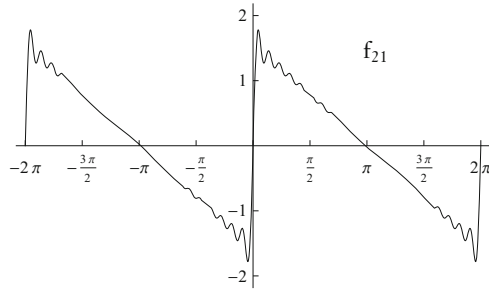
Erneut gilt punktweise Konvergenz von $FS(f)$ gegen f , sodass also

$$f(x) = FS(f)(x) = \sin(x)/1 + \sin(2x)/2 + \sin(3x)/3 + \dots$$

Setzen wir $x = \pi/2$, so erhalten wir noch einmal, dass

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \pm \dots$$

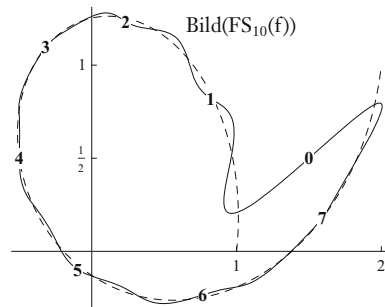
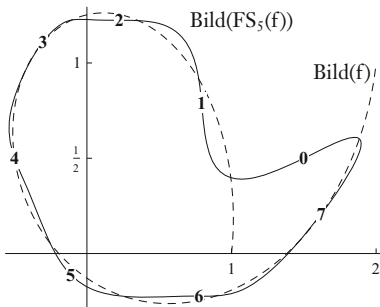




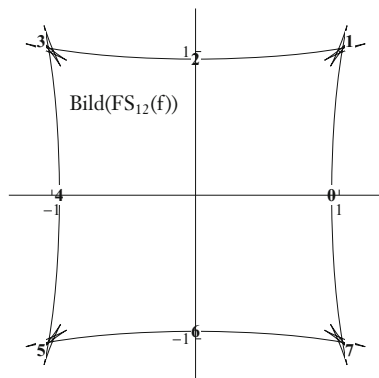
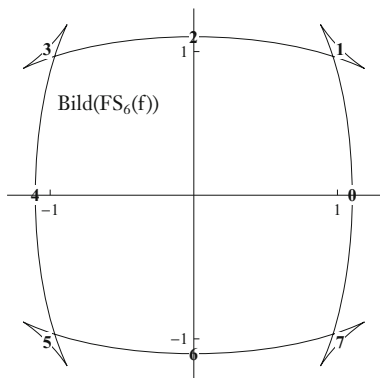
$$f_n(x) = \frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \dots + \frac{\sin(nx)}{n}$$

Beispiel 4: Komplexe Fourier-Reihen

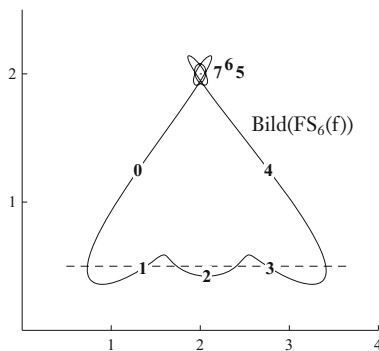
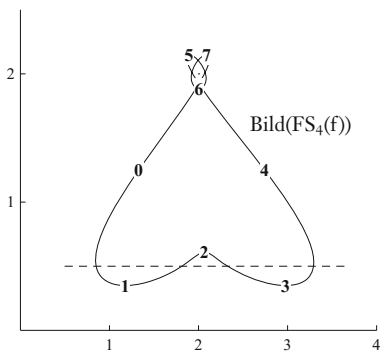
Die folgenden Diagramme zeigen $f[\mathbb{R}]$ und $FS_n(f)[\mathbb{R}]$ für einige komplexwertige 2π -periodische f und Grade n . Zudem sind wie oben wieder die Werte $FS_n(f)(k\pi/4)$ für $k = 0, \dots, 7$ markiert. Gut erkennbar sind jeweils die Mittelung und die Überschwinger an Unstetigkeitsstellen.



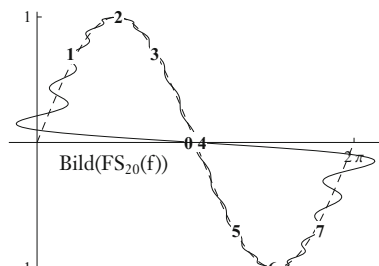
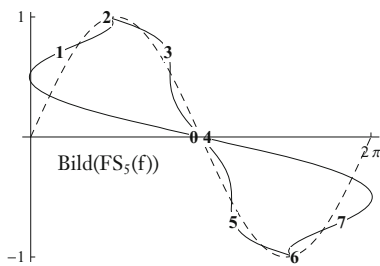
$$f(x) = \frac{x}{2\pi} + \cos(x) + i\left(\frac{x}{2\pi} + \sin(x)\right) \quad \text{für alle } x \in [0, 2\pi[$$



$f(x) = (1+i) 1_{[0, \pi/2[} + (-1+i) 1_{[\pi/2, \pi[} + (-1-i) 1_{[\pi, 3\pi/2[} + (1-i) 1_{[3\pi/2, 2\pi[}$
für alle $x \in [0, 2\pi[$. Das Bild von f besteht nur aus den vier Punkten $\pm 1 \pm i$.



$f(x) = (x + 1/2 + i/2) 1_{[0, \pi[} + 2(1+i) 1_{[\pi, 2\pi[}$ für alle $x \in [0, 2\pi[$



$f(x) = x + i \sin(x)$ für alle $x \in [0, 2\pi[$

Die Konvergenz im quadratischen Mittel

Wir untersuchen nun die Fourier-Reihen beliebiger integrierbarer periodischer Funktionen. Im Folgenden sei

$$V = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch und Riemann-integrierbar auf } [0, 2\pi] \}.$$

Die Menge V bildet mit der Skalarmultiplikation αf , $\alpha \in \mathbb{C}$, und der punktweisen Addition $f + g$ einen \mathbb{C} -Vektorraum. Weiter sind mit einer Funktion f immer auch die Funktionen $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, $|f|$ und \bar{f} Elemente von V .

Wir führen nun eine geometrische Struktur auf dem Vektorraum V ein, die insbesondere auch erklären wird, warum wir die Eigenschaft

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-ikx} dx = \delta_{n,k} \cdot 2\pi$$

als Orthogonalität der Funktionen e^{ikx} bezeichnet haben. (Der Leser vergleiche die folgende Konstruktion auch mit „Normen aus Skalarprodukten“ in 2.3.)

Definition (*Skalarprodukt für periodische Funktionen*)

Für alle $f, g \in V$ setzen wir:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

In der Definition verwenden wir, dass das Produkt zweier integrierbarer Funktionen wieder integrierbar ist.

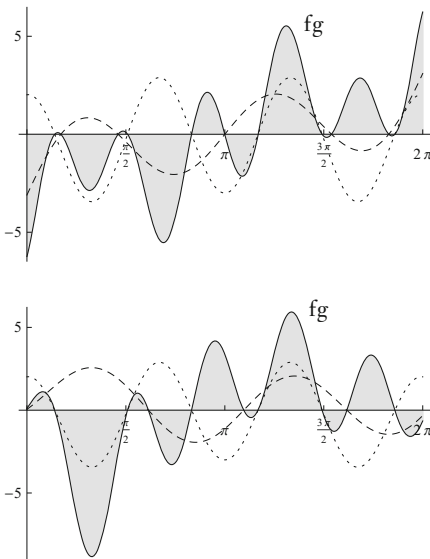


Illustration des Skalarprodukts für reelle Funktionen f und g . Im oberen Bild gilt $\langle f, g \rangle = 0$, da der signierte Flächeninhalt aus Symmetriegründen gleich 0 ist. Im unteren Bild überwiegen die negativen Flächen, sodass hier $\langle f, g \rangle < 0$.

Lesen wir das Integral als unendlich feine Summe, so besitzt das Skalarprodukt die vertraute Form „Summe von Produkten“ der kanonischen Skalarprodukte im \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n . In der Tat gelten bis auf eine Ausnahme alle aus der Linearen Algebra bekannten Eigenschaften eines Skalarprodukts für \mathbb{C} -Vektorräume:

Satz (*Eigenschaften des Skalarprodukts auf V*)

Für alle $f, g, h \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(a) \quad \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle, \quad \langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle,$$

$$(b) \quad \langle \alpha f, g \rangle = \bar{\alpha} \langle f, g \rangle, \quad \langle f, \alpha g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle,$$

$$(c) \quad \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle},$$

$$(d) \quad \langle f, f \rangle \in \mathbb{R} \text{ und } \langle f, f \rangle \geq 0,$$

$$(e) \quad \text{Ist } f \text{ stetig und } f \neq 0, \text{ so ist } \langle f, f \rangle > 0.$$

Zu einem waschechten Skalarprodukt fehlt nur die Gültigkeit der letzten Eigenschaft für alle Elemente aus V . Trotzdem ist es üblich, $\langle f, g \rangle$ als Skalarprodukt zu bezeichnen. In der Sprache der Linearen Algebra liegt lediglich eine positiv semidefinite Hermitesche Form auf V vor.

Aus den Eigenschaften (a) – (e) des Skalarprodukts folgt, wie in der Linearen Algebra gezeigt wird:

Satz (*Cauchy-Schwarz-Ungleichung*)

Für alle $f, g \in V$ gilt:

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle. \quad (\text{Ungleichung von Cauchy-Schwarz})$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts definieren wir:

Definition (*2-Seminorm für periodische Funktionen*)

Für alle $f \in V$ setzen wir

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Die reelle Zahl $\|f\|_2$ heißt die *2-Seminorm* von f .

Die 2-Seminorm einer Funktion f ist groß, wenn

$$2\pi \|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} f(x) dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

groß ist. Durch das Auftauchen des Quadrats im Integranden zählen Flächen unterhalb der x -Achse wie Flächen oberhalb der x -Achse.

Die 2-Seminorm hat in der Tat die Eigenschaften einer Seminorm:

Satz (*Eigenschaften der 2-Seminorm*)

Für alle $f, g \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(a) \quad \|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2,$$

$$(b) \quad \|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2, \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$(c) \quad \text{Ist } f \text{ stetig und } \|f\|_2 = 0, \text{ so ist } f = 0.$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung wird die Ungleichung von Cauchy-Schwarz benutzt.

Wäre $\langle f, g \rangle$ ein echtes (positiv definites) Skalarprodukt, so würde die Eigenschaft (c) wieder für alle Vektoren gelten. Dies ist aber nicht der Fall, und deswegen erhalten wir nur eine Seminorm. Die Vektoren mit der 2-Seminorm 0 bilden einen Unterraum W von V . Wir können sie miteinander identifizieren und im Quotientenraum V/W arbeiten. Dadurch würde unser Skalarprodukt echt werden. Für unsere Absichten erscheint dieser technische Schritt aber verzichtbar.

Die 2-Seminorm induziert den folgenden Konvergenzbegriff:

Definition (*Konvergenz im quadratischen Mittel*)

Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V und $f \in V$. Dann *konvergiert* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *im quadratischen Mittel* gegen f , in Zeichen

$$\lim_n f_n = f \quad (\text{in 2-Seminorm}),$$

$$\text{falls } \lim_n \|f - f_n\|_2 = 0.$$

Wir formulieren diesen Konvergenzbegriff nochmal explizit mit Hilfe von Integralen. Da $\lim_n \sqrt{x_n} = 0$ für reelle $x_n \geq 0$ genau dann gilt, wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, können wir die in der Seminorm verwendete Wurzel weglassen. Gleiches gilt für den Normierungsfaktor $1/(2\pi)$ der Definition des Skalarprodukts. Damit erhalten wir:

Satz (*Formulierungen der Konvergenz im quadratischen Mittel*)

Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V und $f \in V$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$(a) \quad \lim_n f_n = f \quad (\text{in 2-Seminorm}).$$

$$(b) \quad \lim_n \int_0^{2\pi} \overline{(f_n(x) - f(x))} (f_n(x) - f(x)) \, dx = 0.$$

$$(c) \quad \lim_n \int_0^{2\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = 0.$$

In der dritten Fassung wird die Bezeichnung als „Konvergenz im quadratischen Mittel“ besonders deutlich. Wir mitteln die Quadrate der punktwisen Abstände zwischen f_n und f und fordern, dass dieses Mittel gegen 0 konvergiert. Auf das Quadrieren im Integranden können wir hier nicht verzichten, wir erhielten sonst einen anderen Konvergenzbegriff.

Gilt $\lim_n f_n = f$ in 2-Seminorm, und ist g an höchstens endlich vielen Stellen verschieden von f , so gilt auch $\lim_n f_n = g$. Die Eindeutigkeit des Limes gilt aber in der oben angesprochenen Faktorisierung V/W .

Wir wollen nun den neuen Konvergenzbegriff einordnen. Einfach zu sehen ist, dass die Konvergenz in der Supremumsnorm die Konvergenz in der 2-Seminorm nach sich zieht:

Satz (*Einordnung der quadratischen Konvergenz*)

Eine gleichmäßig gegen ein $f \in V$ konvergente Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V konvergiert im quadratischen Mittel gegen f :

$$\lim_n \|f - f_n\|_{\sup} = 0 \quad \text{impliziert} \quad \lim_n \|f - f_n\|_2 = 0.$$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$, und sei n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\int_0^{2\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 dx = \varepsilon^2 2\pi.$$

– Damit gilt (c) des obigen Satzes.

Dagegen bestehen keine Implikationen zwischen der punktwisen Konvergenz und der Konvergenz im quadratischen Mittel.

Beispiel

Seien $f_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \dots, 2^n - 1$ die Elemente von V mit

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [2\pi k/2^n, 2\pi(k+1)/2^n[, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in [0, 2\pi[$. Dann divergiert die Folge

$$f_{0,0}, f_{1,0}, f_{1,1}, f_{2,0}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, \dots, f_{n,0}, \dots, f_{n,2^n-1}, \dots$$

punktweise, aber sie konvergiert im quadratischen Mittel gegen 0.

Die periodischen Funktionen g_n mit $g_n|_{[0, 2\pi[} = n \cdot 1_{]0, 1/n[}$ für alle $n \geq 1$ zeigen, dass umgekehrt auch punktweise Konvergenz und Divergenz im quadratischen Mittel vorliegen kann.

Der Konvergenzsatz für integrierbare Funktionen

Wir kehren nun zu den Fourier-Reihen zurück und betrachten sie im Licht unserer geometrischen Vektorraumstruktur. Aus der Definition des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

und der Definition der Fourier-Koeffizienten $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ einer Funktion f ,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{e^{ikx}} f(x) dx \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z},$$

lesen wir ab, dass

$$c_k = \langle e^{ikx}, f \rangle \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{Skalarproduktarstellung der Koeffizienten})$$

Für alle k lässt sich der Fourier-Koeffizient $c_k = \langle e^{ikx}, f \rangle$ als der Schwingungsanteil der Funktion f für die Frequenz k ansehen, ganz so, wie sich für das kanonische Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 die reelle Zahl $\langle e_3, v \rangle = v_3$ mit $e_3 = (0, 0, 1)$ und $v = (v_1, v_2, v_3)$ als der Höhenanteil des Vektors v ansehen lässt.

Die Orthogonalitätseigenschaft können wir nun einfach schreiben als

$$\langle e^{inx}, e^{ikx} \rangle = \delta_{n,k} \quad \text{für alle } n, k \in \mathbb{Z}.$$

Speziell gilt $\|e^{ikx}\|_2 = 1$ für alle k . Die Vektoren e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$, unseres Vektorraumes V sind also, in der Sprache der Linearen Algebra, orthonormal:

Definition (*orthogonal, orthonormal*)

Zwei Vektoren $f, g \in V$ heißen *orthogonal*, falls $\langle f, g \rangle = 0$. Ein $A \subseteq V$ heißt *orthogonal*, falls je zwei verschiedene Elemente von A orthogonal sind. Gilt zudem $\|f\|_2 = 1$ für alle $f \in A$, so heißt A *orthonormal*.

Die Frage ist nun, ob unsere orthonormalen Vektoren e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$, ausreichen, alle Vektoren aus V in einer bestimmten Weise darzustellen. Im Kontrast zu den Begriffen „Erzeugendensystem“ und „Orthonormalbasis“ der Linearen Algebra haben wir unendliche Reihen und nicht nur endliche Linearkombinationen von Vektoren im Blick. Für jedes stetige und stückweise stetig differenzierbare $f \in V$ wissen wir bereits, dass

$$f = \lim_n FS_n(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = FS(f) \quad (\text{gleichmäßig}).$$

Ein bestechendes Ergebnis ist nun, dass die Konvergenzaussage für alle Vektoren $f \in V$ richtig ist, wenn wir die gleichmäßige Konvergenz zur Konvergenz im quadratischen Mittel abschwächen. Die Vektoren e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$, bilden also in

diesem Sinne tatsächlich eine Orthonormalbasis von V . Dass dies so ist, wird sich aus dem gleichmäßigen Konvergenzatz und der folgenden Analyse des engen Zusammenhangs zwischen den Fourier-Reihen und dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$ ergeben.

Wir betrachten zunächst das Skalarprodukt zwischen f und den Partialsummen $FS_n(f)$ der Fourier-Reihe von f . Die Eleganz des Vektorraumkalküls ist hier besonders augenfällig. Wir notieren und berechnen keine Integrale mehr, sondern jonglieren nur noch mit den Eigenschaften des Skalarprodukts und der Orthonormalität der Vektoren e^{ikx} .

Satz (*Approximation in 2-Seminorm, Bessel-Ungleichung*)

Sei $f \in V$, und seien $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ die Fourier-Koeffizienten von f . Dann gilt für alle n :

$$(a) \quad \langle f, FS_n(f) \rangle = \langle FS_n(f), f \rangle = \langle FS_n(f), FS_n(f) \rangle = \sum_{-n \leq k \leq n} |c_k|^2,$$

$$(b) \quad \|f - FS_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{-n \leq k \leq n} |c_k|^2,$$

$$(c) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2, \quad (\text{Bessel-Ungleichung})$$

$$(d) \quad \|f - FS_n(f)\|_2 < \|f - \sum_{-n \leq k \leq n} d_k e^{ikx}\|_2$$

für alle $d_{-n}, \dots, d_n \in \mathbb{C}$ mit $(d_{-n}, \dots, d_n) \neq (c_{-n}, \dots, c_n)$. (*Optimalität*)

Beweis

zu (a):

$$\begin{aligned} \langle f, FS_n(f) \rangle &= \langle f, \sum_{-n \leq k \leq n} c_k e^{ikx} \rangle = \sum_{-n \leq k \leq n} c_k \langle f, e^{ikx} \rangle = \\ \sum_{-n \leq k \leq n} c_k \overline{c_k} &= \sum_{-n \leq k \leq n} |c_k|^2, \end{aligned}$$

wobei wir neben den elementaren Eigenschaften des Skalarprodukts nur verwenden, dass

$$c_k = \langle e^{ikx}, f \rangle = \overline{\langle f, e^{ikx} \rangle} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $\langle f, FS_n(f) \rangle \in \mathbb{R}$ gilt weiter

$$\langle FS_n(f), f \rangle = \overline{\langle f, FS_n(f) \rangle} = \langle f, FS_n(f) \rangle.$$

Ebenso liefern die Skalarprodukteigenschaften und die Orthonormalität der Vektoren e^{ikx} , dass

$$\langle FS_n(f), FS_n(f) \rangle = \langle \sum_{-n \leq k \leq n} c_k e^{ikx}, \sum_{-n \leq j \leq n} c_j e^{ijx} \rangle =$$

$$\sum_{-n \leq k, j \leq n} \overline{c_k} c_j \langle e^{ikx}, e^{ijx} \rangle = \sum_{-n \leq k \leq n} \overline{c_k} c_k =$$

$$\sum_{-n \leq k \leq n} |c_k|^2.$$

zu (b):

$$\begin{aligned}\|f - FS_n(f)\|_2^2 &= \langle f - FS_n(f), f - FS_n(f) \rangle = \\ \langle f, f \rangle - \langle f, FS_n(f) \rangle - \langle FS_n(f), f \rangle + \langle FS_n(f), FS_n(f) \rangle &= \text{nach (a)} \\ \|f\|_2^2 - \sum_{-n \leq k \leq n} |c_k|^2.\end{aligned}$$

zu (c):

Folgt aus (b), da $\|f - FS_n(f)\|_2^2 \geq 0$.

zu (d):

Seien $d_{-n}, \dots, d_n \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|f - \sum_{-n \leq k \leq n} d_k e^{ikx}\|_2^2 &= \\ \langle f - \sum_{-n \leq k \leq n} d_k e^{ikx}, f - \sum_{-n \leq k \leq n} d_k e^{ikx} \rangle &= \\ \langle f, f \rangle - \sum_{-n \leq k \leq n} (d_k \langle f, e^{ikx} \rangle + \overline{d_k} \langle e^{ikx}, f \rangle) + \sum_{-n \leq k \leq n} |d_k|^2 &= \\ \|f\|_2^2 + \sum_{-n \leq k \leq n} (|d_k|^2 - d_k \overline{c_k} - \overline{d_k} c_k) &= \\ \|f\|_2^2 + \sum_{-n \leq k \leq n} ((c_k - d_k)(\overline{c_k} - \overline{d_k}) - |c_k|^2) &= \\ \|f\|_2^2 - \sum_{-n \leq k \leq n} |c_k|^2 + \sum_{-n \leq k \leq n} |c_k - d_k|^2 &= \text{nach (b)} \\ \|f - FS_n(f)\|_2^2 + \sum_{-n \leq k \leq n} |c_k - d_k|^2.\end{aligned}$$

Dies zeigt zusammen mit der Monotonie der Wurzel die Behauptung, da der zweite Summand in der letzten Zeile positiv ist, falls mindestens ein d_k von c_k verschieden ist.

Die Optimalität besagt, dass jede Partialsumme $FS_n(f)$ der Fourier-Reihe von f die im Sinne des quadratischen Mittels bestmögliche Approximation an f unter allen Linearkombinationen der Funktionen e^{-inx}, \dots, e^{inx} darstellt. Für reellwertige f ist jede Partialsumme $FS_n(f)$ die in diesem Sinne bestmögliche trigonometrische Approximation n -ten Grades an die Funktion f .

Wir fragen nun, ob in der Bessel-Ungleichung sogar Gleichheit gilt. Hier sind folgende Sprechweisen üblich:

Definition (*Parseval-Gleichung, Vollständigkeitsrelation*)

Gilt in der Bessel-Ungleichung Gleichheit, also

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \|f\|_2^2,$$

so sagen wir, dass die *Parseval-Gleichung* für f gilt oder dass f die *Vollständigkeitsrelation* erfüllt.

Die Bezeichnung „Vollständigkeit“ bringt hier zum Ausdruck, dass die Funktion f außer den Schwingungsanteilen e^{ikx} keine im Sinne der 2-Seminorm nennenswerten Anteile besitzt. Sie ist äquivalent zur Konvergenz der Fourier-Reihe von f gegen f im quadratischen Mittel:

Korollar (*Konvergenzkriterium*)

Sei $f \in V$, und seien $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ die Fourier-Koeffizienten von f . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $\lim_n FS_n(f) = f$ (in 2-Seminorm).
- (b) Es gilt die Parseval-Gleichung für f .

Beweis

Die Behauptung folgt unmittelbar aus Teil (b) des obigen Satzes und der – Definition der Konvergenz im quadratischen Mittel.

Wir notieren die Parseval-Gleichung noch explizit für Fourier-Reihen in reeller Darstellung:

Satz (*Vollständigkeitsrelation in reeller Darstellung*)

Sei $f \in V$ reellwertig, und es gelte die Parseval-Gleichung für f . Dann gilt:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k^2 + b_k^2),$$

wobei

$$FS(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die Fourier-Reihe von f in reeller Darstellung ist.

Beweis

Die Aussage folgt aus

$$|c_0|^2 = \frac{a_0^2}{4} \quad \text{und} \quad |c_k|^2 = \frac{a_k^2 + b_k^2}{4} \quad \text{für alle } k \neq 0$$

und

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k \geq 1} 2 |c_k|^2.$$

Die Vollständigkeitsrelation liefert zusammen mit den Konvergenzsätzen der Theorie eine neue Methode zur Bestimmung von unendlichen Summen. Ein Beispiel hierzu werden wir unten kennenlernen.

Zur Rückführung des quadratischen Konvergenzsatzes auf den gleichmäßigen Konvergenzsatz fehlt nun nur noch eine Beobachtung:

Satz (*Approximationssatz*)

Seien $f \in V$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $g \in V$ mit $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$.

Beweis

Wir zeigen die Aussage für reellwertige f . Der Fall $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ergibt sich hieraus durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil. Ohne Einschränkung dürfen wir zudem $|f| \leq 1/2$ annehmen, denn ist $f \in V$ mit $|f| \leq s$ und $\|f/(2s) - g\|_2 \leq \varepsilon/(2s)$ für ein g , so ist $\|f - 2sg\|_2 \leq \varepsilon$. Seien also g_1, g_2 Treppenfunktionen auf $[0, 2\pi]$ mit

$$-\frac{1}{2} \leq g_1 \leq f|_{[0, 2\pi]} \leq g_2 \leq \frac{1}{2}, \quad I(g_2 - g_1) \leq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Für alle y mit $|y| \leq 1$ ist $y^2 \leq |y|$, und damit gilt

$$\begin{aligned} \|f - g_1\|_2^2 &\leq \int_0^{2\pi} |f(x) - g_1(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - g_1(x)| dx \leq \\ &\int_0^{2\pi} g_2(x) - g_1(x) dx \leq \frac{\varepsilon^2}{4}. \end{aligned}$$

Durch Ersetzen der Sprünge der Treppenfunktion g_1 durch hinreichend steile Geraden können wir ein stetiges und stückweise lineares g finden mit $|g| \leq 1/2$ und $I(|g_1 - g|) \leq \varepsilon^2/4$. Dann gilt

$$\|f - g\|_2 \leq \|f - g_1\|_2 + \|g_1 - g\|_2 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zeigen:

Satz (*Konvergenzsatz für integrierbare Funktionen*)

Sei $f \in V$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe $FS(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ von f im quadratischen Mittel gegen f , und es gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2.$$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$, und sei $g \in V$ wie im Approximationssatz für $\varepsilon/3$, sodass also

$$(1) \quad \|f - g\|_2 \leq \varepsilon/3.$$

Nach dem gleichmäßigen Konvergenzsatz konvergiert $FS(g)$ gleichmäßig und damit auch im quadratischen Mittel gegen g . Also existiert ein n_0 mit

$$(2) \quad \|g - FS_n(g)\|_2 \leq \varepsilon/3 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Schließlich ist nach der Bessel-Ungleichung auch

$$(3) \quad \|FS_n(f) - FS_n(g)\|_2 = \|FS_n(f - g)\|_2 \leq \|f - g\|_2 \leq \varepsilon/3.$$

Damit gilt aber für alle $n \geq n_0$:

$$\|f - \text{FS}_n(f)\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - \text{FS}_n(g)\|_2 + \|\text{FS}_n(g) - \text{FS}_n(f)\|_2 \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass $\lim_n \|f - \text{FS}_n(f)\|_2 = 0$. Wir wissen bereits, dass dies

- gleichwertig zur Gültigkeit der Vollständigkeitsrelation für f ist.

Beispiel: Noch einmal die Sägezahnfunktion

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die schon in Beispiel 3 oben betrachtete 2π -periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} (\pi - x)/2, & \text{falls } x \in]0, 2\pi[, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Wir hatten gesehen, dass

$$\text{FS}(f)(x) = \frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wegen $f \in V$ gilt aber auch Konvergenz im quadratischen Mittel. Die reelle Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k^2 + b_k^2)$$

liefert, dass die Zahlen

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x)^2 dx = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{(x - \pi)^3}{3} \right|_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{12\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

und

$$\sum_{k \geq 1} |b_k|^2 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$$

identisch sind. Damit haben wir die Eulersche Summe über die reziproken Quadrate erneut gefunden.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Dagegen ist keine Berechnung der Summen $\sum_{k \geq 1} 1/k^3$ oder $\sum_{k \geq 1} 1/k^5$ mit Hilfe von Fourier-Reihen oder anderen Methoden bekannt (vgl. 2.4 in Band 1).

Der Satz von Parseval

Der Konvergenzsatz erlaubt uns die Berechnung des Skalarprodukts $\langle f, f \rangle$ mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten von f . Wir wollen dieses Ergebnis nun noch verallgemeinern, um ein beliebiges Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$ mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten von f und g zu berechnen. Hierzu müssen wir gar keine neuen Untersuchungen durchführen, denn das Skalarprodukt lässt sich durch die in Abschnitt 2.3 diskutierte Polarisationsformel aus der Norm rekonstruieren: Für jeden euklidischen \mathbb{R} -Vektorraum V gilt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \left(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 \right),$$

und für jeden unitären \mathbb{C} -Vektorraum V gilt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \left(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|if + g\|^2 - i\|if - g\|^2 \right)$$

für alle $f, g \in V$, wobei $\|\cdot\|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm ist. Zum Beweis wird nicht benötigt, dass $\langle f, f \rangle = 0$ nur für $f = 0$ gültig ist, weswegen die Polarisationsformel auch für unseren Vektorraum V anwendbar sind. Wir erhalten:

Satz (*Satz von Parseval*)

Seien $f, g \in V$, und seien $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ und $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ die Fourier-Koeffizienten von f bzw. g . Dann gilt:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{c_k} d_k.$$

Beweis

Nach der Polarisationsformel für V , dem Konvergenzsatz und der Polarisationsformel für das kanonische Skalarprodukt $\langle c, d \rangle = \overline{c}d$ in \mathbb{C}^1 gilt

$$\begin{aligned} 4 \langle f, g \rangle &= \|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2 + i\|if + g\|_2^2 - i\|if - g\|_2^2 = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k + d_k|^2 - |c_k - d_k|^2 + i|ic_k + d_k|^2 - i|ic_k - d_k|^2 = \\ &= 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{c_k} d_k. \end{aligned}$$

Damit haben wir das durch ein Integral definierte Skalarprodukt in V vollständig auf Fourier-Reihen zurückgeführt. Kommt es uns nur auf die quadratische Konvergenz an, so können wir eine Funktion $f \in V$ durch die Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ihrer Fourier-Koeffizienten ersetzen. Das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$ berechnet sich dann wie gewohnt als Summe von Einzelprodukten.

Ausblick: Die Fourier-Transformation

Wir haben bislang nur periodische Funktionen untersucht. Eine natürliche Frage ist, ob sich auch eine beliebige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in Elementarschwingungen zerlegen lässt. Dies ist für viele Funktionen möglich, wenn wir die Frequenzen der Schwingungen nicht mehr diskret, sondern kontinuierlich wählen, also statt e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$, allgemeiner e^{ikx} , $k \in \mathbb{R}$, zur Zerlegung der Funktion verwenden und die Summe einer Fourier-Reihe durch ein uneigentliches Integral ersetzen. Wir definieren:

Definition (*Fourier-Transformation*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $I(|f|) < \infty$, d.h. $|f|$ ist uneigentlich integrierbar mit endlichem Integral. Dann setzen wir für alle $k \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Die Funktion $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt die *Fourier-Transformierte* von f .

Die Definition der Fourier-Transformierten ist ein kontinuierliches Analogon der Definition der Fourier-Koeffizienten. Um den Zusammenhang zwischen f und \hat{f} zu ergründen, betrachten wir ein (groß gedachtes) $p > 0$ und definieren für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$(\+) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{px}{\pi}\right) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-ikx\pi/p} dx.$$

Die komplexen Zahlen c_k sind die Fourier-Koeffizienten der 2π -periodischen Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = f\left(\frac{px}{\pi}\right) \quad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi].$$

Die Funktion g entsteht durch Einschränkung von f auf $[-p, p]$, horizontale Stauchung dieser Einschränkung auf $[-\pi, \pi]$ und periodische Fortsetzung. Im wesentlichen unternehmen wir also eine diskrete Fourier-Analyse von $f|_{[-p, p]}$. Da f integrierbar ist, konvergiert die Fourier-Reihe von g im quadratischen Mittel gegen g . Wir nehmen im Folgenden an, dass dies sogar punktweise der Fall ist. Dann gilt

$$\sum_k c_k e^{ikx} = g(x) = f\left(\frac{px}{\pi}\right) \quad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi]$$

und damit

$$(\++) \quad \sum_k c_k e^{ikx\pi/p} = f(x) \quad \text{für alle } x \in [-p, p].$$

Definieren wir nun

$$\hat{f}_p(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R},$$

so gilt nach (+)

$$c_k = \frac{\pi}{p} \hat{f}_p\left(\frac{\pi k}{p}\right) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Damit erhalten wir nach (++), dass

$$(\#) \quad \sum_k \frac{\pi}{p} \hat{f}_p\left(\frac{\pi k}{p}\right) e^{ikx\pi/p} = f(x) \quad \text{für alle } x \in [-p, p].$$

Die linke Seite von (#) hat für jedes $x \in [-p, p]$ die Form einer „uneigentlichen“, sich über ganz \mathbb{R} erstreckenden Riemann-Summe der Funktion h mit

$$h(u) = \hat{f}_p(u) e^{iux} \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}$$

bezüglich einer Partition von \mathbb{R} der Feinheit π/p mit unendlich vielen Stützstellen $\pi k/p$, $k \in \mathbb{Z}$. Beschränken wir k auf Werte in $\{-n, \dots, n\}$, so erhalten wir eine echte Riemann-Summe, aber die Übereinstimmung mit $f(x)$ geht dabei verloren. Ein sorgfältig durchgeführter doppelter Grenzübergang „ $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$ “ liefert das folgende Ergebnis:

Satz (*Fourier-Rücktransformation*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $I(|f|) < \infty$. Weiter sei f stückweise stetig differenzierbar und es gelte $f(x) = f(x\pm)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-p}^p \hat{f}(k) e^{ikx} dk = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ist $I(|\hat{f}|) < \infty$, so gilt stärker

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk = f(x), \quad \text{d.h.} \quad \hat{\hat{f}}(-x) = \frac{f(x)}{2\pi} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Feinheit des Ergebnisses lässt sich durch eine Stetigkeitsüberlegung illustrieren: Die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ einer stückweise stetigen Funktion f ist stetig, und damit ist auch $\mathcal{F}(\hat{f})$ stetig, vorausgesetzt, $\mathcal{F}(\hat{f})$ existiert, d.h. es gilt $I(|\hat{f}|) < \infty$. Ist also f wie im Satz unstetig, so gilt notwendig

$$I(|\hat{f}|) = \infty,$$

da sonst f wegen $\mathcal{F}(\hat{f})(-x) = f(x)$ stetig wäre. Dieses Phänomen haben wir bei den Fourier-Reihen mit „ $\sum_k |c_k| = \infty$ “ schon kennengelernt. Ein instruktives Beispiel für die Fourier-Transformation ist:

Beispiel

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die arithmetisch gemittelte Indikatorfunktion von $[-1, 1]$, d. h.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x| < 1, \\ 1/2, & \text{falls } |x| = 1, \\ 0, & \text{falls } |x| > 1. \end{cases}$$

$$\hat{f}(k) = \frac{\sin(k)}{\pi k},$$

stetig fortgesetzt

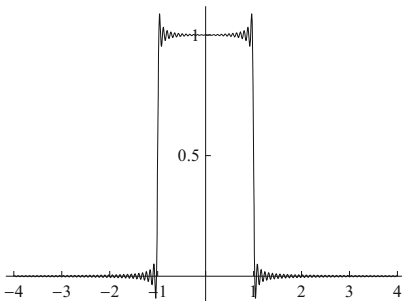
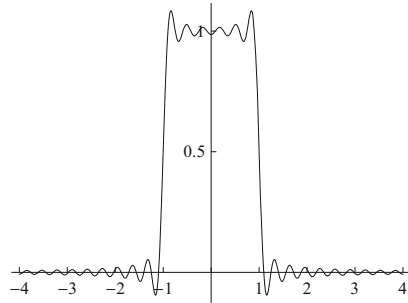
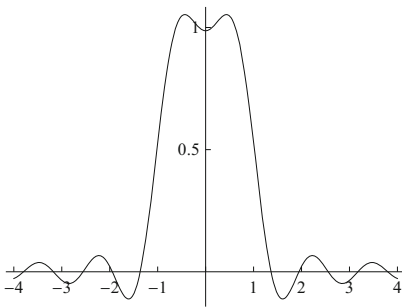
Dann gilt für alle $k \in \mathbb{R}^*$

$$2\pi \hat{f}(k) = \int_{-1}^1 e^{-ikx} dx =$$

$$\frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{e^{-ik} - e^{ik}}{-ik} = \frac{2}{k} \frac{e^{ik} - e^{-ik}}{2i} = 2 \frac{\sin(k)}{k}.$$

Weiter ist $\pi \hat{f}(0) = 1$. Da das uneigentliche Integral über $|\sin(k)/k|$, $k \in \mathbb{R}$, unendlich ist, gilt $I(|\hat{f}|) = \infty$. Der Satz über die Rücktransformation liefert für $x = 0$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(k)}{k} dk = \frac{\pi}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-p}^p \hat{f}(k) e^{ik \cdot 0} dk = \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2}.$$



die Diagramme zeigen

$$\int_{-p}^p \hat{f}(k) e^{ikx} dk =$$

$$\int_{-p}^p \frac{\sin(k) \cos(kx)}{k\pi} dk$$

in der Variablen x für

$$p = 5, 20, 80$$

Die Fourier-Transformation führt also aus der Klasse aller uneigentlichen integrierbaren Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|I(f)| < \infty$ heraus, und dies ist sogar für Funktionen möglich, die außerhalb eines kompakten Intervalls null sind. Eine Einschränkung der Funktionen hat in dieser Hinsicht bessere Eigenschaften:

Definition (*schnell fallende Funktion, Schwartz-Raum*)

Ein $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, falls für alle $m \geq 1$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^m f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^m f(x) = 0.$$

Ist f glatt und $f^{(n)}$ schnell fallend für alle n , so heißt f eine *Schwartz-Funktion*. Die Menge der Schwartz-Funktionen heißt der *Schwartz-Raum*.

Das vielleicht wichtigste Beispiel für eine Schwartz-Funktion ist die Gaußsche Glockenkurve. Wir werden sie gleich noch genauer betrachten.

Die Bedeutung der Schwartz-Funktionen zeigt:

Satz (*Fourier-Transformation einer Schwartz-Funktion*)

(a) Die Fourier-Transformation ist eine Bijektion auf dem Schwartz-Raum: Für jede Schwartz-Funktion f ist $\mathcal{F}(f)$ eine Schwartz-Funktion und zudem gibt es eine Schwartz-Funktion g mit $\mathcal{F}(g) = f$.

(b) Für jede Schwartz-Funktion f und alle n gilt (mit Variablen x für f und k für $\mathcal{F}(f)$):

$$\mathcal{F}(f)^{(n)} = (-i)^n \mathcal{F}(x^n f),$$

$$\mathcal{F}(f^{(n)}) = i^n k^n \mathcal{F}(f). \quad (\text{Ableitungsregeln})$$

(c) Sind f, g Schwartz-Funktionen, so ist

$$\langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle = \langle f, g \rangle, \quad \text{speziell also } \|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2.$$

Die Ableitungsregel gehört zu den wichtigsten Eigenschaften der Fourier-Transformation. Die Ableitung einer Funktion wird durch die Transformation zu einer einfachen Multiplikation. Um f abzuleiten, kann man $\mathcal{F}(f)$ bilden, mit ik multiplizieren und das Ergebnis rücktransformieren.

Die erste Regel erhält man durch Differenzieren unter dem Integral:

$$\begin{aligned} 2\pi \mathcal{F}(f)' &= \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_k (f(x) e^{-ikx}) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -i x f(x) e^{-ikx} dx = -i \mathcal{F}(xf). \end{aligned}$$

Dass dies erlaubt ist, ist natürlich zu beweisen. Die zweite Regel ergibt sich dagegen durch partielle Integration:

$$2\pi \mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} dx = 0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ik) e^{-ikx} dx = ik \mathcal{F}(f).$$

Als Anwendung der beiden Ableitungsregeln bestimmen wir die Fourier-Transformierte der Gaußschen Glockenkurve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x^2/2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hierzu verwenden wir folgende Charakterisierung der Gauß-Funktion durch ihre Differentialgleichung: Für f gilt $f'(x) = -x f(x)$. Ist nun $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion mit $g'(x) = -x g(x)$, so gilt

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)' = \frac{g'(x) f(x) - f'(x) g(x)}{f^2(x)} = \frac{-x g(x) f(x) + x f(x) g(x)}{f^2(x)} = 0,$$

so dass $g/f = c = g(0)/f(0) = g(0)$ und damit $g = f g(0)$. Damit können wir nun den folgenden Satz beweisen, der die Glockenkurve auszeichnet: Sie reproduziert sich bei der Fourier-Transformation.

Satz (*Fourier-Transformation der Gauß-Funktion*)

Für die Gauß-Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-x^2/2)$, gilt

$$\hat{f} = \frac{f}{\sqrt{2\pi}}.$$

Beweis

Wegen $f'(x) = -x f(x)$ gilt nach den Ableitungsregeln

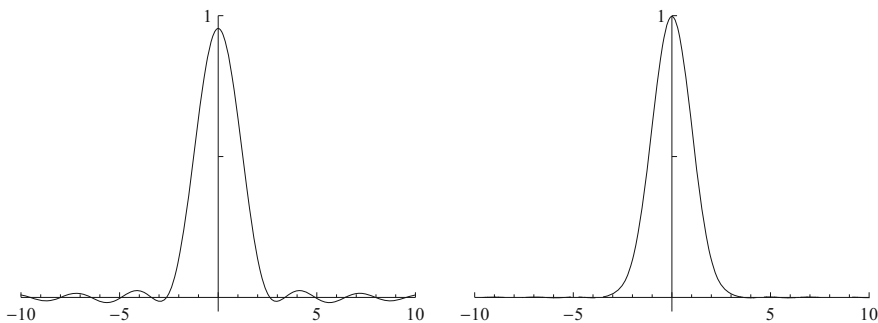
$$\mathcal{F}(f)' = -i \mathcal{F}(xf) = i \mathcal{F}(-xf) = i \mathcal{F}(f') = i i k \mathcal{F}(f) = -k \mathcal{F}(f).$$

Wegen

$$2\pi \mathcal{F}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i0x} dx = \sqrt{2\pi}$$

– folgt die Behauptung aus der Vorüberlegung (mit $g = \mathcal{F}(f)$).

Oft wird die Fourier-Transformierte aus Normierungsgründen mit dem Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ statt $1/(2\pi)$ definiert. Dann gilt $\hat{f} = f$ für die Gauß-Funktion.



$$\int_{-p}^p \hat{f}(k) e^{ikx} dk \quad \text{in der Variablen } x \text{ für } p = 2 \text{ (links) und } p = 3 \text{ (rechts)}$$

5. Abschnitt

Überblickswissen

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Erste Beispiele

Als Einstieg in die Welt der Differentialgleichungen betrachten wir einige Beispiele, die uns zum Teil schon in Band 1 begegnet sind. Wir fragen nach Funktionen f , deren Ableitungen eine vorgegebene Gleichung in $x, y, y', y'' \dots$ erfüllen, wenn wir „ $y = f(x)$ “ setzen.

Konvention

Eine Lösung f einer Differentialgleichung ist auf einem reellen nichtleeren Intervall I definiert. Ist nichts anderes gesagt, so ist $I = \mathbb{R}$. Zumeist sind die Werte von f reell, zuweilen betrachten wir auch komplexwertige Lösungen.

$$(1) \quad y' = 0$$

Lösungen: $f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Keine weiteren Lösungen:

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung hatten wir in Band 1 bereits gezeigt, dass keine weiteren Lösungen existieren: Jede Funktion mit Ableitung 0 ist konstant (betrachte $f(x_1) - f(x_2) = f'(p)(x_1 - x_2)$ für p zwischen x_1 und x_2 ; aus $f'(p) = 0$ folgt $f(x_1) = f(x_2)$).

$$(2) \quad y'' = 0$$

Lösungen: $f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

Keine weiteren Lösungen:

Es gelte $f'' = 0$. Dann gilt $(f')' = 0$. Nach (1) gibt es also ein a mit $f' = a$. Dann ist $(f(x) - ax)' = f'(x) - a = 0$. Wieder nach (1) gibt es also ein b mit $f(x) - ax = b$. Also ist $f(x) = ax + b$.

$$(3) \quad y' = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Lösungen: $f(x) = ax + b, \quad b \in \mathbb{R}$ beliebig

Keine weiteren Lösungen:

Es gelte $f' = a$. Dann gilt $f'' = 0$. Nach (2) gibt es also $a^*, b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^*x + b$. Wegen $f' = a$ gilt $a = a^*$.

$$(4) \quad y^{(n)} = 0, \quad n \geq 1$$

Lösungen: $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ beliebig.

Keine weiteren Lösungen:

Induktion nach $n \geq 1$. Den Induktionsanfang $n = 1$ bildet (1).

Im Induktionsschritt von n nach $n + 1$ gelte $f^{(n+1)} = 0$. Dann gilt $f^{(n)'} = 0$, also existiert ein a mit $f^{(n)} = a$. Dann gilt aber

$$\left(f(x) - \frac{ax^n}{n!} \right)^{(n)} = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es a_0, \dots, a_{n-1} mit

$$f(x) - \frac{ax^n}{n!} = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0,$$

sodass

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0, \quad \text{mit } a_n = a/n!.$$

$$(5) \quad y^{(n)} = \sum_{k \leq m} b_k x^k$$

Lösungen: $f(x) = \sum_{k \leq m} \frac{b_k x^{n+k}}{(k+n)^{[n]}} + \sum_{k < n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ beliebig,

mit der fallenden Potenz $(k+n)^{[n]} = (k+n) \dots (k+2)(k+1)$.

Keine weiteren Lösungen:

Wie in (4).

$$(6a) \quad y' = cy, \quad c \in \mathbb{R}$$

Lösungen: $f(x) = a e^{cx}$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Keine weiteren Lösungen:

Es gelte $f' = cf$. Dann gilt für g auf \mathbb{R} mit $g(x) = f e^{-cx}$

$$g'(x) = f'(x)e^{-cx} - f(x)c e^{-cx} = 0.$$

Also ist $g = a$ für ein a , und damit ist $f(x) = a e^{cx}$. (In Band 1 hatten wir mit diesem Argument bereits den Fall $c = 1$ behandelt.)

$$(6b) \quad y' = cy, \quad y \text{ komplexwertig, } c \in \mathbb{C}$$

Lösungen: $f(x) = d e^{cx}$, $d \in \mathbb{C}$ beliebig.

Keine weiteren Lösungen:

Auch komplexwertige f mit $f' = (\operatorname{Re}(f)', \operatorname{Im}(f)') = 0$ sind konstant. Das Argument in (6a) bleibt ebenfalls gültig, da $(e^{cx})' = c e^{cx}$ für alle $c \in \mathbb{C}$ und die Produktregel gelten.

$$(7) \quad y'' = cy, \quad c > 0$$

Lösungen: $f(x) = a e^{wx} + b e^{-wx}$, mit $w = \sqrt{c}$, $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

Keine weiteren Lösungen:

Es gelte $f'' = cf$. Dann gilt für $w = \sqrt{c}$:

$$(wf + f')' = wf' + f'' = wf' + cf = w(wf + f'),$$

$$(wf - f')' = wf' - f'' = wf' - cf = -w(wf - f').$$

Nach (6a) existieren also $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$wf(x) + f'(x) = a e^{wx},$$

$$wf(x) - f'(x) = b e^{-wx}.$$

Addition der beiden Identitäten und Division durch $2w \neq 0$ zeigt, dass

$$f(x) = \frac{a}{2w} e^{wx} + \frac{b}{2w} e^{-wx}.$$

Also hat f die gewünschte Form.

Alternative Darstellung der Lösungen:

$$f(x) = a \cosh(wx) + b \sinh(wx), \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Für den Kosinus und Sinus Hyperbolicus

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gilt $\cosh' = \sinh$ und $\sinh' = \cosh$, sodass wir die Lösungen von (7) auch als Linearkombinationen von $\cosh(wx)$ und $\sinh(wx)$ darstellen können.

$$(8) \quad y'' = -cy, \quad c > 0$$

Lösungen: $f(x) = a \cos(wx) + b \sin(wx)$, mit $w = \sqrt{c}$, $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

Keine weiteren Lösungen:

Es gelte $f'' = -cf$. Dann gilt für $w = \sqrt{c}$:

$$(i wf + f')' = i wf' - cf = i w (i wf + f'),$$

$$(i wf - f')' = i wf' + cf = -i w (i wf - f').$$

Nach (6b) existieren also $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$i wf(x) + f'(x) = d_1 e^{iwx}, \quad i wf(x) - f'(x) = d_2 e^{-iwx}.$$

Da f reellwertig ist, gilt also

$$f(x) = \frac{1}{2i w} (d_1 e^{iwx} + d_2 e^{-iwx}) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2i w} (d_1 e^{iwx} + d_2 e^{-iwx}) \right).$$

Wegen $e^{iwx} = \cos(wx) + i \sin(wx)$, $e^{-iwx} = \cos(wx) - i \sin(wx)$ hat der Term rechts die Form $a \cos(wx) + b \sin(wx)$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$.

Alternative Darstellung der Lösungen:

$f(x) = a \cos(wx + x_0)$, $w = \sqrt{c}$, $a > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig (Beweis als Übung).

$$(9) \quad y' = g(x), \quad g: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig.}$$

Lösungen: $f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + c$, $x_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Keine weiteren Lösungen:

Gilt $f' = g$, so ist f eine Stammfunktion von g .

$$(10) \quad y' = -y/x, \quad x > 0.$$

Lösungen: $f(x) = \frac{a}{x}$ für $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Keine weiteren Lösungen:

Sei $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) = -f(x)/x$. Dann gilt für alle $x > 0$

$$(f(x)x)' = f'(x)x + f(x) = -f(x) + f(x) = 0.$$

Also existiert ein a mit $f(x)x = a$, d.h., es gilt $f(x) = a/x$ für alle $x > 0$.

Differentialgleichungen und Anfangswertprobleme

Wir präzisieren nun die Problemstellung. Dabei betrachten wir zunächst nur reell- oder komplexwertige Funktionen. Später werden wir auch vektorwertige Funktionen zulassen.

Definition (*Differentialgleichung erster Ordnung*)

Für $P \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine stetige Funktion $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man den Ausdruck

$$y' = \varphi(x, y)$$

eine (*gewöhnliche reelle*) *Differentialgleichung erster Ordnung*. Eine *Lösung* der Differentialgleichung $y' = \varphi(x, y)$ ist eine auf einem reellen nichttrivialen Intervall I definierte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$f'(x) = \varphi(x, f(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung, so ist $\varphi(x, f(x))$ für alle $x \in I$ definiert. Der Graph der Lösung ist also eine Teilmenge des Definitionsbereichs P von φ . Ist etwa P ein Rechteck $[a, b] \times [c, d]$, so haben Lösungen die Form $f : I \rightarrow [c, d]$. Man strebt natürlich $I = [a, b]$ an, wir werden aber sehen, dass Lösungen nicht immer auf $[a, b]$ definiert werden können.

In analoger Weise werden *komplexwertige Differentialgleichungen* definiert. Die Funktion φ ist hier von der Form $\varphi : P \rightarrow \mathbb{C}$, $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Lösungen haben nun die Form $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, wobei I nach wie vor ein reelles Intervall ist.

Der Zusatz „erster Ordnung“ zeigt an, dass nur erste Ableitungen im Spiel sind. Allgemeiner kann man Differentialgleichungen höherer Ordnung betrachten, bei denen Ableitungen $y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}$ auftauchen können:

Definition (*Differentialgleichung höherer Ordnung*)

Für $n \geq 1$, $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und ein stetiges $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man den Ausdruck

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

eine (*gewöhnliche reelle*) *Differentialgleichung n -ter Ordnung*. Eine *Lösung* dieser Differentialgleichung ist eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f^{(n)}(x) = \varphi(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Die Bezeichnung „gewöhnlich“ deutet darauf hin, dass unsere Lösungen nur von einer Variablen x abhängen. Allgemeiner kann man *partielle Differentialgleichungen* betrachten, bei denen Ableitungen $\partial_1, \dots, \partial_n$ involviert sind.

Die Differentialgleichung „ $y' = y$ “ wird genau durch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig, gelöst. Erst durch eine Forderung wie „ $y(0) = 1$ “ wird die Lösung eindeutig. Differentialgleichungen mit derartigen Zusatzbedingungen nennt man *Anfangswertprobleme*:

Definition (*Anfangswertproblem*)

Ein *Anfangswertproblem* (kurz *AWP*) erster Ordnung hat die Form

$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Eine *Lösung* ist eine Lösung $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ von $y' = \varphi(x, y)$ mit $f(x_0) = y_0$.

Analog hat ein *Anfangswertproblem* n -ter Ordnung die Form

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

und eine *Lösung* dieses AWP ist eine Lösung der Differentialgleichung mit

$$f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) = y_1, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Bei einem Anfangswertproblem ist $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ ein Element des Definitionsbereichs von φ und für Lösungen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ muss insbesondere $x_0 \in I$ gelten.

Natürliche Fragen sind nun:

Unter welchen Bedingungen existiert eine Lösung? Wann ist eine Lösung eindeutig bestimmt? Wie findet man eine Lösung? Welche globalen Eigenschaften haben die Lösungen der Differentialgleichung?

Bevor wir einigen dieser Fragen nachgehen, betrachten wir:

Physikalische Motivation

Differentialgleichungen sind uns aufgrund des Newtonschen Gesetzes

„Kraft = Masse mal Beschleunigung“

seit der Schule bekannt. Wir betrachten ein Teilchen der Masse m , das sich zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ am Ort $x(t) \in \mathbb{R}^3$ befindet. Auf das Teilchen wirkt ein Kraftvektor F , der im Allgemeinen von der Zeit $t \in \mathbb{R}$, dem zugehörigen Ort $x(t) \in \mathbb{R}^3$ und der zugehörigen Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ des Teilchens abhängt. Befindet sich das Teilchen zur Anfangszeit t_0 am Anfangsort $x_0 \in \mathbb{R}^3$ mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}^3$, so erfüllt die Ortskurve $x(t)$ die Differentialgleichung

$$m \ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))$$

und zudem die Anfangswertbedingung

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0.$$

Dabei verwenden wir wie in diesem Kontext üblich die *Newtonsche Punktnotation* für die erste und zweite Zeitableitung $\dot{x}(t)$ bzw. $\ddot{x}(t)$ der Ortskurve.

Die Aufgabe besteht darin, eine Funktion $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = v_0$ zu finden, deren mit der Masse m multiplizierte zweite Zeitableitung für alle t der Vektor $F(t, x(t), \dot{x}(t))$ ist. Hat man $x(t)$ gefunden, so kann man vorhersagen, wie sich das Teilchen in Zukunft bewegen wird, und zurückverfolgen, wie sich das Teilchen in der Vergangenheit bewegt hat. Wir kommen auf diese „dynamische Interpretation“ einer Differentialgleichung später noch einmal zurück.

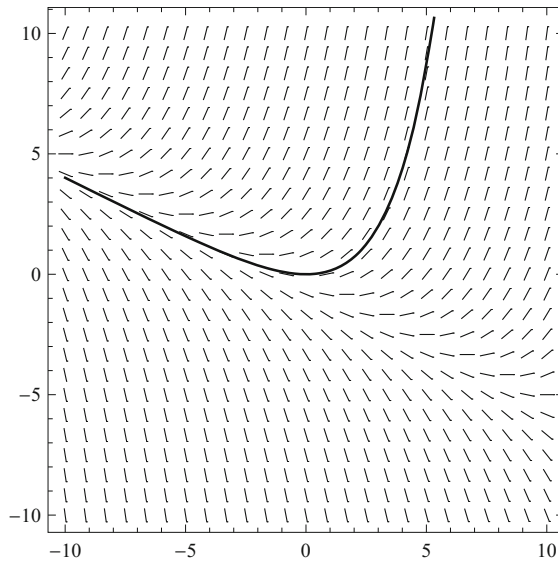
Das Richtungsfeld

Eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = \varphi(x, y), \quad \varphi : P \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \subseteq \mathbb{R}^2$$

gibt für jeden Punkt $(x, y) \in P$ eine Steigung $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}$ vor. Lösungen sind Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, die in allen $x \in I$ die Steigung $\varphi(x, f(x))$ besitzen. Diese Situation lässt sich sehr ansprechend visualisieren. Wir versehen hierzu P mit einem hinreichend feinen Punktgitter, und für jeden Punkt (x, y) des Gitters zeichnen wir ein Geradenstück durch (x, y) , das die Steigung $\varphi(x, y)$ besitzt. Dann verläuft der Graph einer Lösung von $y' = \varphi(x, y)$ entlang dieser Geradenstücke, d. h., die Geradenstücke, die den Graphen von f berühren, sind Tangentenstücke der Funktion.

Wir betrachten zwei Beispiele.



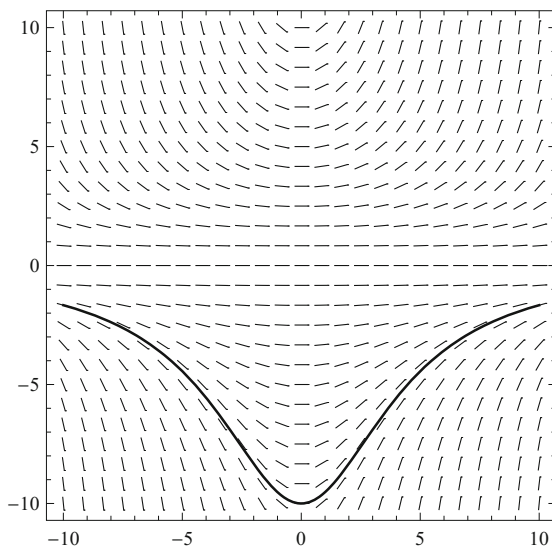
Visualisierung der Differentialgleichung

$$y' = y/2 + x/4, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Gezeigt ist zudem die Lösung

$$f(x) = e^{x^2/2} - x/2 - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

des zugehörigen AWP mit „ $y(0) = 0$ “. Wir werden unten sehen, wie diese Lösung gefunden werden kann.



Visualisierung der Differentialgleichung

$$y' = (x y^2)/100, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Das zugehörige AWP mit „ $y(0) = -10$ “ wird durch

$$f(x) = -200/(x^2 + 20), \quad x \in \mathbb{R},$$

gelöst. Auch hierzu werden wir ein Lösungsverfahren kennenlernen.

Statt der Geradenstücke können wir gleichwertig auch Richtungsvektoren verwenden, sodass ein zweidimensionales Vektorfeld auf P entsteht. Diese Überlegungen motivieren die folgende Definition.

Definition (*Richtungsfeld*)

Sei $y' = \varphi(x, y)$, $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$, eine Differentialgleichung. Dann heißt das Vektorfeld $\varphi^* : P \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi^*(x, y) = \frac{(1, \varphi(x, y))}{\|(1, \varphi(x, y))\|} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

das (*normierte*) *Richtungsfeld* der Differentialgleichung.

Zeichnen wir Richtungsfelder oder verwandte Visualisierungen, so sehen wir die Lösungen der Differentialgleichung näherungsweise vor Augen. Manchmal kann man die Lösungen so bereits erraten, aber auch wenn dies nicht möglich ist, gibt uns die graphische Darstellung oft wertvolle Informationen, zum Beispiel über den Definitionsbereich eines Anfangswertproblems oder über das Limesverhalten der Lösungen.

Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten einfach gebaute Differentialgleichungen, deren Lösungen wir relativ einfach bestimmen können. Zu den einfachsten Typen zählen:

Definition (*lineare Differentialgleichung, homogen, inhomogen*)

Eine Differentialgleichung heißt *linear*, wenn sie von der Form

$$y' = \varphi(x)y + \psi(x)$$

ist, mit Funktionen $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall I . Ist $\psi = 0$, so heißt die Differentialgleichung *homogen*. Andernfalls heißt sie *inhomogen*.

Die homogenen linearen Differentialgleichungen „ $y' = cy$ “ mit einer Konstanten c haben wir oben schon untersucht. Eine Verallgemeinerung der dortigen Argumentation liefert den folgenden Satz.

Satz (*Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen*)

Für ein stetiges $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ hat das AWP

$$y' = \varphi(x)y, \quad y(x_0) = y_0,$$

die eindeutige Lösung $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x \varphi(t) dt\right) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis

Die Funktion f existiert aufgrund der Stetigkeit von φ . Es gilt

$$f(x_0) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x_0} \varphi(t) dt\right) = y_0 e^0 = y_0,$$

$$f'(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x \varphi(t) dt\right) \varphi(x) = \varphi(x) f(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Also ist f eine Lösung. Sei nun g eine weitere Lösung, sodass $g' = \varphi g$. Weiter sei f_0 die eben konstruierte Lösung des AWP

$$y' = \varphi(x)y, \quad y(x_0) = 1.$$

Dann gilt $y_0 f_0 = f$, $f_0 > 0$ und

$$\left(\frac{g}{f_0}\right)' = \frac{\varphi g f_0 - g \varphi f_0}{f_0^2} = 0.$$

Also gibt es ein c mit $g = c f_0$. Wegen $g(x_0) = y_0$ und $f_0(x_0) = 1$ ist $c = y_0$ und
 — damit $g = y_0 f_0 = f$.

Beispiele

Wir betrachten das homogene lineare AWP

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad x > 0, \quad y(1) = c.$$

Hier ist $\varphi(x) = 1/x$ für $x > 0$. Die eindeutige Lösung ist $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = c \exp\left(\int_1^x \frac{1}{t} dt\right) = c \exp(\log(x) - \log(1)) = c x.$$

Analog hat das AWP

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad x > 0, \quad y(1) = c,$$

die eindeutige Lösung $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = c \exp\left(\int_1^x -\frac{1}{t} dt\right) = c \exp(-\log(x) + \log(1)) = \frac{c}{x}.$$

Für inhomogene Systeme gilt:

Satz (*Lösungen inhomogener linearer Differentialgleichungen*)

Für stetige $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ hat das AWP

$$y' = \varphi(x)y + \psi(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

die eindeutige Lösung $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f_0(x) \left(y_0 + \int_{x_0}^x \frac{\psi(t)}{f_0(t)} dt \right) \quad \text{für alle } x \in I,$$

wobei $f_0: I \rightarrow]0, \infty[$ die Lösung des AWP „ $y' = \varphi(x)y$, $y(x_0) = 1$ “ ist.

Beweis

Es gilt $f(x_0) = f_0(x_0)(y_0 + 0) = y_0$. Nach der Produktregel und $f_0' = \varphi f_0$ gilt:

$$f' = f_0' \frac{f}{f_0} + f_0 \frac{\psi}{f_0} = \varphi f_0 \frac{f}{f_0} + \psi = \varphi f + \psi.$$

Ist nun g eine weitere Lösung des AWP, so sei $h = g/f_0$. Dann gilt

$$\varphi f_0 h + \psi = \varphi g + \psi = g' = (f_0 h)' = \varphi f_0 h + f_0 h',$$

sodass $h' = \psi/f_0$ (auch die Quotientenregel zeigt dies). Damit gibt es ein c mit

$$h(x) = c + \int_{x_0}^x \frac{\psi(t)}{f_0(t)} dt \quad \text{für alle } x \in I.$$

- Wegen $h(x_0) = g(x_0) = y_0$ ist $c = y_0$. Also ist $g = f_0 h$ die Lösung f .

Beispiel

Wir betrachten das AWP

$$y' = x^2 y + e^{x^3/3}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

Das zugehörige homogene AWP hat die Lösung $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_0(x) = 1 \exp\left(\int_0^x t^2 dt\right) = e^{x^3/3}.$$

Damit gilt für die Lösung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des inhomogenen AWP:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x) \left(y_0 + \int_0^x \frac{\psi(t)}{f_0(t)} dt \right) = \\ &= e^{x^3/3} \left(1 + \int_0^x \frac{e^{t^3/3}}{e^{t^3/3}} dt \right) = e^{x^3/3} (1 + x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Lösungsformel des Satzes kann man wie folgt finden:

Variation der Konstanten

Sei f_0 die Lösung von „ $y' = \varphi y$, $y(x_0) = 1$ “. Eine noch unbekannte Lösung f von „ $y' = \varphi y + \psi$, $y(x_0) = y_0$ “ schreiben wir in der Form

$$f = f_0 \cdot h, \quad \text{mit } h : I \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{dies ist möglich, da } f_0(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in I).$$

Dann gilt $h' = \psi/f_0$, woraus sich die Formeln für h und f ergeben. Im Ansatz „ $f = f_0 h$ “ wird f_0 nicht mit einer Konstanten multipliziert (dies liefert die Lösungen der homogenen Differentialgleichung), sondern mit einer Funktion h , die multiplikative Konstante „variiert“ also mit x .

Zusammenfassung

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y' = \varphi(x)y + \psi(x), \quad \text{mit } \varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sei $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von φ . Dann sind die Funktionen

$$ce^{\Phi}, \quad c \in \mathbb{R},$$

die Lösungen der homogenen Gleichung $y' = \varphi(x)y$, und die Funktionen

$$f + ce^{\Phi}, \quad c \in \mathbb{R},$$

sind die Lösungen der inhomogenen Gleichung, wobei f eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. f kann definiert werden durch

$$f(x) = e^{\Phi(x)} \int_{x_0}^x \frac{\psi(t)}{e^{\Phi(t)}} dt \quad \text{für alle } x \in I, \quad \text{wobei } x_0 \in I \text{ beliebig.}$$

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Definition (*getrennte Variablen*)

Eine Differentialgleichung hat *getrennte Variablen*, wenn sie von der Form

$$y' = \varphi(x)\psi(y)$$

ist, mit Funktionen $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf reellen Intervallen I, J , $\psi(y) \neq 0$ für alle $y \in J$.

Die Bedingung „ $\psi(y) \neq 0$ “ ist für die reine Lösbarkeit einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen keine Einschränkung, denn ist $\psi(y_0) = 0$ für ein y_0 , so ist $f = y_0$ eine Lösung von „ $y' = \varphi(x)\psi(y)$ “. Die Nullstellenfreiheit von ψ führt dazu, dass wir sorglos durch ψ dividieren können – was wir nutzen werden.

Ist ψ die Identität, so liegt eine homogene lineare Differentialgleichung vor, die wir bereits lösen können. Bemerkenswerterweise lässt sich ein allgemeines Lösungsverfahren aber auch für eine beliebige Multiplikationsfunktion ψ angeben. Wir motivieren dieses Verfahren durch einen heuristischen Ansatz.

Formales Lösungsverfahren für getrennte Variablen

- (1) Mit „ $y' = dy/dx$ “ lässt sich das AWP

$$y' = \varphi(x)\psi(y), \quad y(x_0) = y_0$$

in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{1}{\psi(y)} dy = \varphi(x) dx, \quad y(x_0) = y_0.$$

- (2) Integrieren liefert:

$$\int \frac{1}{\psi(y)} dy = \int \varphi(x) dx \quad (\text{modulo einer Konstanten}),$$

oder, mit Berücksichtigung der Anfangswertbedingung,

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{\psi(s)} ds = \int_{x_0}^x \varphi(t) dt$$

- (3) Wir bestimmen die bestimmten Integrale in (2).
 (4) Wir lösen die durch (3) entstehende Gleichung nach y auf. Wir erhalten „ $y = f(x)$ “. Die Funktion f löst auf einem geeigneten x_0 enthaltenen Intervall das AWP.

Das genaue Ergebnis lautet:

Satz (Lösungen von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen)

Seien $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\psi(y) \neq 0$ für alle y , und sei $(x_0, y_0) \in I \times J$.
Weiter seien $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\Psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x \varphi(t) \, dt \quad \text{für alle } x \in I, \quad \Psi(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{\psi(s)} \, ds \quad \text{für alle } y \in J.$$

Es gelte $\Phi[I] \subseteq \Psi[J]$. Dann hat das AWP

$$y' = \varphi(x) \psi(y), \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung $f: I \rightarrow J$, und es gilt

$$f = \Psi^{-1} \circ \Phi.$$

Beweis

Wegen $\psi(y) \neq 0$ für alle y gilt $\psi > 0$ oder $\psi < 0$. Folglich ist Ψ streng monoton steigend oder streng monoton fallend, und damit existiert Ψ^{-1} .
Wegen $\Psi' = 1/\psi$ ist Ψ stetig differenzierbar und damit ist, nach der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion, Ψ^{-1} stetig differenzierbar mit

$$\Psi^{-1'} = \frac{1}{\Psi' \circ \Psi^{-1}}.$$

Wegen $\Phi[I] \subseteq \Psi[J]$ können wir also definieren:

$$f = \Psi^{-1} \circ \Phi.$$

Dann ist f eine Lösung des AWP, da $f(x_0) = \Psi^{-1}(0) = y_0$ und

$$f' = \frac{\Phi'}{\Psi' \circ \Psi^{-1} \circ \Phi} = \frac{\varphi}{(1/\psi) \circ f} = \varphi \cdot (\psi \circ f).$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $g: I \rightarrow J$ eine Lösung des AWP.

Dann gilt $g' = \varphi(\psi \circ g)$, sodass

$$\int_{x_0}^x \frac{g'(t)}{\psi(g(t))} \, dt = \int_{x_0}^x \varphi(t) \, dt.$$

Mit der Substitution „ $s = g(t)$ “ wird dies zu

$$\int_{g(x_0)}^{g(x)} \frac{1}{\psi(s)} \, ds = \int_{x_0}^x \varphi(t) \, dt.$$

Wegen $g(x_0) = y_0$ gilt also $\Psi(g(x)) = \Phi(x)$ für alle $x \in I$ nach Definition von Ψ und Φ . Also gilt $\Psi \circ g = \Phi$ und damit

$$\text{— } g = \Psi^{-1} \circ \Phi = f.$$

Die Bedingung „ $\Phi[I] \subseteq \Psi[J]$ “ kann durch Verkleinern von I immer erreicht werden. Man erhält dann eine eindeutige Lösung f auf einem x_0 enthaltenden Teilintervall von I .

Der Beweis ist durch seine Kombination elementarer Methoden der Differentialrechnung attraktiv, aber der Leser wird das obige formale Verfahren schätzen, wenn Differentialgleichungen mit getrennten Variablen per Hand zu lösen sind. Wir betrachten hierzu zwei Beispiele.

Beispiel 1

Das homogene lineare AWP

$$y' = \varphi(x)y, \quad x \in I, \quad y > 0, \quad y(x_0) = y_0$$

können wir auch als AWP mit getrennten Variablen ansehen:

$$(1) \quad \frac{1}{y} dy = \varphi(x) dx.$$

$$(2) \quad \int_{y_0}^y \frac{1}{s} ds = \int_{x_0}^x \varphi(t) dt.$$

$$(3) \quad \log(y) - \log(y_0) = \Phi(x), \quad \text{mit}$$

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x \varphi(t) dt \quad \text{für alle } x \in I,$$

$$(4) \quad y = e^{\log(y_0) + \Phi(x)} = y_0 e^{\Phi(x)}.$$

Damit erhalten wir die von einem homogenen linearen AWP bekannte Lösung. Das AWP mit „ $y < 0$ “ wird analog behandelt.

Beispiel 2

Wir betrachten das AWP

$$y' = \frac{x}{y}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

Das Lösungsverfahren verläuft wie folgt:

$$(1) \quad y dy = x dx.$$

$$(2) \quad \int_{y_0}^y s ds = \int_{x_0}^x t dt.$$

$$(3) \quad \Psi(y) = \frac{y^2 - y_0^2}{2} = \frac{x^2 - x_0^2}{2} = \Phi(x)$$

$$(4) \quad y = \sqrt{x^2 + y_0^2 - x_0^2} \quad (\text{wegen } y > 0 \text{ können wir „-“ ausschließen}).$$

Wir erhalten eine eindeutige Lösung f mit $f(x) = \sqrt{x^2 + y_0^2 - x_0^2}$ auf

$$\mathbb{R}, \quad \text{falls } y_0 > |x_0|,$$

$$]a, \infty[\quad \text{falls } y_0 \leq |x_0|, \quad x_0 > 0,$$

$$]-\infty, -a[\quad \text{falls } y_0 \leq |x_0|, \quad x_0 < 0,$$

wobei im zweiten und dritten Fall $a = \sqrt{x_0^2 - y_0^2} \leq |x_0|$.

Die Bedingung „ $\Phi(I) \subseteq \Psi(J)$ “ und die dadurch manchmal notwendige Verkleinerung von I erklärt diese Unterscheidung. Denn es gilt

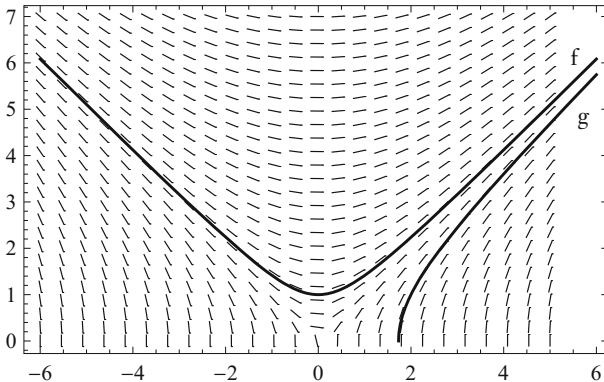
$$\Psi[]0, \infty[=]-y_0^2/2, \infty[,$$

$$\Phi[\mathbb{R}] =]-x_0^2/2, \infty[,$$

$$\Phi[]b, \infty[= \Phi[]-\infty, -b[=](b^2 - x_0^2)/2, \infty[\quad \text{für alle } b \geq 0,$$

woraus sich die Fallunterscheidung ergibt.

Das AWP des zweiten Beispiels illustriert, dass bei gleicher Differentialgleichung ein Anfangswertproblem manchmal schwieriger zu lösen sein kann als ein anderes. Weiter kann der maximale Definitionsbereich einer Lösung von den Anfangswerten abhängen. Das folgende Diagramm fasst die Situation noch einmal zusammen.



Visualisierung der Differentialgleichung

$$y' = x/y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

Das AWP mit „ $y(0) = 1$ “ wird gelöst durch $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Für „ $y(2) = 1$ “ erhalten wir die Lösung $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$, $x \geq \sqrt{3}$.

Die Differentialgleichung $y'' = \varphi(y)$

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = \varphi(x, y, y')$$

ist besonders einfach, wenn die rechte Seite nur von einer der drei Variablen abhängt. Zwei der drei möglichen Fälle sind leicht zu behandeln: Ist $y'' = \varphi(x)$ (erster Fall), so erhalten wir Lösungen f mit $f''(x) = \varphi(x)$ durch zweimaliges Integrieren von $\varphi(x)$. Ist $y'' = \varphi(y')$ (zweiter Fall), so gilt $z' = \varphi(z)$ für $z = y'$. Ist also f eine Lösung der Differentialgleichung $z' = \varphi(z)$ erster Ordnung und F eine Stammfunktion von f , so ist F eine Lösung von $y'' = \varphi(y')$.

Interessanter ist $y'' = \varphi(y)$ (dritter Fall) oder gleichwertig

$$(\text{+}) \quad y'' - \varphi(y) = 0.$$

Wir nehmen an, dass φ eine stetige Funktion der Form $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem Intervall J ist. Gesucht sind auf einem möglichst großen Intervall I definierte Funktionen $f : I \rightarrow J$ mit $f''(x) = \varphi(f(x))$ für alle $x \in I$.

Um Lösungen zu finden, multiplizieren wir die Gleichung mit y' . Dies liefert

$$y''(x) y'(x) - \varphi(y(x)) y'(x) = 0.$$

Die Summanden liegen nun in „nachdifferenzierter Form“ vor, sodass

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'(x)^2}{2} + \Phi(y(x)) \right) = 0,$$

wobei Φ eine Stammfunktion von $-\varphi$ ist. Wir können also unsere Differentialgleichung in der Form

$$\frac{y'^2}{2} + \Phi(y) = c$$

schreiben, mit einer Konstanten c , die den Charakter eines freien Parameters besitzt. Umformen ergibt

$$(\text{++}) \quad y' = \pm \sqrt{2(c - \Phi(y))}.$$

Damit haben wir das Problem zweiter Ordnung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt. Jede Lösung von (++) , für irgendein Vorzeichen und irgendein $c \in \mathbb{R}$, ist eine Lösung von (+). (Dies lässt sich auch durch Ableiten der rechten Seite einsehen, wobei mit $2\varphi(y)y'$ nachdifferenziert wird.) Zudem ist (++) eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, deren x -Faktor konstant gleich 1 ist. Damit können wir das Lösungsverfahren für getrennte Variablen anwenden. Genauer liefert unser Satz über die Lösungen von Anfangswertproblemen mit getrennten Variablen das folgende Ergebnis:

Satz (Lösungen von $y'' = \varphi(y)$)

Seien $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $y_0 \in J$ und $\Phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ die Integralfunktion von $-\varphi$ zum Startwert y_0 , d. h.

$$\Phi(y) = - \int_{y_0}^y \varphi(u) \, du \quad \text{für alle } y \in J.$$

Weiter sei $c \in \mathbb{R}$ mit $\Phi(y) < c$ für alle $y \in J$ und $\Psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Psi(y) = \pm \int_{y_0}^y \frac{ds}{\sqrt{2(c - \Phi(s))}} \quad \text{für alle } y \in J,$$

mit einem für das Folgende fest gewählten Vorzeichen. Sei nun I ein Intervall und $x_0 \in I$ derart, dass $x - x_0 \in \Psi[J]$ für alle $x \in I$. Dann hat das AWP

$$y' = \pm \sqrt{2(c - \Phi(y))}, \quad y(x_0) = y_0$$

die eindeutige Lösung $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \Psi^{-1}(x - x_0) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Die Funktion f ist weiter die eindeutige Lösung des AWP

$$y'' = \varphi(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = \pm \sqrt{2c}.$$

Die Differentialgleichung $y'' = \varphi(y)$ ist in der mathematischen Physik in der dynamischen Version $\ddot{x}(t) = F(x(t))$ von großer Bedeutung. Wir werden darauf später noch zurückkommen.

Beispiel

Wir betrachten das AWP

$$y''(x) = y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Mit positivem Vorzeichen gilt mit den obigen Bezeichnungen:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad c = y'(x_0)^2/2 = 1/2,$$

$$\Phi(y) = -y^2/2 < c \quad \text{für alle } y \in J = \mathbb{R},$$

$$\Psi(y) = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{2(c - \Phi(s))}} = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} = \operatorname{arsinh}(y) \quad \text{für alle } y \in J.$$

Also ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \Psi^{-1}(x - x_0) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

die eindeutige Lösung des AWP. Damit haben wir die in den einführenden Beispielen angegebene Lösung analytisch gefunden.

Differentialgleichungen $y'' = \varphi(y)$ lassen sich nur in Ausnahmefällen einfach lösen. Oft ist die Bestimmung einer Stammfunktion $\Phi(y)$ von $\varphi(y)$ noch leicht möglich, die Berechnung des Integrals $\Psi(y)$ dagegen schwierig. Das folgende Beispiel zeigt, dass die Reduktion auf ein Problem erster Ordnung dennoch gewinnbringend ist.

Beispiel

Wir betrachten das AWP

$$y'' = y^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Mit $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $c = y'(x_0)^2/2 = 1/2$ und positivem Vorzeichen gilt

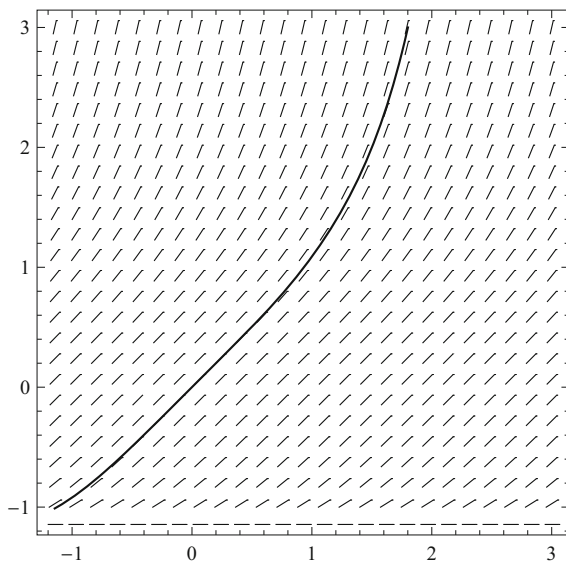
$$\Phi(y) = - \int_0^y u^2 du = -y^3/3 < c \quad \text{für alle } y \in J =]-\sqrt[3]{3/2}, \infty[,$$

$$\Psi(y) = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{1 + 2s^3/3}} \quad \text{für alle } y \in J.$$

Das Integral ist innerhalb der elementaren Funktionen nicht lösbar (es ist ein elliptisches Integral, vgl. den Exkurs). Das zugeordnete äquivalente Problem erster Ordnung lautet

$$y' = \sqrt{1 + 2y^3/3}, \quad y(0) = 0.$$

Wir können ein Richtungsfeld zeichnen und so die Lösung des AWP visualisieren. Das Diagramm zeigt zudem die numerisch bestimmte Lösung.



Der Existenz- und Eindeigkeitsatz

Unsere bisher betrachteten Anfangswertprobleme hatten eine eindeutige Lösung. Dass ein Anfangswertproblem sogar überabzählbar viele Lösungen besitzen kann, zeigt das folgende Beispiel:

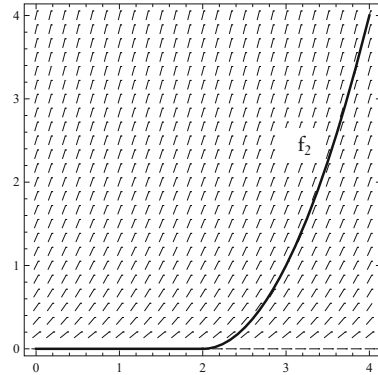
Beispiel

Wir betrachten das AWP

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0.$$

Eine Lösung des AWP ist die Nullfunktion $f = 0$ auf \mathbb{R} . Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist aber auch $f_a : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ eine Lösung des AWP, wobei

$$f_a(x) = \begin{cases} (x - a)^2 & \text{für } x \geq a, \\ 0 & \text{für } x < a. \end{cases}$$



Die Wurzelfunktion auf einem Intervall $[0, b]$ ist, wie wir wissen, stetig, aber nicht Lipschitz-stetig. In der Tat spielt der Begriff der Lipschitz-Stetigkeit in der Theorie der Differentialgleichungen eine Schlüsselrolle. Die Lipschitz-Stetigkeit von φ in der Variablen y führt zur eindeutigen Lösbarkeit eines Anfangswertproblems für φ . Genauer genügt eine lokale Version:

Definition (lokale Lipschitz-Stetigkeit in der y -Variablen)

Eine Funktion $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, heißt *lokal Lipschitz-stetig* in der zweiten Variablen, wenn für alle $p \in P$ eine Umgebung $U \subseteq P$ von p und ein $L > 0$ existiert mit

$$|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \text{für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in U.$$

Wir haben schon in der Analysis 1 gesehen, dass die stetige Differenzierbarkeit einer auf einem kompakten Intervall definierten Funktion die Lipschitz-Stetigkeit nach sich zieht. Dies gilt auch für die lokale Version:

Satz (Lipschitz-Stetigkeit bei stetiger Differenzierbarkeit)

Sei $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, stetig. Weiter sei die partielle Ableitung $\partial_y \varphi$ stetig. Dann ist φ lokal Lipschitz-stetig in y .

Damit ist die lokale Lipschitz-Stetigkeit für viele Funktionen φ erfüllt und auch relativ einfach zu überprüfen.

Nach dieser Vorbereitung können wir nun einen großen Satz der Theorie formulieren und beweisen.

Satz (Existenz und Eindeigkeitsatz)

Sei $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, stetig und lokal Lipschitz-stetig in y . Weiter sei $(x_0, y_0) \in P$. Dann besitzt das AWP

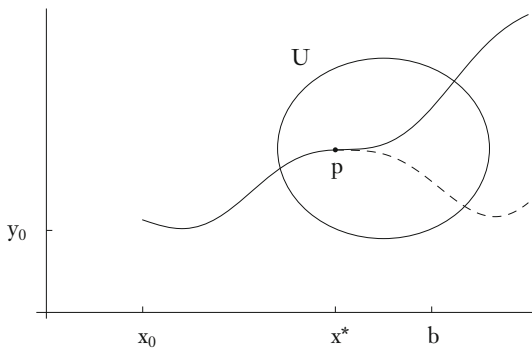
$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige maximale Lösung $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, d. h., f ist eine Lösung des AWP, und für jede Lösung $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des AWP gilt $I \subseteq J$ und $g = f|I$.

Beweis*Eindeutigkeit der Lösung auf einem Intervall*

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen des AWP mit $f \neq g$. Wir nehmen an, dass es ein $x > x_0$ gibt mit $f(x) \neq g(x)$. (Andernfalls ist $f(x) \neq g(x)$ für ein $x < x_0$ und wir argumentieren analog.) Da f und g stetig sind, existiert

$$x^* = \max \{ x > x_0 \mid f(t) = g(t) \text{ für alle } x_0 \leq t \leq x \}.$$



Sei nun $U \subseteq P$ eine Umgebung von $p = (x^*, f(x^*)) = (x^*, g(x^*))$, in der φ Lipschitz-stetig in y mit einer Konstanten $L > 0$ ist. Weiter sei $b > x^*$ derart, dass die Graphen von $f|_{[x^*, b]}$ und $g|_{[x^*, b]}$ Teilmengen von U sind. Dann gilt für alle $x \in [x^*, b]$:

$$|f'(x) - g'(x)| = |\varphi(x, f(x)) - \varphi(x, g(x))| \leq L |f(x) - g(x)|.$$

Sei $h : [x^*, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $h = (f - g)^2$. Dann ist

$$h' = 2(f - g)(f' - g') \leq 2L |f - g| |f - g| = 2Lh.$$

Damit gilt für alle $x \in [x^*, b]$:

$$(he^{-2Lx})' = h'e^{-2Lx} - 2Lhe^{-2Lx} = e^{-2Lx}(h' - 2Lh) \leq 0.$$

Also ist he^{-2Lx} monoton fallend in $[x^*, b]$. Wegen $h(x^*) = 0$ und $e^{-2Lx} > 0$ folgt hieraus, dass $h \leq 0$. Nach Definition von h ist aber $h \geq 0$. Also ist $h = 0$ und damit $f(x) = g(x)$ auf $[x^*, b]$, im Widerspruch zur Wahl von x^* .

Beweis der Maximierbarkeit des Definitionsintervalls einer Lösung

Wir nehmen an, dass das AWP lösbar ist und definieren $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$J = \bigcup \{ I \mid \text{es gibt eine Lösung } g : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ des AWP} \},$$

$$f(x) = g(x), \text{ wobei } g : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ eine Lösung des AWP mit } x \in I \text{ ist.}$$

Da alle I den Punkt x_0 enthalten, ist J ein Intervall und es gilt $x_0 \in J$. Nach der bereits gezeigten Eindeutigkeit ist f wohldefiniert, und nach Konstruktion ist f eine maximale Lösung des AWP.

Beweis der Existenz einer Lösung (Picard-Lindelöf-Verfahren)

Für ein nichttriviales Intervall I mit $x_0 \in I$ ist eine differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung des AWP, wenn

$$(\+) \quad f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \varphi(t, f(t)) \, dt \quad \text{für alle } x \in I.$$

Wir zeigen, dass für ein hinreichend kleines kompaktes Intervall $I \neq \{x_0\}$ und ein abgeschlossenes nichtleeres

$$A \subseteq \mathcal{C}_I = \{f \mid f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \}$$

die Abbildung $T : A \rightarrow A$ mit

$$T(f)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \varphi(t, f(t)) \, dt \quad \text{für alle } x \in I$$

eine Kontraktion ist, wobei wir den Raum \mathcal{C}_I mit der Supremumsnorm versehen. Dies genügt. Denn da A abgeschlossen ist, ist A mit der induzierten Metrik vollständig. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert also ein $f^* \in A$ mit

$$T(f^*) = f^*.$$

Nach (+) ist $f^* : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP.

Zur Definition von I und A seien $\delta > 0$, $L > 0$ und $s > \max(\delta L, 1)$ derart, dass

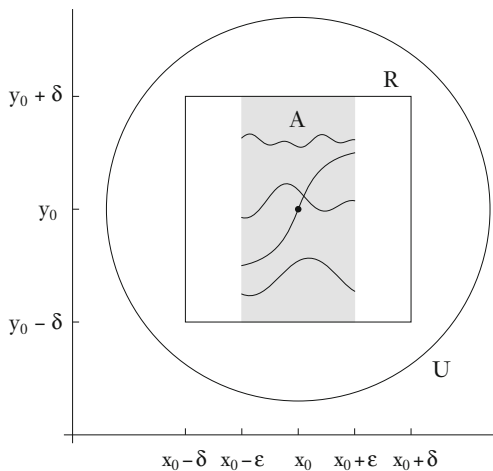
$$(a) \quad R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subseteq P,$$

$$(b) \quad |\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \text{für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in R,$$

$$(c) \quad |\varphi(x, y)| \leq s \quad \text{für alle } (x, y) \in R.$$

Wir setzen nun:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{s}, \quad I = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \quad A = \{f \in \mathcal{C}_{[I]} \mid \|f - y_0\| \leq \delta\}.$$



$\varphi(x, y)$ ist Lipschitz-stetig in y in einer Umgebung U von (x_0, y_0) mit einer Konstanten L . Weiter ist $R \subseteq U$ und $\varphi(x, y)$ beschränkt auf R durch s für eine hinreichend groß gewählte Schranke s . Dann definiert $\varepsilon = \delta/s$ eine Menge A von stetigen Funktionen, auf der T eine Kontraktion ist.

Die Menge A ist nichtleer und abgeschlossen. Weiter ist $T(f) \in A$ für alle $f \in A$, denn

$$\|T(f) - y_0\| = \left\| \int_{x_0}^x \varphi(t, f(t)) \, dt \right\|_{x \in I} \leq \left\| \int_{x_0}^x s \, dt \right\|_{x \in I} = \varepsilon s = \delta.$$

Damit gilt $T : A \rightarrow A$. Schließlich ist T eine Kontraktion, denn für alle $f, g \in A$ gilt

$$\begin{aligned} \|T(f) - T(g)\| &= \left\| \int_{x_0}^x \varphi(t, f(t)) - \varphi(t, g(t)) \, dt \right\|_{x \in I} \leq \\ &L \left\| \int_{x_0}^x |f(t) - g(t)| \, dt \right\|_{x \in I} \leq \\ &L \varepsilon \|f - g\| = \frac{L \delta}{s} \|f - g\|, \end{aligned}$$

— mit $L\delta/s < 1$ nach Wahl von s .

Der Existenzbeweis von Picard-Lindelöf liefert ein Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen, die die Voraussetzung des Satzes erfüllen. Wir starten mit der konstanten Funktion $f_0 = y_0$ auf I und definieren rekursiv

$$f_{n+1} = T(f_n) \quad \text{für alle } n.$$

Dann ist der eindeutig bestimmte Fixpunkt

$$f^* = \lim_n f_n \quad (\text{gleichmäßig})$$

von T die eindeutige Lösung des AWP auf dem Intervall I .

Beispiele

(1) Wir betrachten das AWP

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0.$$

Raten oder Anwendung des Lösungsverfahrens für lineare Differentialgleichungen liefert die Lösung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^x - 1 - x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

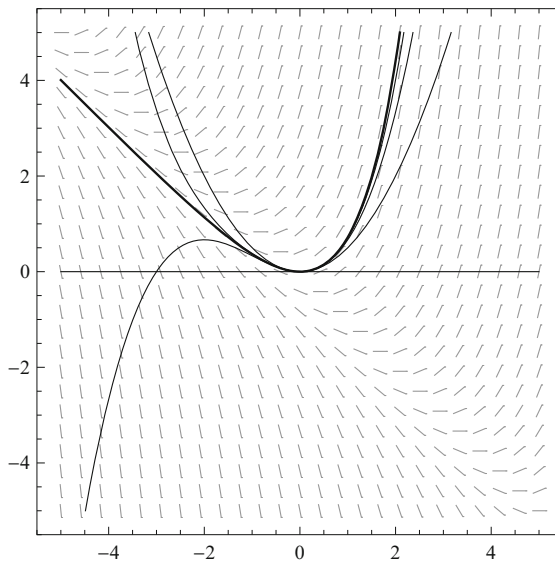
Wenden wir das Verfahren von Picard-Lindelöf für $\varphi(x, y) = x + y$, $I = \mathbb{R}$ und $f_0 = 0$ an, so erhalten wir:

$$f_1(x) = \int_0^x t + 0 \, dt = \frac{x^2}{2},$$

$$f_2(x) = \int_0^x t + \frac{t^2}{2} \, dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

$$f_3(x) = \int_0^x t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \, dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \quad \text{usw.}$$

Die Funktionen f_n sind Partialsummen der Potenzreihenentwicklung der Lösung f .



Die Lösung f des AWP $y' = x + y$, $y(0) = 0$, und einige Funktionen der zugehörigen Picard-Lindelöf-Iteration.

(2) Das AWP

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0, \quad y(0) = 0$$

ist nicht lokal Lipschitz-stetig in y . Wenden wir das Picard-Lindelöf-Verfahren für $\varphi(x, y) = \sqrt{y}$, $I = \mathbb{R}$, $f_0 = 0$ dennoch an, so erhalten wir

$$f_1(x) = 0 + \int_0^x \sqrt{0} \, dt = 0$$

und allgemeiner $f_n(x) = 0$ für alle n . Es wird also die triviale Lösung gefunden, die Lösungen f_a mit

$$f_a(x) = 0 \quad \text{für } x \leq a, \quad f_a(x) = (x - a)^2 \quad \text{für } x \geq a$$

bleiben unentdeckt.

(3) Gegeben sei nun das AWP

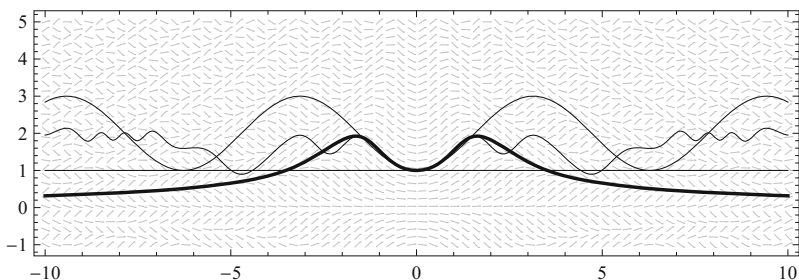
$$y' = \sin(xy), \quad y(0) = 1.$$

Das Picard-Lindelöf-Verfahren für $\varphi(x, y) = \sin(xy)$, $I = \mathbb{R}$ und $f_0 = 1$ liefert

$$f_1(x) = 1 + \int_0^x \sin(t) \, dt = 2 - \cos(x),$$

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x \sin(2t - t \cos(t)) \, dt.$$

Das letzte Integral ist nicht mehr elementar lösbar, f_2 und die weiteren Iterationen müssen numerisch bestimmt werden.



Die numerisch bestimmte Lösung f des AWP $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 1$, sowie die Funktionen f_0 , f_1 und (numerisch bestimmt) f_2 der Picard-Lindelöf-Iteration.

Systeme von Differentialgleichungen

In der Mathematik betrachtet man oft nicht nur eine Gleichung, sondern ein System von Gleichungen, der Leser denke an die linearen Gleichungssysteme der Linearen Algebra. Dies gilt auch für Differentialgleichungen.

Definition (*System von Differentialgleichungen*)

Für $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und ein stetiges $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ nennt man den Ausdruck

$$y' = \varphi(x, y)$$

oder ausführlicher

$$y_1' = \varphi_1(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$y_2' = \varphi_2(x, y_1, \dots, y_n)$$

...

$$y_n' = \varphi_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

ein *n*-dimensionales System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Eine *Lösung* der Differentialgleichung $y' = \varphi(x, y)$ ist eine auf einem reellen nichttrivialen Intervall I definierte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$f'(x) = \varphi(x, f(x)) \quad \text{für alle } x \in I, \text{ d. h., für alle } x \in I \text{ gilt}$$

$$f_1'(x) = \varphi_1(x, f_1(x), \dots, f_n(x))$$

...

$$f_n'(x) = \varphi_n(x, f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Ein *Anfangswertproblem* für das System hat die Form

$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{mit } (x_0, y_0) \in P,$$

und eine *Lösung* des AWP ist eine Lösung f von $y' = \varphi(x, y)$ mit $f(x_0) = y_0$.

Eine Lösung $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eines *n*-dimensionalen Systems

$$y' = \varphi(x, y)$$

besteht also aus *n* Komponentenfunktionen

$$f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Variablen sind gekoppelt, $f_1'(x)$ hängt in der Regel nicht nur von x und $f_1(x)$, sondern auch von $f_2(x), \dots, f_n(x)$ ab usw. Die Variable x ist nach wie vor eindimensional.

Beispiel

Das zweidimensionale AWP

$$y' = (y_2, -y_1), \quad x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = (0, 1).$$

wird durch $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (\sin(x), \cos(x))$ gelöst, da

$$f(0) = (\sin(0), \cos(0)) = (0, 1), \quad f'(x) = (\cos(x), -\sin(x)) = (f_2(x), -f_1(x)).$$

Mehrdimensionale Systeme sind nützlich, um eindimensionale Differentialgleichungen höherer Ordnung zu behandeln. Der Paradeffall ist:

Übersetzung von 1-2 nach 2-1

Ein eindimensionales AWP zweiter Ordnung hat die Form

$$y'' = \varphi(x, y, y'), \quad y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b,$$

wobei $\varphi: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^3$. Diesem AWP können wir ein zweidimensionales AWP* erster Ordnung zuweisen:

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = \varphi(x, y_1, y_2),$$

$$(y_1(x_0), y_2(x_0)) = (a, b).$$

Dies ist das Anfangswertproblem „ $y' = \psi(x, y) = \psi(x, y_1, y_2)$, $y(x_0) = (a, b)$ “, wobei $\psi: \mathbb{R} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\psi(x, y_1, y_2) = (y_2, \varphi(x, y_1, y_2)) \quad \text{für alle } (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times P.$$

Die beiden Anfangswertprobleme sind äquivalent. Die zweite Ableitung des AWP wird in AWP* durch $y_2' = y_1''$ eingefangen. Die Lösungen lassen sich ineinander übersetzen:

*Übersetzung von AWP nach AWP**

Löst $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ das AWP, so ist $g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(x) = (f(x), f'(x))$ eine Lösung des AWP*, denn für alle $x \in I$ gilt

$$g'(x) = (f'(x), f''(x)) = (g_2(x), \varphi(x, f(x), f'(x))) = \psi(x, g_1(x), g_2(x)),$$

$$g(x_0) = (f(x_0), f'(x_0)) = (a, b).$$

Übersetzung von AWP nach AWP*

Löst $g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ das AWP*, so ist $f = g_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP, denn für alle $x \in I$ gilt

$$g_1''(x) = g_2'(x) = \varphi(x, g_1(x), g_2(x)) = \varphi(x, g_1(x), g_1'(x)),$$

$$g_1(x_0) = a, \quad g_1'(x_0) = g_2(x_0) = b.$$

Beispiel

Das AWP

$$y'' = -y - 2y', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

hat die Lösung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x e^{-x}$. Es entspricht dem AWP*

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1 - 2y_2, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$$

mit der Lösung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g(x) = (f(x), f'(x)) = (x e^{-x}, e^{-x}(1-x)).$$

Dieser Übersetzungsprozess lässt sich allgemeiner für Differentialgleichungen n -ter Ordnung durchführen:

Ein AWP n -ter Ordnung kann auf ein äquivalentes n -dimensionales AWP erster Ordnung zurückgeführt werden.*

Dadurch kommen wir in der Lösungstheorie weit voran: Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz samt Beweis bleibt auch für n -dimensionale Systeme gültig. Wir ersetzen dabei im Begriff der lokalen Lipschitz-Stetigkeit den Betrag auf \mathbb{R} durch die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^n :

$$\|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \quad \text{für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in U \subseteq P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt:

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Systeme)

Sei $\varphi: P \rightarrow \mathbb{R}^n$, $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, stetig und lokal Lipschitz-stetig in y .

Weiter sei $(x_0, y_0) \in P$. Dann besitzt das n -dimensionale AWP

$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige maximale Lösung $f: J \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Die Übersetzung von AWP nach AWP* liefert dann auch noch einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für eindimensionale Anfangswertprobleme n -ter Ordnung. Die genauen Ergebnisse lauten:

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für höhere Ordnungen)

Sei $\varphi: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, stetig und lokal Lipschitz-stetig in $y \in \mathbb{R}^n$.

Weiter sei $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in P$. Dann besitzt das AWP n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

eine eindeutige maximale Lösung $f: J \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dynamische Systeme

Mehrdimensionale Systeme von Differentialgleichungen lassen sich dynamisch sehr anschaulich interpretieren. Zur Illustration nehmen wir $n = 3$ und $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ als Definitionsbereich unserer φ -Funktion an. Wir ersetzen nun die Variable x durch eine Zeitvariable t und die Variable y durch die Ortsvariablen x, y, z . Aus $\varphi(x, y_1, y_2, y_3)$ wird also $\varphi(t, x, y, z)$. Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lesen wir als zeitabhängiges dreidimensionales Vektorfeld:

An jedem Punkt (x, y, z) des Raumes sitzt ein Vektor $\varphi(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, der sich in der Zeit t verändern kann.

Diesen Vektor können wir uns als eine lokale Strömung oder als gerichtete Windgeschwindigkeit vorstellen, die ja ein von der Zeit abhängiger Vektor ist. Ein mit der Newtonschen Punktnotation für die zeitliche Ableitung notiertes AWP

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = \varphi(t, x, y, z), \quad (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$$

fragt dann nach der zeitabhängigen Kurve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, eines Punktes, der sich zur Zeit t_0 am Ort (x_0, y_0, z_0) befindet und sich gemäß φ bewegt. Die Funktion f ist die zeitlich parametrisierte Kurve eines Staubkorns, das sich zur Zeit t_0 am Ort (x_0, y_0, z_0) befindet und vom Wind φ mitgenommen wird. Allgemeiner lassen sich die Überlegungen für jede Dimension n durchführen. Hat man als Variable der Lösungsfunktion eine zeitliche Dimension vor Augen, so spricht man auch von *dynamischen Systemen*. Letztendlich haben wir nur die Namen der Variablen verändert, aber die Interpretation von x als Zeit t bringt, wie wir bei den Kurven im \mathbb{R}^n bereits gesehen haben, eigene Anschauungen mit sich.

Es ist instruktiv, die dynamische Interpretation auch für die Dimension $n = 1$ zu betrachten. Eine Differentialgleichung erster Ordnung hat hier die Form

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x). \quad (\text{dynamisch notierte Differentialgleichung erster Ordnung})$$

Eine Lösung, die der Einfachheit halber oft selbst mit x bezeichnet wird, beschreibt einen Punkt, der sich in der Koordinate x in der Zeit t bewegt: $x(t)$ ist der Ort des Punktes zur Zeit t . Zu jedem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ des Punktes gleich $\varphi(x, t)$. Natürlich können wir dieser Bewegung einen Funktionsgraphen in den Koordinaten t (waagrecht) und x (senkrecht) zuordnen, der zu jedem Zeitpunkt t den aktuellen x -Wert $x(t)$ des Punktes angibt. Dieser Graph schmiegt sich in das Richtungsfeld der Differentialgleichung ein. Die Vorstellung einer zeitlichen Bewegung in einer Koordinate bleibt aber dominant. Die Koordinate muss dabei keine Achsenkoordinate sein, jede eindimensionale Größe ist möglich. Häufig wird zum Beispiel ein von der Zeit abhängiger Winkel $\alpha(t)$ oder eine Bogenlänge $L(t)$ betrachtet. Eine dynamisch notierte Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem zeitabhängigen Winkel $\alpha(t)$ hat dann zum Beispiel die Form $\ddot{\alpha}(t) = \varphi(t, \alpha(t), \dot{\alpha}(t))$. Beispiele für eindimensionale dynamische Differentialgleichungen werden wir mit dem harmonischen Oszillator und dem Kreis- und Zykloidenpendel kennenlernen.

Lineare Systeme

Zu den einfachsten Systemen von Differentialgleichungen gehören:

Definition (*lineares System*)

Ein n -dimensionales System von Differentialgleichungen erster Ordnung heißt *linear*, wenn es von der Form

$$y' = A(x)y + b(x), \quad x \in I,$$

ist, mit einem reellen Intervall I , einer stetigen matrixwertigen Funktion $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und einer stetigen Funktion $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ist $b = 0$, so heißt das System *homogen*. Andernfalls heißt es *inhomogen*.

Schreiben wir $A(x)$ in der Form

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

so ist die Stetigkeit von $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ gleichwertig dazu, dass alle Funktionen $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Dies ist sicher erfüllt, wenn $A(x)$ konstant gleich einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist. Im Allgemeinen hängen die Einträge der Matrizen $A(x)$ aber von x ab.

Die wichtigsten Ergebnisse der Lösungstheorie linearer Systeme sind:

Satz (*Lösungen linearer Systeme und Anfangswertprobleme*)

(a) Jedes lineare AWP

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

mit $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutige Lösung $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ist I kompakt, so liefert das Iterations-Verfahren von Picard-Lindelöf eine auf ganz I definierte Lösung.

(b) Die Lösungen $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des homogenen Systems $y' = A(x)y$ bilden einen n -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum L . Die Lösungen des inhomogenen Systems $y' = A(x)y + b(x)$ haben die Form $f + g$, wobei $f \in L$ und g irgendeine Lösung des inhomogenen Systems ist.

Eine Basis des Lösungsraumes L eines homogenen Systems heißt ein *Fundamentalsystem*. Sind $f_1, \dots, f_n \in L$ gefunden, so bilden diese Lösungen genau dann ein Fundamentalsystem, wenn für ein (alle) $x \in I$ die Determinante der aus den Zahlen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ gebildeten Matrix von Null verschieden ist.

Die Übersetzung in ein n -dimensionales System erster Ordnung liefert:

Satz (*Lösungen linearer Differentialgleichungen n -ter Ordnung*)

(a) Jedes eindimensionale AWP n -ter Ordnung der Form

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y + b(x),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_n,$$

mit stetigen $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, $y = (y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutige Lösung $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(b) Die Lösungen $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$y' = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

bilden einen n -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum L . Die Lösungen von

$$y' = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y + b(x)$$

haben die Form $f + g$, wobei $f \in L$ und g irgendeine Lösung ist.

Auch hier nennt man eine Basis von L ein *Fundamentalsystem* der homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

Lösungen $f_1, \dots, f_n \in L$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn für ein (alle) $x \in I$ die *Wronski-Determinante* $W(x)$ von Null verschieden ist, wobei

$$W(x) = W_{f_1, \dots, f_n}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Beispiel

Zu Beginn des Abschnitts hatten wir die Differentialgleichung $y'' = -c y$, $c > 0$ untersucht und die Lösungen in der Form

$$\varphi(x) = a \cos(wx) + b \sin(wx), \quad w = \sqrt{c}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

angegeben. Die Differentialgleichung ist homogen linear von zweiter Ordnung, und die Funktionen $\cos(wx)$ und $\sin(wx)$, $x \in \mathbb{R}$, bilden ein Fundamentalsystem.

Analoge Definitionen und Sätze gelten für komplexe lineare Systeme. Für diese ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{C}^n$. Das Intervall I und damit der Definitionsbereich der Lösungen $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ ist nach wie vor reell.

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir untersuchen nun homogene lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizientenfunktionen. Wir beginnen mit dem aus physikalischer Sicht wichtigsten Fall der Ordnung zwei. Dabei ist es nützlich, komplexwertige Konstanten und Lösungen miteinzubeziehen. Wir betrachten also eine ohne Einschränkung normierte Differentialgleichung der Form

$$(+)\quad y'' + b y' + c y = 0$$

mit $b, c \in \mathbb{C}$. Gesucht ist ein zugehöriges Fundamentalsystem $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ hat die Funktion $f = f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ die Ableitungen

$$f' = \lambda f, \quad f'' = \lambda^2 f$$

mit konstanten Skalaren. Es ist deswegen natürlich, Lösungen dieser Form zu suchen. Setzen wir f in (+) ein, so erhalten wir

$$(\lambda^2 + b\lambda + c) e^{\lambda x} = 0.$$

Damit ist f genau dann eine Lösung von (+), wenn λ eine Nullstelle des Polynoms $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$P(z) = z^2 + bz + cz = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \quad (\text{zugeordnetes Polynom})$$

ist. Damit sind also $f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}$ Lösungen von (+). Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so haben wir ein Fundamentalsystem gefunden, da

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Ist dagegen

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -b/2,$$

so liegt nur eine Lösung f_λ vor. Um ein Fundamentalsystem zu erhalten, versuchen wir den Ansatz $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = g(x) e^{\lambda x}$ mit einer noch unbekannten Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Einsetzen in (+) liefert

$$(g''(x) + 2\lambda g'(x) + \lambda^2 g(x) + b g'(x) + b\lambda g(x) + c g(x)) e^{\lambda x} = 0, \quad \text{d.h.}$$

$$g''(x) + (2\lambda + b) g'(x) + (\lambda^2 + b\lambda + c) g(x) = 0, \quad \text{d.h.}$$

$$g''(x) = 0.$$

Damit ist $f = g f_\lambda$ im Fall einer doppelten Nullstelle genau dann eine Lösung von (+), falls g ein Polynom erster Ordnung ist. Definieren wir nun $f_{\lambda,1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_{\lambda,1}(x) = x e^{\lambda x}$, so ist $f_\lambda, f_{\lambda,1}$ ein Fundamentalsystem, da

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Damit haben wir (+) vollständig gelöst. Eine bedeutsame physikalische Anwendung der Ergebnisse werden wir mit dem harmonischen Oszillator gleich kennenlernen. Zuvor wollen wir aber noch unserer mathematischen Neugierde nachgehen und die Ordnung erhöhen, also eine Differentialgleichung der Form

$$(\text{+}) \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ untersuchen. Sei $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ das zugeordnete Polynom,

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = (z - \lambda_1)^{m_1} (z - \lambda_2)^{m_2} \dots (z - \lambda_r)^{m_r}$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$. Ist $f = f_\lambda$, so gilt

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 f(x) = (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0) e^{\lambda x} = 0,$$

sodass erneut f eine Lösung ist, wenn $P(\lambda) = 0$. Ist $r = n$, so bilden $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n}$ ein Fundamentalsystem, da die Wronski-Determinante an der Stelle $x = 0$ mit der *Vandermondschen Determinante* zusammenfällt:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j < k} (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0.$$

Mehrfache Nullstellen behandeln wir ebenfalls in Analogie zur Ordnung zwei. Hierzu ist es günstig, (+) in der äquivalenten Differentialoperator-Form

$$(\text{++}) \quad (D - \lambda_1)^{m_1} (D - \lambda_2)^{m_2} \dots (D - \lambda_r)^{m_r} y(x) = 0$$

zu schreiben, mit $D = d/dx$. Für jede differenzierbare Funktion g gilt

$$(D - \lambda)(g(x) e^{\lambda x}) = d/dx(g(x) e^{\lambda x}) - \lambda g(x) e^{\lambda x} = g'(x) e^{\lambda x}.$$

Allgemeiner zeigt eine Induktion nach m , dass

$$(D - \lambda)^m (g(x) e^{\lambda x}) = g^{(m)}(x) e^{\lambda x},$$

falls g m -mal differenzierbar ist. Speziell gilt also

$$(D - \lambda)^m (x^k e^{\lambda x}) = 0 e^{\lambda x} = 0 \quad \text{für alle } k < m.$$

Für jede Nullstelle λ von P der Vielfachheit m sind also $f_{\lambda,1}, \dots, f_{\lambda,m-1}$ mit

$$f_{\lambda,1}(x) = x e^{\lambda x}, \quad f_{\lambda,2}(x) = x^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad f_{\lambda,m-1}(x) = x^{m-1} e^{\lambda x}$$

Lösungen von (++) und damit von (+). Man kann zeigen, dass die Lösungen $f_{\lambda_1}, f_{\lambda_1,1}, \dots, f_{\lambda_1,m_1-1}, \dots, f_{\lambda_r}, f_{\lambda_r,1}, \dots, f_{\lambda_r,m_r-1}$ ein Fundamentalsystem bilden.

Der harmonische Oszillator

Wir betrachten die wichtigste physikalisch motivierte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, nämlich die in einer Zeitvariablen t und einer Ortsfunktion $x(t)$ dynamisch notierte Differentialgleichung

$$(+)\quad \ddot{x}(t) = -2r \dot{x}(t) - \omega^2 x(t). \quad (\text{harmonischer Oszillator})$$

Dabei sind $r \geq 0$ und $\omega > 0$ reelle Zahlen. Die Differentialgleichung beschreibt einen Massepunkt der Masse $m = 1$, der sich auf der x -Achse unter dem Einfluß einer Kraft mit zwei Komponenten bewegt. Eine Komponente $-\omega^2 x(t)$ ist umgekehrt proportional zur Auslenkung $x(t)$, die andere $-2r \dot{x}(t)$ umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit (Dämpfung, z. B. durch Reibung). Die reelle Zahl $2r$ heißt die *Dämpfung* und ω die *ungedämpfte Kreisfrequenz* des Oszillators. Dass wir die Dämpfung in der Form $2r$ schreiben, geschieht zur Vereinfachung von gleich folgenden Formeln.

Die Differentialgleichung (+) ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, sodass wir die oben entwickelte Lösungstheorie anwenden können. Wir betrachten also das zugehörige Polynom

$$P(z) = z^2 + 2rz + \omega^2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Die komplexen Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega^2}.$$

Wir setzen

$$\omega_r = \sqrt{|r^2 - \omega^2|}$$

und unterscheiden aus physikalischen Gründen vier Fälle.

1. Fall: $r = 0$

Die (uns schon bekannte) allgemeine Lösung ist

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (\text{ungedämpfte Schwingung})$$

2. Fall: $\omega > r > 0$

Es gilt $\lambda_{1,2} = -r \pm i\omega_r \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Aus $e^{\lambda_{1,2}t} = \exp(-rt \pm i\omega_r t)$ erhalten wir durch Real- und Imaginärteilbildung die allgemeine reelle Lösung

$$x(t) = a e^{-rt} \cos(\omega_r t) + b e^{-rt} \sin(\omega_r t), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (\text{gedämpfte Schwingung})$$

3. Fall: $\omega < r$

In diesem Fall ist $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$x(t) = a e^{-rt} e^{\omega_r t} + b e^{-rt} e^{-\omega_r t}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (\text{überdämpfter Kriechfall})$$

4. Fall: $\omega = r > 0$.

In diesem Fall ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und $f_\lambda, f_{\lambda,1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ und

$$x_\lambda(t) = e^{\lambda t}, \quad x_{\lambda,1}(t) = t e^{\lambda t}$$

ein Fundamentalsystem. Wir erhalten also die allgemeine Lösung

$$x(t) = a e^{-rt} + b t e^{-rt} = (a + b t) e^{-rt}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (\text{aperiodischer Grenzfall})$$

Die Lösung des zweiten Falls ist auch für $r = 0$ gültig, sodass man den ersten in den zweiten Fall (mit $\omega_0 = \omega$) mit aufnehmen kann.

Mit Hilfe der allgemeinen Lösungen lassen sich Anfangswertprobleme lösen. Ist zum Beispiel $x_0 = x(0) = 0$ und $v_0 = \dot{x}(0) \in \mathbb{R}$ (Start im Nullpunkt zur Zeit 0 mit einer beliebigen Geschwindigkeit), so ergibt sich im dritten Fall

$$0 = x(0) = a e^{\lambda_1 0} + b e^{\lambda_2 0} = a + b,$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = a \lambda_1 e^{\lambda_1 0} + b \lambda_2 e^{\lambda_2 0} = \lambda_1 a + \lambda_2 b.$$

Dieses Gleichungssystem in den Unbekannten a und b hat die Lösung

$$a = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{v_0}{2\omega_r}, \quad b = -a = -\frac{v_0}{2\omega_r}.$$

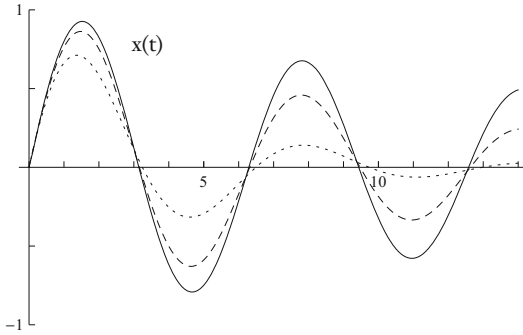
An diesem einfachen Beispiel kann man die Bedingung an die Wronski-Determinante einsehen: Ist sie stets ungleich Null, so ist das sich aus einer allgemeinen Lösung für bestimmte Anfangswerte ergebende Gleichungssystem eindeutig lösbar. In unserem Fall ist

$$f_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad f_2(t) = e^{\lambda_2 t},$$

$$W(t) = f_1(t) f_2'(t) - f_2(t) f_1'(t) = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0.$$

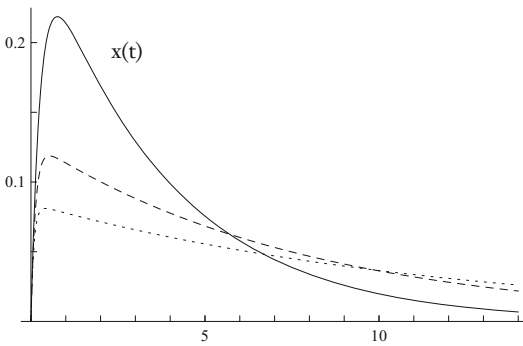
Wir stellen die Lösungen für die vier Fälle tabellarisch zusammen und visualisieren den typischen Verlauf.

Fall	Lösung $x(t)$ für $x_0 = 0, v_0 \in \mathbb{R}$
$r = 0$	$v_0/\omega \sin(\omega t)$
$\omega > r$	$v_0/\omega_r e^{-rt} \sin(\omega_r t)$
$\omega < r$	$v_0/(2\omega_r) e^{-rt} (e^{\omega_r t} - e^{-\omega_r t}) = v_0/\omega_r e^{-rt} \sinh(\omega_r t)$
$\omega = r$	$v_0 t e^{-rt}$

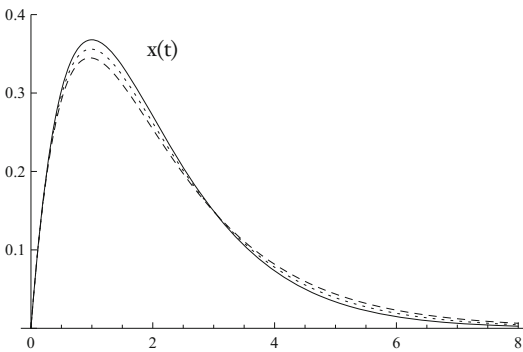


Im Folgenden ist $\omega_0 = \nu_0 = 1$.

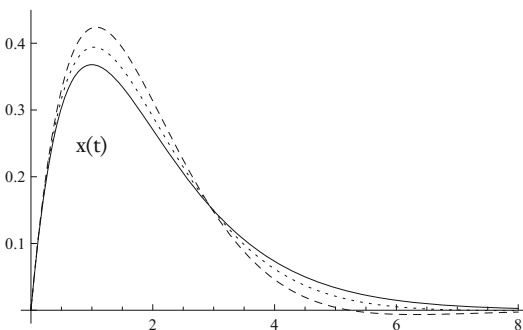
Links sind gedämpfte Schwingungen für $r = 1/20$, $r = 1/10$ (gestrichelt) und $r = 1/4$ (gepunktet) gezeigt. Die Periode $2\pi/\omega_r$ der Schwingungen hängt von r ab.



Kriechfälle für $r = 2$, $r = 4$ (gestrichelt) und $r = 6$ (gepunktet).



Der aperiodische Grenzfall $r = \omega$ (durchgezogen) lässt sich sowohl als Limes $r \downarrow 1$ des Kriechfalls (im Diagramm sind $r = 1,1$ und $r = 1,05$) ansehen ...



... als auch als Limes $r \uparrow 1$ einer gedämpften Schwingung (im Diagramm sind $r = 0,8$ und $r = 0,9$).

Matrixexponentiale

Eine Differentialgleichung der Form $y'(x) = ay(x)$, $a \in \mathbb{C}$, lässt sich mit Hilfe der Exponentialfunktion leicht lösen: Für alle $c \in \mathbb{C}$ ist

$$(+)\quad c e^{ax}, \quad x \in \mathbb{R}$$

eine auf ganz \mathbb{R} definierte komplexwertige Lösung. Ein n -dimensionales homogenes System mit konstanten komplexwertigen Koeffizienten

$$y'(x) = A y(x), \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

lässt sich, wie wir nun zur Vertiefung der obigen Diskussion zeigen wollen, mit Hilfe der auf Matrizen erweiterten Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ ganz analog lösen. Die Lösungen des Systems haben die zu (+) analoge Form

$$(++)\quad e^{xA} c, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit komplexen quadratischen Matrizen A , $e^{xA} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$. Hier ist es wichtig, dass der Skalar x links der Matrix A und der n -dimensionale Vektor c rechts der Matrix e^{xA} steht.

Wir definieren:

Definition (*Matrixexponential*)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann ist das *Exponential* $\exp(A) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ von A definiert durch

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

Statt $\exp(A)$ schreiben wir oft auch e^A .

Die Reihe ist als Limes der Partialsummen bezüglich einer beliebigen Matrixnorm zu verstehen. Die Konvergenz ist die Konvergenz der Einträge in \mathbb{C} :

$$e^A(i, j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq n} \frac{A^k(i, j)}{k!} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n.$$

Dabei bezeichnet $B(i, j)$ den Eintrag b_{ij} einer Matrix $B = (b_{ij})_{ij}$.

Beispiele

(1) Für die Nullmatrix gilt $\exp(0) = 0^0 = E_n$.

(2) Ist $A^m = 0$ für ein m , so $\exp(A)$ das Matrixpolynom $\sum_{k < m} A^k/k!$.

(3) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^k & 1 - (-1)^k \\ 1 - (-1)^k & 1 + (-1)^k \end{pmatrix}$ für alle k .

$$\text{Damit ist } e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + 1/e & e - 1/e \\ e - 1/e & e + 1/e \end{pmatrix}.$$

Allgemein führt wie im vertrauten Fall $n = 1$ der schnelle Abfall der Koeffizienten $1/k!$ zur Konvergenz der Reihe:

Satz (*Konvergenzsatz für $\exp(A)$*)

Für alle $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ konvergiert die Reihe $\exp(A)$.

Damit ist eine Abbildung $\exp : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ erklärt. Wichtige Eigenschaften, die wir ohne Beweis angeben, sind:

Satz (*Eigenschaften des Matrixexponentials*)

Für alle $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt:

- (a) e^A ist invertierbar und es gilt $(e^A)^{-1} = e^{-A}$,
- (b) $e^{A+B} = e^A e^B$, falls $AB = BA$,
- (c) $\det(e^A) = e^{\text{spur}(A)}$,
- (d) $e^{A^*} = (e^A)^*$, wobei $A^* = (\overline{a_{ji}})_{ij} = (\overline{A})^t$ die zu A adjungierte Matrix ist.

Der Beweis des Additionstheorems kann aus dem Reellen übernommen werden. Der dabei verwendete binomische Lehrsatz ist jedoch in Ringen im Allgemeinen nur dann gültig, wenn die beiden beteiligten Elemente kommutieren. Dies erklärt die Bedingung „ $AB = BA$ “.

Folgender Satz ermöglicht in wichtigen Fällen die Berechnung von e^A durch Diagonalisierung:

Satz (*Berechnung des Matrixexponentials*)

- (a) Sei $A = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix. Dann gilt

$$e^A = \text{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n}).$$

Insbesondere gilt $e^{\lambda E_n} = \text{diag}(e^\lambda, \dots, e^\lambda) = e^\lambda E_n$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

- (b) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ähnlich, und sei $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar mit

$$A = S^{-1} B S.$$

Dann gilt $e^A = S^{-1} e^B S$.

- (c) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar, und sei $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar mit

$$A = S^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S,$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A . Dann gilt

$$e^A = S^{-1} \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) S.$$

Dabei bezeichnet $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ die Matrix A des $\mathbb{C}^{n \times n}$ mit den Einträgen $A(i, i) = d_i$ und $A(i, j) = 0$ für $i \neq j$. Nach (b) sind e^A, e^B ähnlich, wenn A, B ähnlich sind, und nach (c) ist e^A diagonalisierbar, wenn A dies ist.

Ist A diagonalisierbar, so kann mit Hilfe von Teil (c) das Matrixexponential e^A berechnet werden, wenn die Eigenwerte und eine Basis aus Eigenvektoren von A bekannt sind. Im nichtdiagonalisierbaren Fall kann, wie sich zeigen lässt, die Jordansche Normalform zur Berechnung eingesetzt werden.

Wir betrachten nun für ein festes $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $f(x) = xA$. Wie im eindimensionalen Fall darf gliedweise differenziert werden: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = \sum_{k \geq 0} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} A^k = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A e^{xA}.$$

Damit ist $f' = Af$ und wir erhalten:

Satz (*Lösung mit Hilfe von Matrixexponentialen*)

Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{C}^n$. Dann hat das lineare AWP

$$y'(x) = Ay(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

die eindeutige Lösung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit

$$f(x) = e^{(x-x_0)A} y_0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Damit lassen sich die betrachteten lineare Systeme mit Methoden der Linearen Algebra lösen. Wir betrachten ein einfaches Beispiel.

Beispiel

Gegeben sei das zweidimensionale AWP

$$y'(x) = Ay(x), \quad y(0) = (0, 1), \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ hat xA die Eigenwerte $\pm 2x$ und zugehörige von x unabhängige Eigenvektoren $(\pm 1, 2)$. Ist S^{-1} die 2×2 -Matrix mit den Spalten $(1, 2)$ und $(-1, 2)$, so gilt nach (c) des obigen Berechnungssatzes

$$\begin{aligned} e^{xA} &= S^{-1} \operatorname{diag}(e^{2x}, e^{-2x}) S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2x} + e^{-2x} & (e^{2x} - e^{-2x})/2 \\ 2(e^{2x} - e^{-2x}) & e^{2x} + e^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(2x) & \sinh(2x)/2 \\ 2 \sinh(2x) & \cosh(2x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = e^{xA} (0, 1) = \left(\frac{\sinh(2x)}{2}, \cosh(2x) \right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

die Lösung des AWP.

Die ortsabhängige Beschleunigung in einer Dimension

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x}(t) = F(x(t))$$

beschreibt einen Massepunkt der Masse $m = 1$, der sich in einer räumlichen Dimension x in der Zeit t unter dem Einfluss einer Kraft $F(x)$ bewegt, die vom Ort $x(t)$, nicht aber von der Zeit t und der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ abhängt. Der ungedämpfte harmonische Oszillator ist ein Beispiel. Oben hatten wir die Differentialgleichung bereits in der Form $y'' = \phi(y)$ untersucht. Das erzielte Ergebnis wollen wir nun physikalisch interpretieren:

Satz (Lösungen von $\dot{x}(t) = F(x(t))$)

Seien J ein Intervall, $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in J$ und $V : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F(u) \, du \quad \text{für alle } x \in J. \quad (\text{Potential von } F \text{ mit } V(x_0) = 0)$$

Weiter sei E (Gesamtenergie) derart, dass $V(x) < E$ für alle $x \in J$. Für ein bestimmtes Vorzeichen (Geschwindigkeitsrichtung) sei $T : J \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$T(x) = \pm \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{2(E - V(s))}} \quad \text{für alle } x \in J. \quad (\text{Zeitmessung})$$

Ist nun I ein Intervall und $t_0 \in I$ mit $t - t_0 \in T[J]$ für alle $t \in I$, so haben die äquivalenten AWP

$$(I) \quad \dot{x}(t) = \pm \sqrt{2(E - V(x(t)))}, \quad x(t_0) = x_0$$

$$(II) \quad \ddot{x}(t) = F(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 = \pm \sqrt{2E}$$

die eindeutige Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = T^{-1}(t - t_0) \quad \text{für alle } t \in I. \quad (\text{Ortsfunktion})$$

Für alle $t \in I$ gilt

$$E = E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) = \dot{x}^2/2 + V(x(t)). \quad (\text{Energieerhaltung})$$

Alle mathematischen Objekte unserer Analyse besitzen also eine physikalische Bedeutung. Speziell ist

t_0 die *Startzeit*, x_0 der *Startort*, v_0 die *Startgeschwindigkeit*.

J ist ein Orts- und I ein Zeitintervall. Wegen $x(t) = T^{-1}(t - t_0)$ ist

$$T(x(t)) = T(x(t)) - T(x_0) = t - t_0,$$

sodass $T(x)$ die Zeit ist, die der Massepunkt benötigt, um sich von x_0 nach x zu bewegen. Direkter kann man „Zeit ist Weg durch Geschwindigkeit“ verwenden:

$$dt = \frac{dx}{\dot{x}(t)} = \pm \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}$$

Integrieren auf beiden Seiten liefert die Interpretation von $T(x)$.

Bemerkenswert ist, dass die Zeitmessung als Vorstufe der Ortsbestimmung erscheint. Wir berechnen zunächst $T(x)$ und gewinnen hieraus $x(t)$.

Die Energieerhaltung ist äquivalent zu (I). Setzt man sie als bekannt voraus, so kann man direkt mit dem AWP (I) beginnen, die Reduktion eines Problems zweiter Ordnung ist dann nicht mehr notwendig (bzw. bereits durchgeführt). Mit Hilfe von (I) können wir die Frage „Welche Geschwindigkeit hat der Massepunkt, wenn er sich am Ort x befindet?“ beantworten, ohne die Ortsfunktion $x(t)$ zu kennen. Diese Geschwindigkeiten sind von Beginn an bekannt.

Aus der Energieerhaltung folgt $V(x(t)) \leq E$ für alle Zeiten t . Ist $E = V(x(t))$, so gilt $\dot{x}(t) = 0$, d. h., der Massepunkt steht zur Zeit t still. Im Satz ist $E = V(x)$ ausgeschlossen, um Nullstellen des Nenners im Zeitintegral $T(x)$ zu vermeiden. Um Ruhepunkte zu behandeln, erweitern wir das Ergebnis:

Satz (Lösungen von $\dot{x}(t) = F(x(t))$, Ergänzung)

In der obigen Situation sei $x^* \in \mathbb{R}$ ein Randpunkt von J und $E = V(x^*)$.

Weiter sei $t^* = T(x^*) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ wie oben als uneigentliches Integral definieren. Dann gilt:

- (a) Ist t^* endlich, so lässt sich die Lösung $x(t)$ durch $x(t^*) = x^*$ zu einer Lösung auf $I \cup \{t^*\}$ fortsetzen.
- (b) Gilt $V'(x^*) \neq 0$, so ist t^* endlich.
- (c) Ist $V'(x^*) = 0$ und F lokal Lipschitz-stetig in x^* , so ist t^* unendlich.

Beweis

zu (a): Die Lösung durch „Trennung der Variablen“ bleibt für derartige Randpunkte richtig. ($T(x)$ ist in x^* aufgrund der dortigen unendlichen Steigung nicht differenzierbar, aber die Umkehrfunktion $x(t)$ ist in t^* differenzierbar mit Ableitung $0 = 1/\infty$.)

zu (b): Wir nehmen an, dass x^* der rechte Randpunkt von J ist. Dann ist $V'(x^*) > 0$. Da $V' = -F$ stetig ist, gibt es ein $a < x^*$, sodass V' in $[a, x^*]$ monoton wächst und damit invertierbar ist. Weiter können wir annehmen, dass $-V'(x) = F(x) \geq m > 0$ für alle $x \in [a, x^*]$. Dann zeigt die Substitution $u = E - V(s)$, $du = F(s) ds$, dass

$$\int_a^{x^*} \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} \leq \int_{E - V(a)}^0 \frac{du}{m \sqrt{u}} < \infty.$$

Hieraus folgt $T(x^*) < \infty$. Ein linker Randpunkt wird analog behandelt.

zu (c): Andernfalls wären die nach t^* fortgesetzte Funktion $x(t)$ und die konstante Funktion $x_{\text{const}}(t) = x^*$ zwei verschiedene Lösungen von

$$\ddot{x}(t) = F(x), \quad x(t^*) = x^*, \quad \dot{x}(t^*) = 0$$

– auf $I \cup \{t^*\}$ was dem Eindeutigkeitssatz widerspricht.

Dass t^* endlich und damit die Eindeutigkeit der Lösung verletzt sein kann, wenn F nicht lokal Lipschitz-stetig in einem Ruhepunkt x^* ist, zeigt:

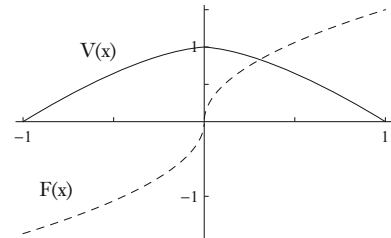
Beispiel

Für $F(x) = \text{sgn}(x) \frac{3}{2} \sqrt{|x|}$, $x_0 = 1$, $t_0 = 0$, $E = 1$, $v_0 = -\sqrt{2}$ gilt

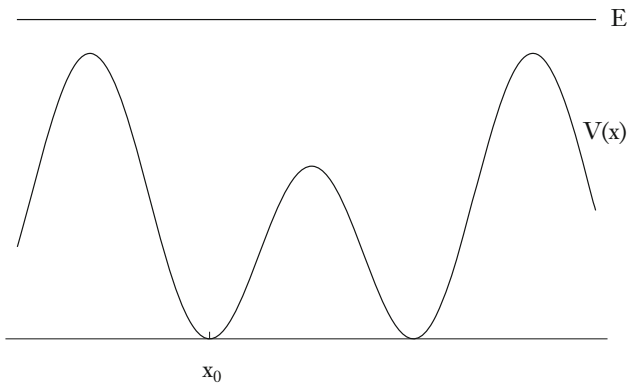
$$V(x) = 1 - |x|^{3/2}, \quad V(0) = 1 = E,$$

$$T(0) = - \int_1^0 \frac{ds}{\sqrt{2(E - V(s))}} =$$

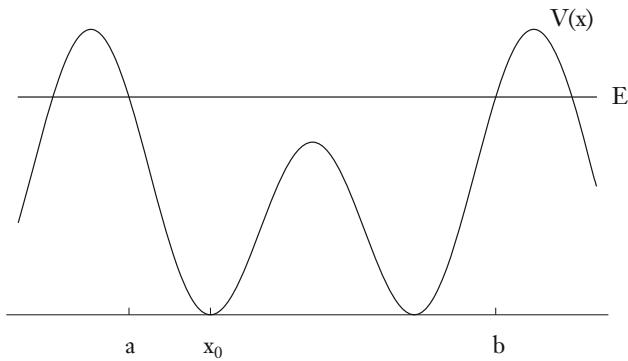
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 s^{-3/4} ds = 2\sqrt{2}.$$



Wir betrachten drei typische Fälle.

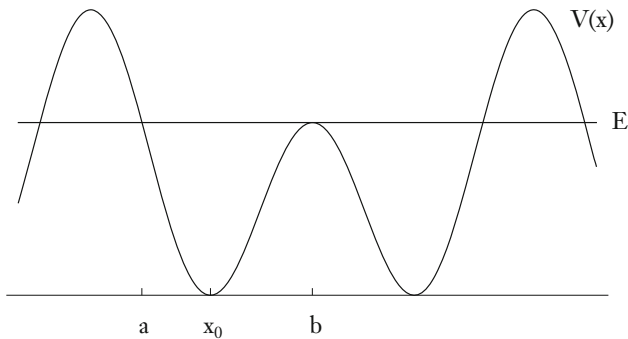


Der Massepunkt startet bei x_0 zur Zeit t_0 mit der Geschwindigkeit v_0 . Das Potential V ist in x_0 auf 0 normiert. Ist die Energie E in allen Punkten größer als $V(x)$, so liefert der Satz eine globale Lösung $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeiten kleiner als t_0 beschreiben die Vergangenheit, Zeiten größer als t_0 die Zukunft. In Regionen mit großem Potential bewegt sich der Massepunkt langsamer, seine Beschleunigung ist durch die negative Ableitung von V gegeben. Die Dynamik ist qualitativ vergleichbar mit einer unter der Schwerkraft auf dem Graphen von V rollenden Kugel. Im allgemeinen hat aber F nichts mit einer Schwerkraft zu tun und die Bewegung ist eine eindimensionale Bewegung auf der x -Achse, nicht auf V .



Im zweiten Diagramm gibt es zwei Ruhepunkte a und b , in denen der Massepunkt stillsteht. Der Satz liefert eine bijektive Lösung auf einem Zeitintervall $I =]t_{\min}, t_{\max}[$ mit Werten in $J =]a, b[$. Wegen $V'(a), V'(b) \neq 0$ sind t_{\min}, t_{\max} endlich und wir können die Lösung nach $[t_{\min}, t_{\max}]$ fortsetzen. Ist $v_0 > 0$, so ist $x(t_{\max}) = b$ und $x(t_{\min}) = a$, andernfalls ist $x(t_{\max}) = a$ und $x(t_{\min}) = b$. Eine Lösung auf \mathbb{R} erhalten wir, indem wir mit Hilfe der Lösung auf $[t_{\min}, t_{\max}]$ eine Schwingung konstruieren, bei der der Massepunkt zwischen a und b hin und her läuft. An den Ruhepunkten wechselt die Geschwindigkeit das Vorzeichen. Die Schwingungsdauer ist gegeben durch das uneigentliche Integral

$$T = 2(t_{\max} - t_{\min}) = 2 \int_a^b \frac{ds}{\sqrt{2(E - V(s))}} \quad (\text{Schwingungsdauer})$$



Nun ist $V'(b) = 0$ im Ruhepunkt b . Ist $v_0 > 0$ und F lokal Lipschitz-stetig in b , so läuft das Teilchen in unendlich langer Zeit von x_0 nach b , ohne den Punkt b jemals zu erreichen. Obiges Beispiel zeigt, dass bei Verletzung der Lipschitz-Stetigkeit der Punkt b auch in endlicher Zeit erreicht werden kann. In diesem Fall verzweigen sich die Lösungen. Ein Liegenbleiben bei b ist ebenso möglich wie ein Zurücklaufen nach a oder ein Weiterlaufen bis zum nächsten Ruhepunkt.

Ausblick: Kreispendedel und Zykloidenpendel

Ein auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $\ell > 0$ reibungsfrei geführter Körper erfüllt unter der senkrecht wirkenden Schwerkraft die von der Masse des Körpers unabhängige Differentialgleichung

$$\ell \ddot{\varphi}(t) = -g \sin(\varphi(t)),$$

die innerhalb der elementaren Funktionen nicht lösbar ist. Man kann sie für kleine Winkel φ zu

$$\ell \ddot{\varphi}(t) = -g \varphi(t)$$

vereinfachen und durch

$$\varphi(t) = a \cos(\omega t - t_0),$$

$$\omega = \sqrt{g/\ell}, \quad a, t_0 \in \mathbb{R}$$

lösen (wir diskutieren

diese aus der Schule bekannten

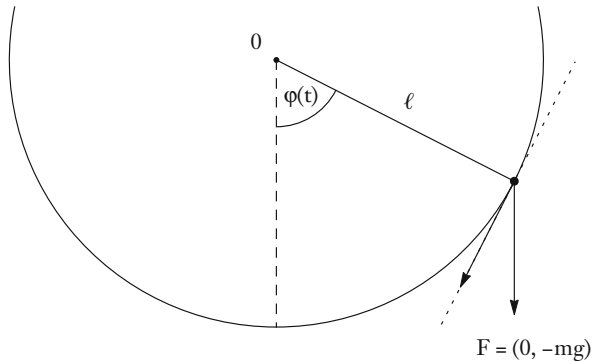
Formeln in den Ergänzungen E11). Unter dieser Vereinfachung schwingt der Körper also harmonisch im Winkel $\varphi(t)$ oder gleichwertig in der signierten Bogenlänge $L(t) = \ell \varphi(t)$. Die Schwingungsdauer

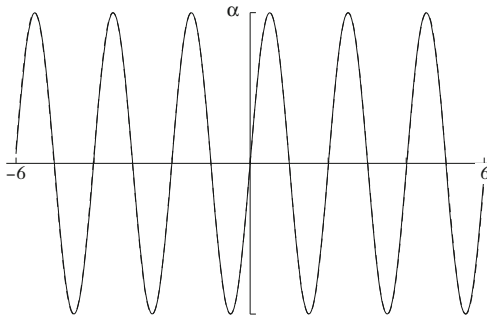
$$T = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{\ell/g}$$

ist unabhängig von der Auslenkung.

Der Schönheitsfehler dieses Ergebnisses ist die keineswegs unerhebliche Ersetzung von $\sin(\varphi)$ durch φ . Die Lösung wird für große Auslenkungen nicht nur ungenau, sondern auch qualitativ falsch: Startet der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei $\varphi(t_0) = 0$ mit einer hinreichend hohen Geschwindigkeit $\dot{\varphi}(t_0) > 0$, so schlägt er über. Die korrekte Lösung $\varphi(t)$ ist in diesem Fall monoton steigend in t . Die folgenden Diagramme zeigen den Unterschied zwischen korrekten und vereinfachten Lösungen.

Für kleine Auslenkungen kann man sich die physikalische Situation als Fadenpendel vorstellen. Für Auslenkungen größer als $\pi/2$ verhält sich ein reales Fadenpendel aber anders als ein auf einem Kreis geführtes Pendel. Der Faden ist also bei unserer Differentialgleichung als masselose starre Stange zu interpretieren. Alternativ kann man sich den Kreis auch als Schiene wie bei einer Achterbahn vorstellen und ganz auf eine physikalische Verbindung zwischen dem Mittelpunkt und der sich bewegenden Masse verzichten. Entscheidend ist die bei einer vorgegebenen Führungslinie in jedem Punkt wirkende Kraft. Diese Sicht wird sich auch bei der Untersuchung des Zykloidenpendels bewähren, da sie insbesondere das Messen in einer signierten Bogenlänge statt einem Winkel nahelegt.





Im Folgenden ist immer

$$g = 9,8, \quad \ell = 1, \quad \varphi(0) = 0.$$

Das erste Diagramm zeigt die Lösung des vereinfachten AWP

$$\ddot{\varphi}(t) = -g \varphi(t), \quad \dot{\varphi}(0) = 1/2,$$

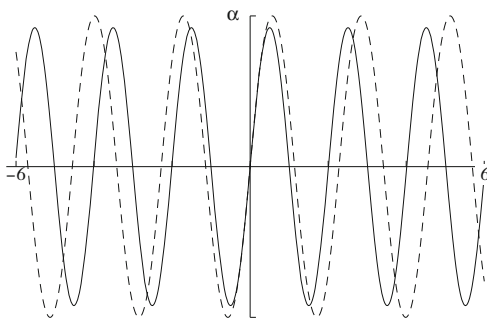
sowie gestrichelt die (mit Hilfe elliptischer Funktionen bestimmte) Lösung des AWP

$$\ddot{\varphi}(t) = -g \sin(\varphi(t)), \quad \dot{\varphi}(0) = 1/2.$$

Die Lösungen sind im gezeigten Zeitintervall kaum zu unterscheiden. Für $\dot{\varphi}(0) = 4$ (zweites Diagramm) sind die Fehler in der Periode T und Auslenkung

$$\alpha = \arccos(1 - \dot{\varphi}(0)^2 / (2\omega^2))$$

deutlich.

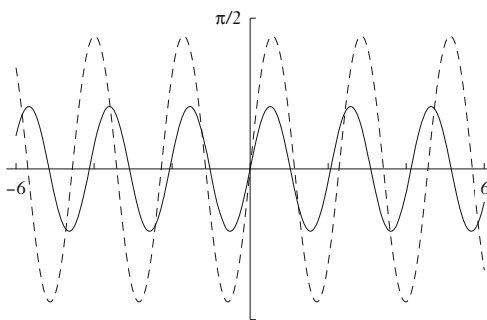


Das dritte Diagramm zeigt die Lösungen der Sinus-AWP

$$\ddot{\varphi}(t) = -g \sin(\varphi(t)), \quad \dot{\varphi}(0) = 2,$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -g \sin(\varphi(t)), \quad \dot{\varphi}(0) = 4$$

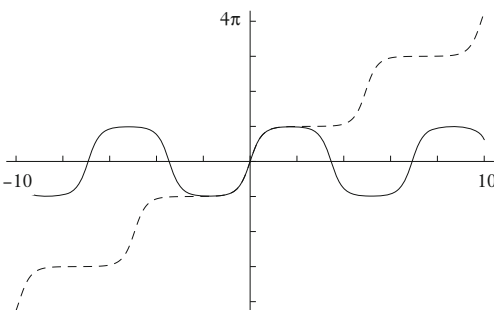
Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Auslenkung ist sichtbar.



Schließlich betrachten wir die Lösungen der Sinus-AWP mit

$$\dot{\varphi}(0) = 6,26 \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varphi}(0) = 6,261.$$

Im zweiten Fall schlägt der Körper über und läuft auf einer Kreisbahn. Für die kritische Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(0)_c$ gilt aufgrund der Energieerhaltung $\dot{\varphi}(0)_c = 2\omega = 6,2609\dots$



Die Integralformel für die Schwingungsdauer

Sei $\alpha \in]0, \pi[$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(+)\quad \ell \ddot{\varphi}(t) = -g \sin(\varphi(t)), \quad \varphi(0) = \alpha, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Der Körper startet also zur Zeit 0 mit der Auslenkung α und der Geschwindigkeit 0. Die Lösung φ des AWP ist eine nicht harmonische Schwingung zwischen den Winkeln $-\alpha$ und α . Nach unseren Untersuchungen über ortsabhängige Beschleunigungen in einer Dimension (hier der Winkel φ) können wir eine Formel für die Schwingungsdauer angeben. Mit $\omega^2 = g/\ell$,

$$V(\varphi) = - \int_0^\varphi -\omega^2 \sin(u) \, du = \omega^2 (1 - \cos(\varphi)),$$

$$E = V(\alpha) = \omega^2 (1 - \cos(\alpha))$$

und der allgemeinen Formel

$$2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{ds}{\sqrt{2(E - V(s))}}$$

für die Schwingungsdauer erhalten wir

$$T(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \int_0^\alpha \frac{ds}{\sqrt{\cos(s) - \cos(\alpha)}}. \quad (\text{Schwingungsdauer des Pendels})$$

Zur Illustration leiten wir diese Formel noch einmal direkt ab. Multiplikation von (+) mit $\dot{\varphi}(t)$ ergibt

$$\frac{\dot{\varphi}(t)^2}{2} = \int_0^t \ddot{\varphi}(u) \dot{\varphi}(u) \, du = \int_0^t -\omega^2 \sin(\varphi(u)) \dot{\varphi}(u) \, du = \omega^2 (\cos(\varphi(t)) - \cos(\alpha)).$$

Wurzelziehen mit negativem Vorzeichen (da $\dot{\varphi}(t) < 0$ für kleine positive t) liefert, dass für die gesuchte Schwingungsdauer $T = T(\alpha)$ gilt:

$$\int_0^{T/4} \frac{\dot{\varphi}(u)}{-\sqrt{\cos(\varphi(u)) - \cos(\alpha)}} \, du = \int_0^{T/4} \sqrt{2} \, \omega \, du = \frac{\omega T}{2\sqrt{2}}.$$

Zur Zeit $T/4$ befindet sich der Körper am unteren Kreispunkt, sodass $\varphi(T/4) = 0$. Dies erlaubt, die Abhängigkeit des Integrals von T zu eliminieren:

$$\frac{\omega T}{2\sqrt{2}} = \int_{T/4}^0 \frac{\dot{\varphi}(u) \, du}{\sqrt{\cos(\varphi(u)) - \cos(\alpha)}} = \int_0^\alpha \frac{ds}{\sqrt{\cos(s) - \cos(\alpha)}}.$$

Damit haben wir die obige Formel reproduziert.

Der Integrand besitzt jedoch keine elementare Stammfunktion. Setzen wir

$$k = \sin(\alpha/2), \quad \text{sodass} \quad 2k^2 = 1 - \cos(\alpha),$$

$$v = \sin(s/2)/k, \quad \text{sodass} \quad s = 2 \arcsin(kv),$$

so liefert die trigonometrische Formel

$$2 \sin(s/2)^2 = 1 - \cos(s) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}$$

die Umformung

$$\int_0^\alpha \frac{ds}{\sqrt{\cos(s) - \cos(\alpha)}} = \int_0^\alpha \frac{ds}{\sqrt{2} k \sqrt{1 - v^2}} =$$

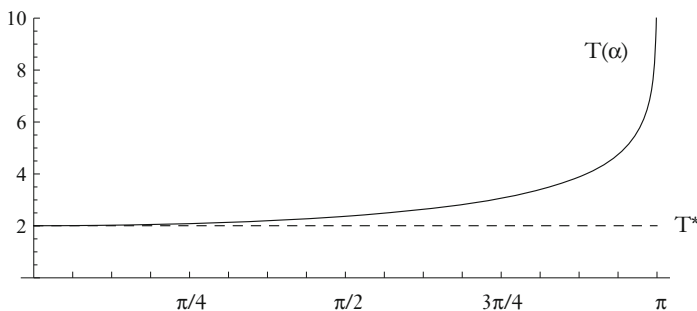
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2} dv}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{1 - k^2 v^2}} = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin(\psi)^2}},$$

wobei wir zuletzt die Substitution $\sin(\psi) = v$ durchgeführt haben. Damit ist wie beim Umfang der Ellipse und der Länge einer Lemniskate ein elliptisches Integral aufgetaucht. Diese Integrale werden wir im Exkurs genauer untersuchen. Mit Hilfe der sich aus den elliptischen Integralen ergebenden elliptischen Funktionen werden wir dort auch das Kreispendel allgemein lösen.

Das folgende Diagramm zeigt die Schwingungsdauer T in Abhängigkeit von der maximalen Auslenkung $\alpha \in]0, \pi[$ für die Länge $\ell = 1$ und $g = 9,9$ und einige auf vier Stellen gerundete numerische Werte. Dabei ist

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega} = 2,0070 \dots$$

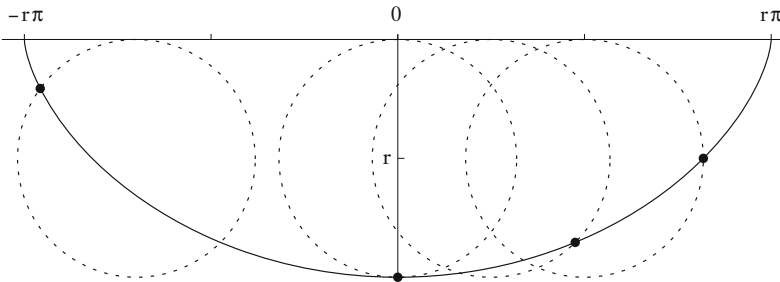
die Schwingungsdauer des vereinfachten Pendels, bei dem $\sin(\varphi)$ durch φ ersetzt wird.



α	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	$15\pi/16$
$T(\alpha)$	2,0873	2,3690	3,0667	3,8846	4,7474

Das Zykloidenpendel

Eine natürliche Frage ist, wie ein Pendel zu konstruieren sei, dessen Schwingungsdauer unabhängig von der Auslenkung ist. Huygens fand – noch vor der Erfindung der Differentiation und Integration durch Leibniz und Newton –, dass eine Zykloide geeignet ist (vgl. auch 3.2). Wir betrachten hierzu die folgende „Zykloidenschüssel“ unterhalb der x -Achse:

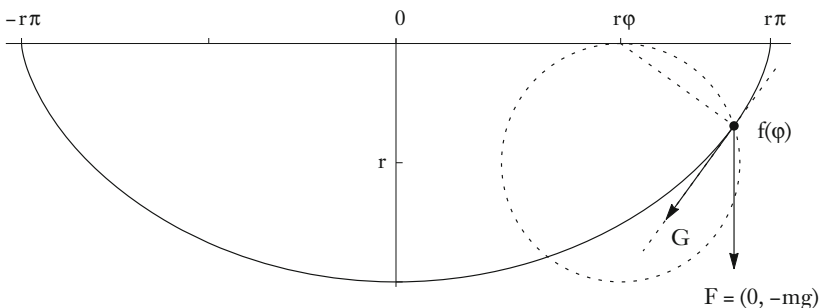


Ein Kreis mit Radius r rollt unterhalb der x -Achse nach links und rechts einen halben Umfang ab. Die so entstehende Bewegung des Punktes $(0, -2r)$ ist eine Überlagerung einer Kreisbewegung und einer Seitwärtsbewegung. Wir parametrisieren sie durch $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(\varphi) = r e^{i(\varphi + 3/2 \pi)} + r(\varphi, -1) = r(\sin(\varphi) + \varphi, -\cos(\varphi) - 1) \quad \text{für } \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Der Winkel φ ist der Abrollwinkel des Kreises.

Gegeben sei nun ein Körper der Masse m , der auf der Zykloide geführt wird und sich in Folge der Schwerkraft bewegt. Anschaulich können wir uns eine kleine Kugel vorstellen, die in der Schüssel reibungsfrei hin und her rollt. Wir zeigen, dass die Schwingungsdauer dieser Bewegung unabhängig von der Auslenkung – dem höchsten von der Kugel erreichten Punkt – ist. Wie für das Kreispendel ist die in einem Punkt $f(\varphi)$ der vorgegebenen Bahn auf den Körper wirkende Kraft die Projektion der Schwerkraft auf die dortige Tangente. Diese Tangente ergibt sich aus der Ableitung der regulären Kurve f .



Für den Tangentialvektor der Zykloide gilt

$$f'(\varphi) = r (\cos(\varphi) + 1, \sin(\varphi)) \quad \text{für alle } \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Damit ist die Projektion des Kraftvektors $F = (0, -mg)$ auf $f'(\varphi)$ gleich

$$G(\varphi) = \langle f'(\varphi), F \rangle \frac{f'(\varphi)}{\|f'(\varphi)\|^2} = - \frac{r m g \sin(\varphi)}{\|f'(\varphi)\|} \frac{f'(\varphi)}{\|f'(\varphi)\|}.$$

Wegen

$$\|f'(\varphi)\|^2 = 2 r^2 (1 + \cos(\varphi)) = 4 r^2 \cos(\varphi/2)^2$$

und $\cos(\pi/2) \geq 0$ für $\varphi \in [-\pi, \pi]$ ist also

$$G(\varphi) = - \frac{m g \sin(\varphi)}{2 \cos(\varphi/2)} \frac{f'(\varphi)}{\|f'(\varphi)\|} = - m g \sin(\varphi/2) \frac{f'(\varphi)}{\|f'(\varphi)\|}.$$

Bislang war alles Geometrie. Nun betrachten wir den Abrollwinkel φ in Abhängigkeit von einer Zeitvariablen t . Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt

$$(+)\quad m \ddot{L}(t) = - m g \sin(\varphi(t)/2)$$

für die signierte Länge $L(t)$ des durch $(0, -2r)$ und $f(\varphi(t))$ bestimmten Zykloidenbogens (für $\varphi(t) < 0$ ist $L(t)$ negativ). Analog zur Längenberechnung in 3.2 ergibt sich $L(t) = 4 r \sin(\varphi(t)/2) \in [-4r, 4r]$, sodass

$$(++)\quad \ddot{L}(t) = - \frac{g}{4r} L(t).$$

Folglich gilt

$$L(t) = a \cos(\omega t - t_0), \quad \omega = \sqrt{g/(4r)}, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0.$$

Zusammenfassend haben wir gezeigt:

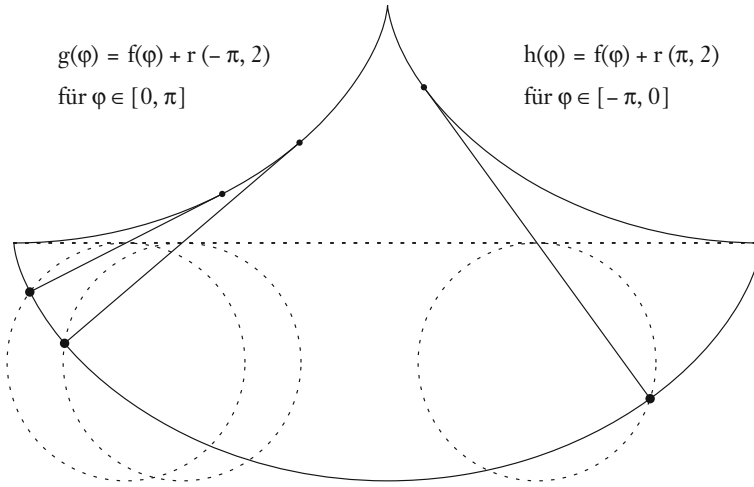
Die Bewegung eines Massepunktes in der Zykloide f unter der Schwerkraft ist eine harmonische Schwingung in der signierten Bogenlänge. Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Auslenkung und gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4r}{g}}.$$

Die Unabhängigkeit von der Auslenkung wird noch beeindruckender, wenn wir das Ergebnis wie folgt interpretieren: Gleiten zwei Körper beliebiger Masse reibungsfrei mit gleicher Startzeit auf einer Zykloiden-Rutsche herab, so kommen sie unabhängig von der Starthöhe gleichzeitig am Boden an. Die Zykloide ist also eine *Tautochrone*. Wie bereits in 3.2 erwähnt ist sie auch eine *Brachistochrone*: Zykloiden-Rutschen sind unschlagbar schnell. Diese Eigenschaft kann mit Methoden der Variationsrechnung bewiesen werden.

Das Zykloidenpendel als Fadenpendel

Unsere Schwingung haben wir in Form der Führung auf einer Zyklode angegeben. Huygens hat entdeckt, dass man ein Zykloidenpendel auch mit Hilfe eines Fadens konstruieren kann. Hierzu zwingt man ein übliches Fadenpendel, sich links und rechts an Zykloiden anzuschmiegen. Durch die so entstehende Verkürzung des Abstands zum Aufhängepunkt ergibt die gewünschte Bahn der Bewegung.



Zykloidenpendel von Christiaan Huygens. Der Pendelfaden hat die Länge $4r$ und schmiegt sich an zwei Zykloiden g und h an, die Translationen von f sind. Befindet sich das Pendel bei $f(\varphi)$, so verlässt der Faden die obere Zyklode bei $g(\varphi + \pi)$ für $\varphi \leq 0$ bzw. $h(\varphi - \pi)$ für $\varphi \geq 0$.

6. Abschnitt

Überblickswissen Mehrdimensionale Integration

Das Riemann-Integral für höhere Dimensionen

Wir erweitern unseren Integrationsbegriff auf reellwertige Funktionen mit mehrdimensionalen Definitionsbereichen, sodass wir insbesondere Volumina dreidimensionaler Körper mit analytischen Methoden berechnen können.

Sind $[a, b]$, $[c, d]$ reelle Intervalle und ist $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, so können wir wieder versuchen, der Funktion f eine reelle Zahl $I(f)$ zuzuordnen, die anschaulich der signierte Volumeninhalt der Menge der Punkte zwischen dem Graphen von f und der x - y -Ebene ist oder gleichwertig der mit $(b - a)(d - c)$ multiplizierte Mittelwert von f . Die Durchführung der Konstruktion des Riemann-Integrals für Funktionen auf $[a, b] \times [c, d]$ verläuft in Analogie zum eindimensionalen Fall. An die Stelle der Partitionen von Intervallen treten Partitionen von Rechtecken.

Definition (Partitionen von Rechtecken)

Sei $P = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ mit beschränkten Intervallen $[a, b]$ und $[c, d]$. Dann heißt $p = (t_k, s_j, x_{k,j})_{k \leq n, j \leq m}$ eine *Partition* von P , falls gilt:

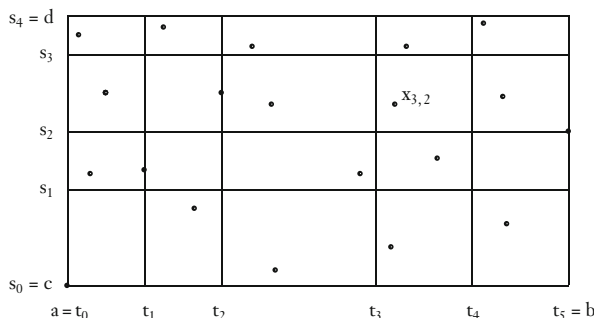
- (a) $(t_k)_{k \leq n}$ ist eine stützstellenfreie Partition von $[a, b]$,
- (b) $(s_j)_{j \leq m}$ ist eine stützstellenfreie Partition von $[c, d]$,
- (c) $x_{k,j} \in [t_k, t_{k+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ für alle $k \leq n$ und $j \leq m$.

Die Punkte t_k, s_j heißen die *Zerlegungspunkte* und die Punkte $x_{k,j}$ die *Stützstellen* von p . Die Partition p hat die *Feinheit* $\delta > 0$, falls die Partitionen $(t_k)_{k \leq n}$ und $(s_j)_{j \leq m}$ die Feinheit δ besitzen. Weiter setzen wir

$$\delta(p) = \max(\delta((t_k)_{k \leq n}), \delta((s_j)_{j \leq m})).$$

p heißt *äquidistant*, falls $(t_k)_{k \leq n}$ und $(s_j)_{j \leq m}$ äquidistant sind.

Das Rechteck P wird durch p in $n \cdot m$ abgeschlossene Rechtecke aufgeteilt, und in jedem dieser Rechtecke wird eine Stützstelle ausgezeichnet. Hat p die Feinheit δ , so ist die Fläche jedes Rechtecks der Partition kleinergleich δ^2 .



Wie früher können wir nun Riemann-Summen und die Riemann-Integrierbarkeit definieren:

Definition (*Riemann-Summen*)

Seien $P = [a, b] \times [c, d]$, $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ und $p = (t_k, s_j, x_{k,j})_{k \leq n, j \leq m}$ eine Partition von P . Dann heißt die reelle Zahl

$$\sum_p f = \sum_{k \leq n, j \leq m} f(x_{k,j}) (t_{k+1} - t_k) (s_{j+1} - s_j)$$

die *Riemann-Summe* von f bzgl. der Partition p .

Definition (*Riemann-Integrierbarkeit und Riemann-Integral*)

Sei $P = [a, b] \times [c, d]$. Eine Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*Riemann-*) *integrierbar*, falls gilt:

Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit:

Für alle Partitionen p von P der Feinheit δ gilt $|\sum_p f - c| < \varepsilon$.

(*Integrierbarkeitsbedingung*)

Die reelle Zahl c heißt dann das (*Riemann-*) *Integral* von f , und wir schreiben

$$c = I(f) = \int_P f = \int_P f(x, y) dx dy = \int_P f(x, y) d(x, y).$$

Wie früher erhalten wir, dass jede integrierbare Funktion beschränkt ist. Weiter gelten viele vertraute Eigenschaften:

Satz (*Eigenschaften des zweidimensionalen Riemann-Integrals*)

Sei $P = [a, b] \times [c, d]$. Dann gilt für alle integrierbaren Funktionen $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$, alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alle Rechtecke $R \subseteq P$ und alle Partitionen $(t_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$ und $(s_j)_{j \leq m}$ von $[c, d]$:

$$(a) \quad \int_P 1 = (b - a)(d - c), \quad (\text{Normiertheit})$$

$$(b) \quad \int_P (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_P f + \beta \int_P g, \quad (\text{Linearität})$$

$$(c) \quad \int_P f \leq \int_P g, \quad \text{falls } f \leq g, \quad (\text{Monotonie})$$

$$(d) \quad \int_R f \text{ existiert,} \quad (\text{Einschränkung})$$

$$(e) \quad \int_P f = \sum_{k \leq n, j \leq m} \int_{[t_k, t_{k+1}] \times [s_j, s_{j+1}]} f. \quad (\text{Aufspaltung})$$

Varianten und geometrische Interpretation

Wir erhalten wieder den gleichen Integrationsbegriff, wenn wir nur äquidistante Partitionen eines Rechtecks P zulassen, die P in gleichgroße (aber nicht notwendig quadratische) kleinere Rechtecke unterteilen. Auch der Ansatz über Darboux-Summen, bei dem anstelle der Auswertung an Stützstellen Suprema und Infima in den Rechtecken der Partitionen gebildet werden, führt zum selben Integral. In solchen Darboux-Summen verwenden wir stützstellenfreie Partitionen von P , die aus zwei stützstellenfreien Partitionen der aufspannenden Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ bestehen.

Auch die geometrische Interpretation des Riemann-Integrals für nichtnegative Funktionen ist übertragbar, wobei der Jordan-Inhalt nun als approximative Volumenmessung von Innen und Außen erklärt wird. Zur Messung werden Kuben verwendet, die durch ein δ -Gitter im dreidimensionalen Raum gegeben sind:

Definition (δ -Kubus)

Sei $\delta > 0$. Ein δ -Kubus oder δ -Würfel ist eine Teilmenge Q des \mathbb{R}^3 der Form

$$Q = [z_1\delta, (z_1 + 1)\delta] \times [z_2\delta, (z_2 + 1)\delta] \times [z_3\delta, (z_3 + 1)\delta]$$

für gewisse ganze Zahlen z_1, z_2, z_3 .

Damit definieren wir:

Definition (dreidimensionaler Jordan-Inhalt, Volumen)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ beschränkt. Dann definieren wir den *äußeren Jordan-Inhalt* $J(P)$ und den *inneren Jordan-Inhalt* $j(P)$ durch

$$J(P) = \inf_{\delta > 0} \delta^3 \cdot \text{„die Anzahl der } \delta\text{-Kuben } Q \text{ mit } Q \cap P \neq \emptyset\text{“},$$

$$j(P) = \sup_{\delta > 0} \delta^3 \cdot \text{„die Anzahl der } \delta\text{-Kuben } Q \text{ mit } Q \subseteq P\text{“}.$$

Gilt $J(P) = j(P)$, so heißt P *Jordan-messbar*, und $J(P) = j(P)$ heißt der *Jordan-Inhalt* oder das (*Jordan-*) *Volumen* von P .

Integral und Inhalt hängen wie im Eindimensionalen eng zusammen:

Satz (zweidimensionales Riemann-Integral und Volumen)

Eine Funktion $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow [0, \infty[$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die von f und der x - y -Ebene eingeschlossene Punktmenge

$$A_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in [a, b] \times [c, d], 0 \leq z \leq f(x, y) \}$$

Jordan-messbar ist. In diesem Fall gilt $I(f) = J(A_f)$.

Integrierbare Funktionen

Da ein Rechteck $P = [a, b] \times [c, d]$ kompakt ist, ist eine stetige Funktion f auf P gleichmäßig stetig, und wie früher folgt hieraus, dass jede stetige Funktion auf P integrierbar ist. Wie im Eindimensionalen gilt auch, dass das Produkt zweier integrierbarer Funktionen $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist. Weiter ist die Indikatorfunktion $1_A : P \rightarrow \mathbb{R}$ einer Menge $A \subseteq P$ genau dann integrierbar, wenn A Jordan-messbar ist, und es gilt dann $I(1_A) = J(A)$. Damit ist also $f \cdot 1_A$ integrierbar, wenn f integrierbar und A Jordan-messbar ist. Wir definieren:

Definition (*Integral über Jordan-messbare Mengen*)

Seien $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $P = [a, b] \times [c, d]$ und $A \subseteq P$ Jordan-messbar. Dann setzen wir

$$\int_A f = \int_P f \cdot 1_A.$$

Auch viele unstetige Funktionen sind integrierbar. Ein Ergebnis hierzu lautet:

Satz (*Unstetigkeitsstellen mit Jordan-Inhalt 0*)

Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass

$$N = \{p \in [a, b] \times [c, d] \mid f \text{ ist unstetig in } p\}$$

eine Jordan-Nullmenge ist. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Für ein $N \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt $J(N) = 0$ genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele δ -Quadrate Q_1, \dots, Q_n mit $n\delta^2 < \varepsilon$ gibt, die N überdecken. Ist $N \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordan-Nullmenge, so gilt dies auch für jede Teilmenge von N . Beispiele für Jordan-Nullmengen sind Strecken, Kreislinien und die Graphen stetiger Funktionen auf $[a, b]$. Allgemein gilt:

Satz (*Rand von Jordan-messbaren Mengen*)

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar, so gilt $J(\text{bd}(A)) = 0$.

Ist also $A \subseteq P$ Jordan-messbar und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Nullfortsetzung g von f auf P integrierbar, da ihre Unstetigkeitsstellen eine Teilmenge der Nullmenge $\text{bd}(A)$ bilden. Wir setzen auch hier wieder

$$\int_A f = \int_P g.$$

Damit können wir insbesondere stetige Funktionen integrieren, die auf Kreisen, Ellipsen usw. definiert sind.

Die rationalen Zahlen liefern wieder Beispiele für nicht integrierbare Funktionen. Die Menge $Q = \mathbb{Q}^2 \cap [0, 1]^2$ hat den inneren Jordan-Inhalt 0 und den äußeren Jordan-Inhalt 1, und damit ist die Indikatorfunktion von Q auf $[0, 1]^2$ nicht Riemann-integrierbar.

Auf die Einführung uneigentlicher mehrdimensionaler Integrale können wir hier verzichten, aber wir wollen wenigstens noch ein Integral für gewisse auf ganz \mathbb{R}^n erklärte Funktionen einführen. Wir definieren hierzu:

Definition (*Funktionen mit kompaktem Träger*)

Ein $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ hat *kompakten Träger*, falls ein $R \geq 0$ existiert, sodass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - [-R, R]^2$ gilt, dass $f(x, y) = 0$. Wir nennen dann f *integrierbar*, falls $f|_{[-R, R]^2}$ integrierbar ist, und wir setzen in diesem Fall

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy = I(f|_{[-R, R]^2}).$$

Gleichwertig ist die topologische Bedingung, dass der Abschluss des Trägers $\text{supp}(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \neq 0 \}$ kompakt ist (mit „supp“ für engl. „support“).

Höhere Dimensionen

Unsere Konstruktion lässt sich problemlos auf n -dimensionale Definitionsbereiche $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ und Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ erweitern. Es ergibt sich eine analoge Theorie. Insbesondere ist das Riemann-Integral einer Funktion $f: P \rightarrow [0, \infty[$ der $(n+1)$ -dimensionale Jordan-Inhalt $J(A_f)$ der Menge

$$A_f = \{ (x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in P, 0 \leq z \leq f(x_1, \dots, x_n) \}.$$

Ist umgekehrt $A \subseteq P$ Jordan-messbar, so ist die Indikatorfunktion $1_A: P \rightarrow \mathbb{R}$ von A integrierbar, und es gilt

$$J(A) = I(1_A) = \int_P 1_A.$$

Das mehrdimensionale Riemann-Integral entspricht damit genau der klassischen Methode der Einbeschreibung und Umschließung von Mengen durch einfache geometrische Figuren.

Wir fassen zusammen:

- (1) Das Integral einer nichtnegativen n -dimensionalen Funktion f ist der Jordan-Inhalt der $(n+1)$ -dimensionalen Menge A_f .
- (2) Der Jordan-Inhalt einer n -dimensionalen Menge $A \subseteq P$ ist das Integral der n -dimensionalen Funktion $1_A: P \rightarrow \mathbb{R}$.
- (3) Durch Zerlegung von f in Positiv- und Negativteil, $f = f^+ - f^-$, kann das Integral für beliebige integrierbare Funktionen als Differenz zweier Inhalte aufgefasst werden, $I(f) = I(f^+) - I(f^-) = J(A_{f^+}) - J(A_{f^-})$.

Das Integral ist mit einem überzeugenden Kalkül ausgestattet, und oftmals wird $J(A)$ durch Berechnung von $I(f)$ für f mit $A_f = A$ bestimmt.

Mehrfache eindimensionale Integrale

Wie für die mehrdimensionale Differentiation können wir auch bei der Integration die eindimensionale Theorie für mehrdimensionale Berechnungen verwenden. Zur Illustration der Methode betrachten wir wieder den zweidimensionalen Fall einer Höhenlandschaft $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Für jedes $y \in [c, d]$ sei $f_y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f_y(x) = f(x, y) \quad \text{für alle } x \in [a, b]. \quad (y\text{-Schnitt von } f)$$

Den Graphen von f_y können wir visualisieren, indem wir den Graphen von f mit der Ebene $\mathbb{R} \times \{y\} \times \mathbb{R}$ schneiden. Wir versuchen nun, f_y zu integrieren. Gelingt dies, so setzen wir

$$g(y) = I(f_y) = \int_a^b f(x, y) \, dx.$$

Gelingt uns dies für alle $y \in [c, d]$, so erhalten wir eine Funktion $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, die wir wieder der Integration unterwerfen können. Im Fall der Existenz des Integrals über g gilt dann nach Konstruktion

$$I(g) = \int_c^d g(y) \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Dass nun $I(g)$ identisch mit $I(f)$ sein sollte, wird besonders durch die Interpretation des Integrals als Mittelwert nahegelegt. Denn ein Mittelwert kann beliebig als Mittelwert von Mittelwerten dargestellt werden. In der Tat kann man zeigen, dass für viele integrierbare Funktionen f alle bei diesem Vorgehen gebildeten eindimensionalen Integrale existieren und $I(g) = I(f)$ gilt (vgl. auch die Ergänzungen E12). Wir definieren hierzu:

Definition (*schnittweise integrierbar*)

Ein $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *schnittweise integrierbar*, wenn für alle $x \in [a, b]$ die Funktion $f_x: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_x(y) = f(x, y)$, und für alle $y \in [c, d]$ die Funktion $f_y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x, y)$, integrierbar ist. Analog wird der Begriff für höhere Dimensionen erklärt.

Ist f stetig, so ist f schnittweise integrierbar. Ist $A \subseteq [a, b] \times [c, d]$ eine „einfache“ Jordan-messbare Menge wie zum Beispiel ein Kreis, so ist die Funktion 1_A schnittweise integrierbar. Dagegen ist für $P = [0, 1]^2$ die Menge

$$A = P - \{(x, 0) \in P \mid x \text{ ist irrational}\}$$

Jordan-messbar mit $J(A) = 1$, aber die integrierbare Funktion 1_A ist nicht schnittweise integrierbar. Denn die Schnittfunktion $(1_A)_y$ für $y = 0$ ist die Dirichletsche Sprungfunktion auf $[0, 1]$.

Unentbehrlich für die Berechnung von Integralen ist nun:

Satz (*Integral als Mehrfachintegral*)

Sei $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ schnittweise integrierbar. Dann gilt

$$I(f) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx.$$

Eine analoge Aussage gilt für höhere Dimensionen.

Ist also $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow [0, \infty[$ schnittweise integrierbar, so können wir das dreidimensionale Volumen $J(A_f) = I(f)$ der Menge

$$A_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b], y \in [c, d], 0 \leq z \leq f(x, y) \}$$

durch ein Doppelintegral berechnen. Zudem dürfen wir die Integrationsreihenfolge frei wählen, was für manche Aufgaben von Vorteil sein kann.

Eine klassische Anwendung des Satzes ist die Berechnung des Volumens der dreidimensionalen Kugel.

Satz (*Volumen der Kugel*)

Sei $r \geq 0$, und sei $K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| \leq r \}$ die Kugel im \mathbb{R}^3 mit Radius r und Mittelpunkt 0 . Dann gilt

$$J(K) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Beweis

Sei $P = [-r, r]^2$, und sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Funktion mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}, & \text{falls } x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

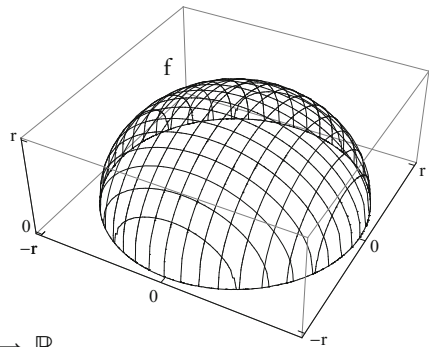
Der Graph von f ist die Oberfläche der oberen Kugelhälfte. Unter Verwendung elementarer Symmetrieeigenschaften des Volumens gilt also:

$$J(K) = 2 I(f).$$

Für jedes $y \in [-r, r]$ ist das Integral über den Schnitt $f_y: [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_y(x) = f(x, y) \text{ für alle } x \in [-r, r],$$

der Flächeninhalt eines Halbkreises mit Radius $r_y = \sqrt{r^2 - y^2}$. Also gilt



$$\int_{-r}^r f_y(x) dx = \int_{-r}^r f(x, y) dx = \frac{1}{2} (r^2 - y^2) \pi \quad \text{für alle } y \in [-r, r].$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r f(x, y) dx dy = \frac{\pi}{2} \int_{-r}^r r^2 - y^2 dy = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) = \frac{2}{3} \pi r^3, \end{aligned}$$

$$J(K) = 2 I(f) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Das Cavalierische Prinzip

Der Leser wird sich vielleicht gefragt haben, ob die etwas umständliche funktionale Darstellung der Halbkugel zur Berechnung des Kugelvolumens nicht vermieden werden kann. Der Schnitt der Kugel K mit der Ebene $\mathbb{R} \times \{y\} \times \mathbb{R}$ sind für jedes $y \in [-r, r]$ ein Kreis mit Radius

$$\sqrt{r^2 - y^2},$$

und die Flächeninhalte $(r^2 - y^2)\pi$ dieser Kreise über $y \in [-r, r]$ integriert ergeben das gesuchte Volumen $J(K) = 4/3 \pi r^3$. In der Tat führen Volumenberechnungen, die Flächeninhalte anstelle von Funktionen integrieren, oft eleganter ans Ziel:

Satz (*Volumenberechnung durch Integration von Flächeninhalten*)

Sei $A \subseteq [-r, r]^3$ Jordan-messbar. Für alle $z \in [-r, r]$ sei der z -Schnitt

$$A_z = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in A \}$$

von A eine Jordan-messbare Teilmenge der Ebene. Dann gilt:

$$J(A) = \int_{-r}^r J(A_z) dz.$$

Analoge Aussagen gelten für x - und y -Schnitte.

Aus dem Satz folgt:

Korollar (*Cavalierisches Prinzip*)

Sind $A, B \subseteq [-r, r]^3$ Jordan-messbare Mengen derart, dass für alle z die z -Schnitte A_z und B_z denselben Jordan-Inhalt besitzen, so haben A und B dasselbe Volumen.

Allgemeiner gelten diese Ergebnisse auch für die Dimensionen $n = 2$ und $n \geq 4$. Für die Dimension $n = 2$ besagt das Cavalierische Prinzip, dass zwei Jordan-messbare Mengen $A, B \subseteq [-r, r]^2$ dieselbe Fläche besitzen, wenn alle Schnitte $A_x = \{y \mid (x, y) \in A\}$ und $B_x = \{y \mid (x, y) \in B\}$ dieselbe Länge aufweisen.

Wir betrachten einige Anwendungen (vgl. auch die Ergänzungen E12).

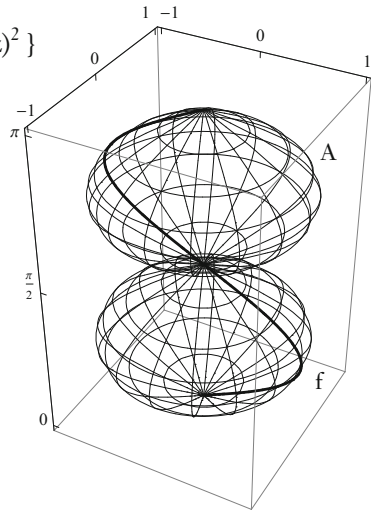
Beispiel 1: Volumen eines Rotationskörpers

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei

$$A = \{(x, y, z) \mid z \in [a, b], x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$$

der Körper, der entsteht, wenn wir $S(f) = \{(f(z), 0, z) \mid z \in [a, b]\}$ um die z -Achse rotieren. Die z -Schnitte von A sind Kreise mit Radius $f(z)$, sodass $J(A_z) = \pi f(z)^2$ für alle $z \in [a, b]$. Damit ist

$$J(A) = \pi \int_a^b f(z)^2 dz.$$



Rotationskörper für
 $f(z) = \sin(2z), z \in [0, 2\pi]$.

Beispiel 2: Volumen eines Kreiskegels

Wir betrachten A wie im vorherigen Beispiel für die Funktion $f: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

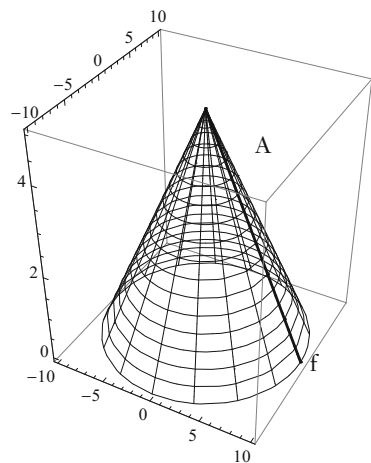
$$f(z) = a(h - z) \text{ für alle } z \in [0, h],$$

wobei $a > 0$. Dann ist A ein (gerader) Kreiskegel der Höhe h und Radius $r = f(0) = ah$ des Grundkreises. Es gilt

$$J(A) = \pi \int_0^h a^2 (h - z)^2 dz =$$

$$\frac{a^2 \pi h^3}{3} = \frac{r^2 \pi h}{3},$$

also die Formel „1/3 mal Grundfläche mal Höhe“. Nach dem Cavalierischen Prinzip gilt diese Formel auch für schräge Kreiskegel, bei denen die Spitze nicht auf der Senkrechten des Grundkreises durch den Mittelpunkt liegt. Noch allgemeiner ist:



Kreiskegel mit $a = 2$ und $h = 5$

Beispiel 3: Volumen eines Kegels mit messbarer Grundfläche

Sei $G \subseteq [-r, r]^2$ Jordan-messbar mit Jordan-Inhalt $J(G)$. Weiter sei $h > 0$ und

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h \text{ und es gibt ein } (x_0, y_0) \in G \text{ mit} \\ (x, y) = (1 - z/h)(x_0, y_0) \}.$$

A ist der Körper, der entsteht, wenn wir den Punkt $(0, 0, h)$ mit allen Punkten (x_0, y_0) der Grundfläche G verbinden. Für den z -Schnitt A_z von A gilt

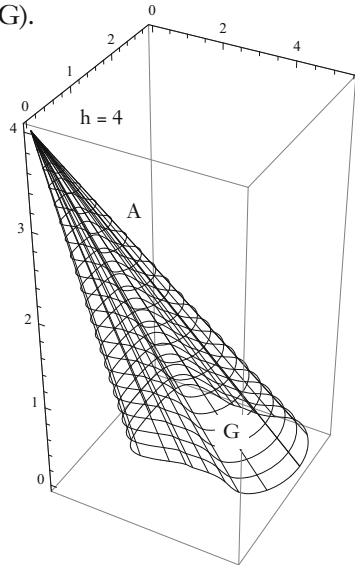
$$A_z = cG = \{ c(x, y) \mid (x, y) \in G \} \text{ mit } c = 1 - z/h,$$

$$J(A_z) = J(cG) = c^2 J(G) = (1 - z/h)^2 J(G).$$

Damit ist

$$J(A) = \int_0^h (1 - z/h)^2 J(G) dz = \\ -J(G)h \frac{(1 - z/h)^3}{3} \Big|_{z=0}^{z=h} = \frac{J(G)h}{3}.$$

Für $G = [-a/2, a/2]^2$ ist A eine Pyramide mit der Grundfläche $J(G) = a^2$ und Höhe h . A hat das Volumen $a^2 h/3$.

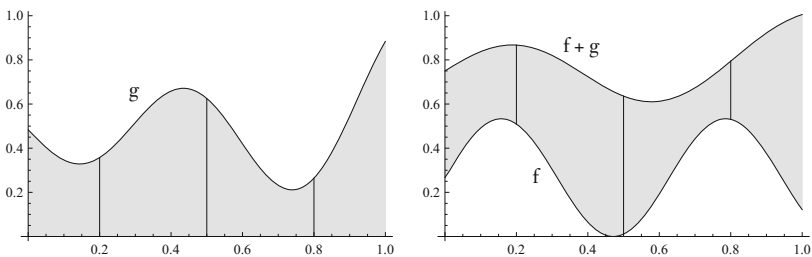


Beispiel 4: Additivität des Integrals

Die Eigenschaft

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

des eindimensionalen Integrals lässt sich mit dem Cavalierischen Prinzip für die Dimension $n = 2$ begründen:



Die Inhalte der grauen Flächen sind nach dem Cavalierischen Prinzip gleich.

Beispiel 5: Volumen eines Ellipsoids

Seien $a, b, c > 0$ und

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 \leq 1 \right\}$$

ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c . Ist $z \in [-c, c]$ und $(x, y, z) \in E$, so gilt

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \leq$$

$$1 - \left(\frac{z}{c} \right)^2 = w_z^2,$$

wobei

$$w_z = \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Damit ist der z -Schnitt E_z von E eine Ellipse mit den Halbachsen aw_z und bw_z . Folglich ist

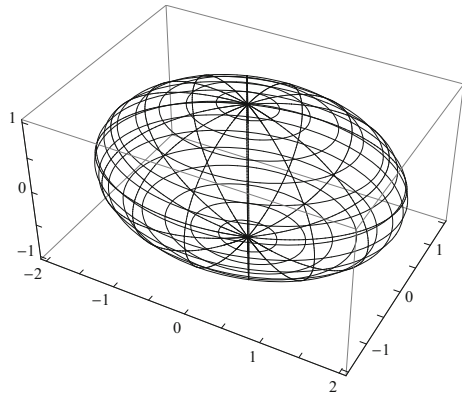
$$J(E) = \int_{-c}^c J(E_z) dz =$$

$$\int_{-c}^c \pi a w_z b w_z dz =$$

$$\pi a b \int_{-c}^c 1 - \frac{z^2}{c^2} dz =$$

$$\pi a b \left(2c - \frac{2c^3}{3c^2} \right) =$$

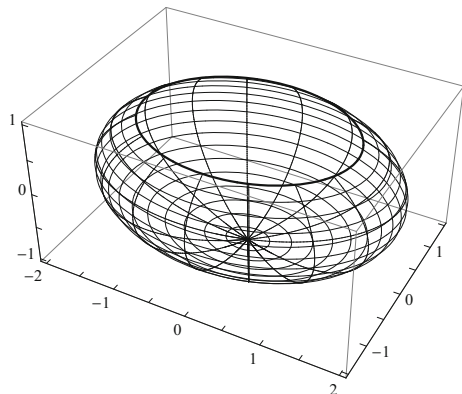
$$\frac{4}{3} \pi a b c.$$



Ein Ellipsoid mit den Halbachsen

$$a = 2, \quad b = 3/2, \quad c = 1$$

und ein z -Schnitt bei $z = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$



Dabei haben wir die Formel „ $\pi \cdot$ Produkt der Halbachsen“ für die Fläche einer Ellipse aus 1.5 verwendet. Diese Formel lässt sich ebenfalls mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips gewinnen (Übung). Der Leser vergleiche das Volumen eines Ellipsoids mit dem Kugelvolumen $\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r r r$.

Beispiel 6: Volumen eines Torus

Wir betrachten einen Volltorus

$$T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

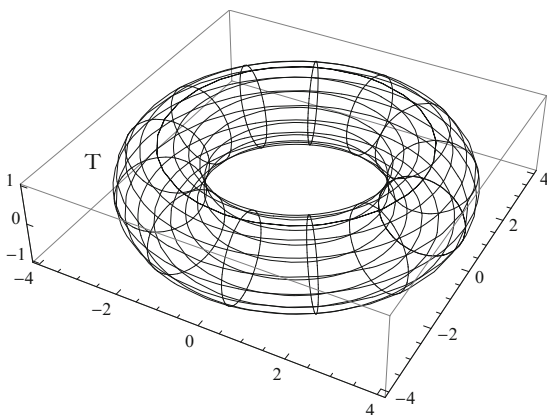
mit den Radien $R \geq r > 0$. Für alle $z \in [-r, r]$ ist der z -Schnitt A_z von T ein Kreisring mit dem Flächeninhalt

$$J(A_z) = (R + \sqrt{r^2 - z^2})^2 \pi - (R - \sqrt{r^2 - z^2})^2 \pi = 4R\pi\sqrt{r^2 - z^2}.$$

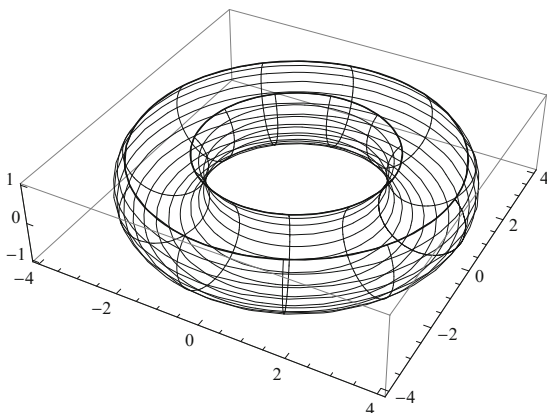
Damit berechnet sich das Volumen $J(T)$ des Volltorus zu (vgl. die Beispiele zur Substitutionsregel in 1.5):

$$J(T) = \int_{-r}^r 4R\pi\sqrt{r^2 - z^2} dz = 4R\pi r^2 \pi/2 = 2\pi^2 R r^2.$$

Eine integralfreie Herleitung dieser und anderer Formeln mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips besprechen wir in den Ergänzungen E12.

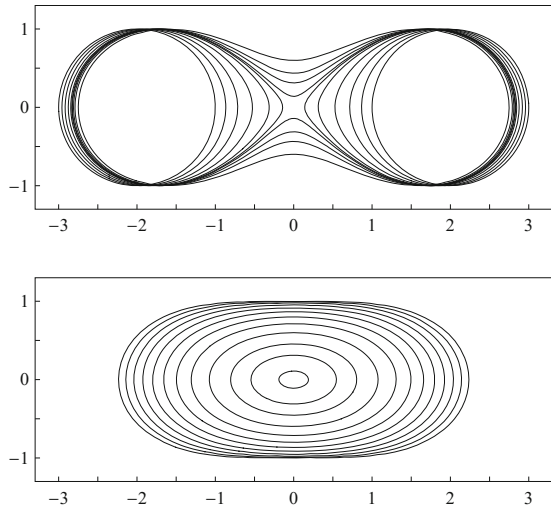


Torus mit $R = 3$, $r = 1$

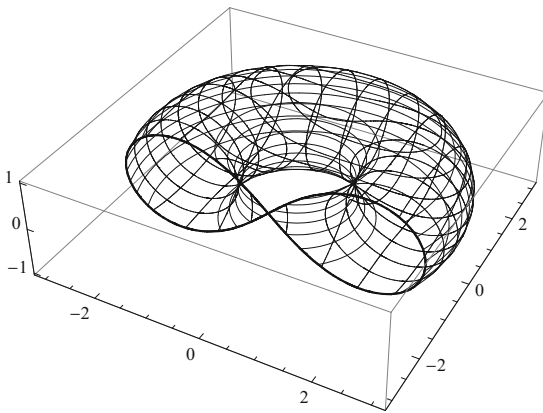


Die z -Schnitte von T sind Kreisringe mit äußerem Radius $R + h(z)$ und innerem Radius $R - h(z)$, wobei $h(z) = \sqrt{r^2 - z^2}$.

Obwohl es für die Integration einfacher ist, z-Schnitte zu betrachten, lohnt es sich, auch einen Blick auf die y-Schnitte zu werfen. Schneiden wir den Torus mit der Ebene „ $y = 0$ “, so sehen wir zwei Kreise mit Radius r und den Mittelpunkten $-R$ und R . Bewegen wir nun c in den Schnittebenen „ $y = c$ “ von 0 nach $\pm (R + r)$, so deformieren sich die Kreise, bis sie verschmelzen und sich in ovalen Gebilden zu einem Punkt zusammenziehen. Die Verschmelzungspunkte $c = \pm (R - r)$ bergen eine Überraschung:



y-Schnitte eines Torus mit $R = 2$ und $r = 1$.



Der Schnitt eines Torus mit $R = 2$ und $r = 1$ mit der Ebene „ $y = -1$ “ ist eine Lemniskate zu $a = 2\sqrt{2}$.

Die Ebenen „ $y = \pm (R - r)$ “ schneiden die Oberfläche des Torus in den Punkten (x, y) mit

$$(R - \sqrt{x^2 + (R - r)^2})^2 + z^2 = r^2.$$

Umformen ergibt

$$(x^2 + z^2)^2 = 4R(r x^2 - (R - r)z^2),$$

sodass der Schnitt für $R = 2r$ eine Lemniskate zu $a = 2\sqrt{2}r$ ist (vgl. 3.2). Für $R/r \neq 2$ ergeben sich modifizierte Schleifen.

Inhalte von Rotationsflächen

Das „Integrieren durch Schnittbildung“ darf nicht in allen Kontexten bedenkenlos angewendet werden. Wir betrachten hierzu den Ansatz, den Inhalt der Mantelfläche eines geraden Kreiskegels A mit Radius $r = ah$ und Höhe h durch Integrieren der Umfänge der Schnittkreise $A_z = \{ (x, y) \mid (x, y, z) \in A \}$ zu berechnen. Für alle z hat A_z den Umfang $2\pi a(h - z)$. Es gilt

$$\int_0^h 2\pi a(h - z) dz = \pi ah^2 = \pi rh,$$

was nicht die korrekte elementargeometrische Formel

$$\pi r s \quad \text{mit} \quad s = \sqrt{r^2 + h^2} \quad (\text{Inhalt der Mantelfläche eines Kegels})$$

liefert, die man zum Beispiel durch Abrollen des Kegelmantels zu einem Kreissegment erhält. Ebenso liefert das Aufintegrieren der Umfänge der Breitenkreise einer Kugel mit Radius r und Mittelpunkt 0 nicht $4r^2\pi$, sondern

$$\int_{-r}^r 2\pi\sqrt{r^2 - z^2} dz = 2\pi r^2 \pi/2 = \pi^2 r^2.$$

Wie berechnet man also korrekt den Inhalt einer Oberfläche? Ohne allgemeine Begriffe einzuführen, können wir relativ leicht ein informatives und intuitiv verständliches Ergebnis für eine wichtige Klasse von Oberflächen angeben. Hierzu definieren wir:

Definition (*Rotationsfläche einer Kurve*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $f_1(t) \geq 0$ und $f_2(t) = 0$ für alle t . Dann setzen wir

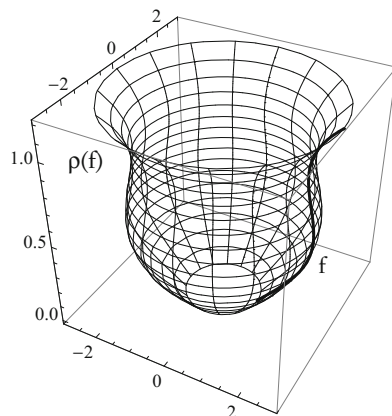
$$\rho(f) = \{ (x, y, f_3(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a, b], x^2 + y^2 = f_1(t)^2 \}.$$

Die Menge $\rho(f)$ ist anschaulich die Punktmenge im \mathbb{R}^3 , die entsteht, wenn wir die Spur von f (eine Teilmenge der x - z -Ebene) um die z -Achse rotieren. Oder noch plastischer: Die Oberfläche einer gemäß f getöpterten Vase ohne ihren Boden.

Im Diagramm rechts ist

$$f_1(t) = 2t^2 + \sin(4t) + 1,$$

$$f_2(t) = 0, \quad f_3(t) = t, \quad t \in [0, 6/5].$$



Ist die Kurve f ein Polygonzug, so ist $\rho(f)$ aus den Mantelflächen von Kegelstümpfen zusammengesetzt. Der Mantelfläche eines Kegelstumpfes der Höhe h und den Grundflächenradien r_1 und r_2 ordnen wir den elementaren Flächeninhalt

$$\pi(r_1 + r_2)s \text{ mit } s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2} \quad (\text{Mantelflächeninhalt von Kegelstümpfen})$$

zu, wobei s die Länge einer Mantellinie des Kegelstumpfs ist. Da wir rektifizierbare Kurven per Definition beliebig genau durch Polygonzüge approximieren können, bietet sich ein entsprechender Grenzübergang an, um den Inhalt der Rotationsfläche einer Kurve zu definieren. Die s -Werte erhalten wir dabei bequem durch die Kurve f und Anwendung der euklidischen Norm.

Definition (*Inhalt einer Rotationsfläche*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine fast injektive Kurve mit $f_1(t) \geq 0$ und $f_2(t) = 0$ für alle t . Dann setzen wir im Fall der Existenz

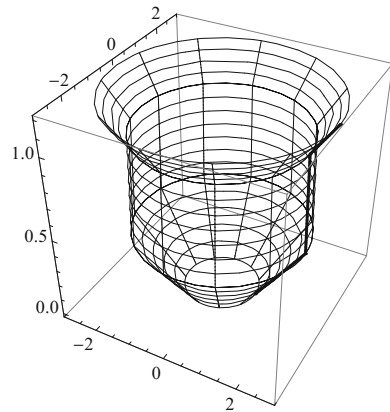
$$\text{Ar}(\rho(f)) = \lim_{\delta(p) \rightarrow 0} \text{Ar}_p(f),$$

wobei wir für eine Partition $p = (t_k)_{k \leq n}$ von $[a, b]$ setzen

$$\text{Ar}_p(f) = \sum_{k \leq n} \pi(f_1(t_k) + f_1(t_{k+1})) \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\|.$$

Die Zahl $\text{Ar}_p(f)$ ist anschaulich der Oberflächeninhalt von zusammengeklebten Kegelstümpfen. Sie entstehen durch die Rotation der durch p definierten Polygon-Approximation an f .

Die Werte $\pi(f_1(t_{k+1}) + f_1(t_k))$ sind bei feinen Partitionen in etwa gleich $2\pi f_1(t)$ für t zwischen t_k und t_{k+1} . Im Hinblick auf die Längenberechnung für stetig differenzierbare Kurven ist also der folgende Satz fast zu erwarten:



Satz (*Inhalt der Rotationsfläche einer Kurve*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine fast injektive und in $]a, b[$ stetig differenzierbare Kurve mit $f_1(t) \geq 0$ und $f_2(t) = 0$ für alle t . Dann gilt

$$\text{Ar}(\rho(f)) = \int_a^b 2\pi f_1(t) \|f'(t)\| dt.$$

Ist also speziell $f(t) = (g(t), 0, t)$ für $g: [a, b] \rightarrow [0, \infty[$, so gilt

$$\text{Ar}(\rho(f)) = \int_a^b 2\pi g(t) \sqrt{1 + g'(t)^2} dt.$$

Beispiel 1: Mantel eines Kegels

Für den Mantel eines Kegels mit Höhe h und Radius $r = ah$ können wir die Funktion $g: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) = at$ wählen. Wir erhalten so den Inhalt

$$\int_0^h 2\pi at \sqrt{1+a^2} dt = \pi ah^2 \sqrt{1+a^2} = \pi ah \sqrt{h^2+a^2} = \pi rs.$$

Da wir den Inhalt von Mantelflächen zur Definition des Inhalts von Rotationsflächen verwendet haben, ist dieses Ergebnis zwar konsistent, aber nicht besonders aufregend. Spannender ist:

Beispiel 2: Kugeloberfläche

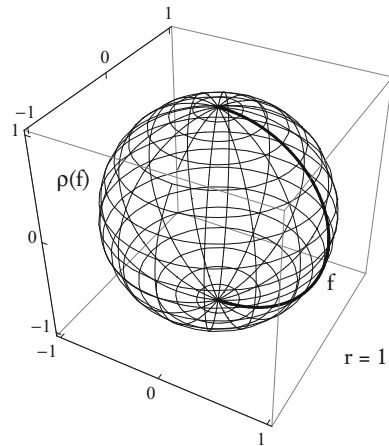
Für ein $r > 0$ betrachten wir die Kurve $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f_1(t) = r \sin(t), \quad f_2(t) = 0, \quad f_3 = r \cos(t).$$

für $t \in [0, \pi]$. Ihre Spur ist ein Halbkreis mit Radius r in der x - z -Ebene. Es gilt $\|f'(t)\| = r$ für alle $t \in [0, \pi]$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \text{Ar}(\rho(f)) &= \int_0^\pi 2\pi r \sin(t) r dt = \\ &= -2r^2 \pi \cos(t) \Big|_0^\pi = 4r^2 \pi, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem durch andere Grenzwertbildungen gefundenen Wert.

**Beispiel 3: Torus**

Seien $R > r > 0$, und sei $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

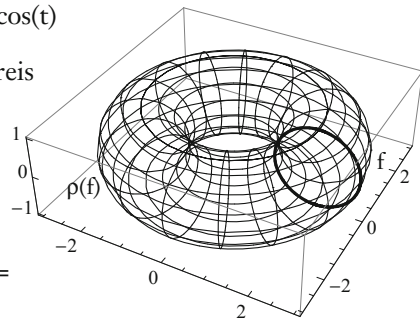
$$f_1(t) = r \sin(t) + R, \quad f_2(t) = 0, \quad f_3 = r \cos(t)$$

für $t \in [0, 2\pi]$. Die Spur von f ist ein Kreis in der x - z -Ebene mit Radius r und Mittelpunkt $(R, 0, 0)$. Für den durch Rotation entstehenden Torus $\rho(f)$ gilt

$$\text{Ar}(\rho(f)) = \int_0^{2\pi} 2\pi (r \sin(t) + R) r dt =$$

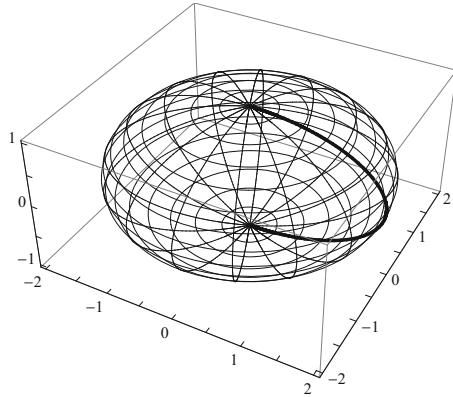
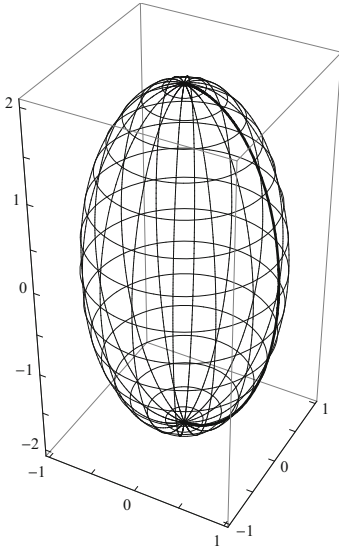
$$2\pi r \left[-r \cos(t) + Rt \right]_0^{2\pi} = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R.$$

$$R=2, r=1$$



Beispiel 4: Rotations-Ellipsoide

Ein Ellipsoid E mit den x - y - z -Halbachsen $a, b, c > 0$ ist ein Rotationskörper um die z -Achse, falls $a = b$. Im Fall $a = b < c$ heißt E ein prolates (gestrecktes) und im Fall $a = b > c$ ein oblates (abgeflachtes) Rotations-Ellipsoid.



Links ein prolates Rotations-Ellipsoid mit den Halbachsen $a = b = 1, c = 2$.
Oben ein oblates Rotations-Ellipsoid mit den Halbachsen $a = b = 2, c = 1$.

Ist $a = b$, so wird E durch Rotation von $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(z) = a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \quad \text{für alle } z \in [-c, c]$$

um die z -Achse erzeugt. Damit gilt

$$\text{Ar}(\rho(f)) = 2\pi \int_{-c}^c g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} \, dz = \frac{2\pi a}{c^2} \int_{-c}^c \sqrt{c^4 - (a^2 - c^2) z^2} \, dz.$$

Die (nicht einfache) Berechnung des Integrals liefert

$$\text{Ar}(\rho(f)) = \begin{cases} 2\pi a \left(a + c \frac{\arcsin(\delta)}{\delta} \right) & \text{falls } a < c, \\ 2\pi a \left(a + c \frac{\text{arsinh}(\delta)}{\delta} \right) & \text{falls } a > c, \end{cases}$$

$$\text{wobei } \delta = \frac{\sqrt{|c^2 - a^2|}}{c}.$$

Sind die drei Halbachsen eines Ellipsoids E paarweise verschieden, so ist E kein Rotationskörper. Wir betrachten derartige Oberflächen im Ausblick.

Polar- und Zylinderkoordinaten

Wir untersuchen nun noch verschiedene Koordinatensysteme und die zugehörigen Integrationsregeln.

Integration für Funktionen in ebenen Polarkoordinaten

Oft ist es bequem, eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nicht als Funktion in den Achsen-Koordinaten x und y anzugeben, sondern in Polarkoordinaten r und φ , wobei r den Abstand vom Ursprung und φ den Winkel im Bogenmaß mit geeigneten Konventionen angibt, etwa $\varphi \in [0, 2\pi[$ oder $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

Definition (*Umrechnung von Achsenkoordinaten in Polarkoordinaten*, \mathbb{P}, Ψ)

Wir setzen $\mathbb{P} = \{(0, 0)\} \cup (]0, \infty[\times [0, 2\pi[)$ und definieren $\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}$ durch

$$\Psi(x, y) = (\|(x, y)\|, \arg(x + iy)) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$

wobei wie früher das Argument $\arg(z)$ für $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ definiert ist durch

$$\arg(z) = \text{„das eindeutige } \varphi \in [0, 2\pi[\text{ mit } z = |z| e^{i\varphi}\text{“}$$

und wir darüber hinaus die Konvention $\arg(0) = 0$ verwenden.

Gilt $\Psi(x, y) = (r, \varphi)$, so heißen r, φ (*ebene*) *Polarkoordinaten* von (x, y) .

Statt des Intervalls $[0, 2\pi[$ wird oft auch das Intervall $]-\pi, \pi]$ verwendet. Die Winkel der Punkte der unteren Halbebene sind dann negativ. Allgemein kann man (r, φ) und $(r, \varphi + k2\pi)$ für alle ganzen Zahlen k miteinander identifizieren, so dass ein Punkt der Ebene unendlich viele Polarkoordinaten besitzt.

Die analytische Behandlung der Argument-Funktion involviert den Arkustangens. Nützlich ist hier die folgende zweidimensionale Funktion (vgl. hierzu auch die Übungen zu 3.3.2 in Band 1):

Definition (*arctan₂*)

Wir definieren $\arctan_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$\arctan_2(x, y) = \begin{cases} \arctan(y/x), & \text{falls } x > 0 \text{ und } y \geq 0, \\ \arctan(y/x) + 2\pi, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y < 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, & \text{falls } x < 0, \\ \pi/2, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y > 0, \\ 3\pi/2, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y < 0, \\ 0, & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

Die \arctan_2 -Funktion erlaubt die Berechnung des Arguments von $x + iy$ in Abhängigkeit von x und y . Die Fallunterscheidung ist so konstruiert, dass

$$\arg(x + iy) = \arctan_2(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Sind Winkel in $] - \pi, \pi]$ gewünscht, so ist die Zahl 2π von $\arctan_2(x, y)$ abziehen, falls $\arctan_2(x, y) > \pi$ ist. Dies tritt im zweiten und fünften Fall der Definition ein und weiter im dritten, falls $y < 0$.

Der Rückweg von den Polar- zu den Achsenkoordinaten verläuft wie folgt:

Definition (*Umrechnung von Polarkoordinaten in Achsenkoordinaten, Φ*)

Wir definieren $\Phi: [0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\Phi(r, \varphi) = r e^{i\varphi} = r (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \quad \text{für alle } r, \varphi \in [0, \infty[\times \mathbb{R}.$$

Die Funktionen $\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}$ und $\Phi|_{\mathbb{P}}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind bijektiv und invers zueinander. Die Polarumrechnung Ψ ist jedoch nicht stetig: Wandern wir, beginnend in einem Punkt $(r, 0)$ mit $r > 0$, den Kreis der Ebene mit Mittelpunkt 0 und Radius r ab, so wachsen die Argumente der besuchten Punkte monoton von einschließlich 0 bis ausschließlich 2π und springen dann zurück auf 0, wenn wir wieder beim Punkt $(r, 0)$ angelangt sind. Ebenso springt der Winkelwert φ unter der Funktion Ψ von einem konstanten positiven Wert auf Null, wenn wir eine von der positiven x -Achse verschiedene Halbgerade bis zum Ursprung durchlaufen. Die Funktion Φ ist dagegen stetig. Wir können die Unstetigkeit von Ψ beheben, wenn wir Ψ auf die „geschlitzte Ebene“ $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ einschränken. Arbeiten wir mit Winkeln in $] - \pi, \pi[$ so ist $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ die zugehörige geschlitzte Ebene. Durch diese Modifikation erhalten wir insgesamt stetige Bijektionen, die genauer sogar stetig differenzierbar sind.

Ebene Polarkoordinaten eignen sich insbesondere zur Berechnung des euklidischen Skalarprodukts. Sind $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ und sind (r_1, φ_1) und (r_2, φ_2) Polarkoordinaten von v_1 bzw. v_2 , so gilt

$$v_1 = r_1 (\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1)) \quad \text{und} \quad v_2 = r_2 (\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2)),$$

und das Additionstheorem des Kosinus liefert

$$\langle v_1, v_2 \rangle = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)) = r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Die Formel für das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ in Polarkoordinaten lautet also

$$\langle (r_1, \varphi_1), (r_2, \varphi_2) \rangle_p = r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Für alle Vektoren v_1, v_2 der Ebene gilt

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \Psi(v_1), \Psi(v_2) \rangle_p.$$

Aus der polaren Darstellung lässt sich beispielsweise die Invarianz des Skalarprodukts unter Drehungen ablesen. Drehen wir die Vektoren v und w um einen gemeinsamen Winkel, so bleibt die Differenz der Winkel zwischen den beiden Vektoren und damit der Kosinus dieser Differenz gleich.

Die Verwendung von Polarkoordinaten in analytischen Kontexten ist vor allem dann von Vorteil, wenn eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch ist. Ist zum Beispiel

$$f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$

und ist $g = f \circ \Phi: [0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt

$$g(r, \varphi) = \|r(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\| = r \quad \text{für alle } (r, \varphi) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}.$$

Unsere Funktion ist aus polarer Sicht also einfach die Projektion auf die erste Komponente, also eine sehr einfache und vollkommen wurzelfreie Funktion. Es fragt sich, wie eine „polare Analysis“ von f aussieht. Für die Integrationstheorie können wir die Frage allgemein so formulieren:

Gegeben ist eine Funktion g in Polarkoordinaten, die wir integrieren wollen. Wir können nun g in Achsenkoordinaten x und y darstellen und wie üblich integrieren. Lässt sich die mühsame Übersetzung von r, φ nach x, y nicht vermeiden und das Integral anstatt nach „ $dx dy$ “ nicht direkt nach „ $dr d\varphi$ “ bestimmen?

Bei der Übersetzung im Beispiel oben erhalten wir eine Wurzelfunktion, die mühsamer zu integrieren ist als die Projektionsfunktion. Der Wunsch nach einer direkten Integration in Polarkoordinaten ist hier nur natürlich. In der Tat lassen sich Funktionen in Polarkoordinaten sehr einfach nach dr und $d\varphi$ integrieren. Wir müssen lediglich einen „Korrektur-“ oder „Transformationsfaktor“ beachten:

Satz (*Integration in ebenen Polarkoordinaten*)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit kompaktem Träger.

Dann gilt:

$$I(f) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f \circ \Phi(r, \varphi) r \, d\varphi \, dr = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r \, d\varphi \, dr.$$

Anstelle f als Doppelintegral über x und y zu integrieren, können wir also mit gleichem Ergebnis $f \circ \Phi$ als Doppelintegral über die Koordinaten r und φ integrieren, wobei wir dem Integral über $f \circ \Phi$ den Faktor r hinzufügen müssen. Er entspricht der Tatsache, dass der Umfang eines Kreises mit Radius r das r -Fache des Umfangs des Einheitskreises ist. Integrieren wir bei festem r über alle Winkel φ , so hat dieser „infinitesimale Beitrag“ zum Integral das r -fache Gewicht. (Wir werden am Ende des Abschnitts einen allgemeinen Satz formulieren, der den Korrekturfaktor einer Koordinatentransformation genau angibt.)

Liegt eine Funktion g in Polarkoordinaten vor, d. h., ist $g = f \circ \Phi$ für eine gewisse Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so können wir das gewünschte Integral (das ist das Integral $I(f)$ über f , nicht das Integral $I(g)$ über g) einfach berechnen durch

$$I(f) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) r \, d\varphi \, dr,$$

wobei wir stillschweigend annehmen, dass f einen kompakten Träger besitzt und integrierbar ist. In der Praxis ist g oft als Term gegeben, etwa

$$g(r, \varphi) = r^2 \sin \varphi + r \quad \text{für alle } (r, \varphi) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}.$$

Wir verwenden dann einfach den g definierenden Term als Integranden und multiplizieren ihn mit r . Anschließend wird das Integral wie ein übliches Doppelintegral behandelt (in unserem Beispiel integrieren wir $r^3 \sin \varphi + r^2$). Die Integrationsvariablen heißen nun r und φ , aber wir können ihnen auch beliebige andere Namen geben.

Beispiel 1: Berechnung der Kreisfläche

Sei $R > 0$ und $K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq R \}$. Dann ist 1_K eine integrierbare Funktion mit kompaktem Träger, und $I(1_K)$ ist die Fläche eines Kreises mit Radius R . Ist $g = 1_K \circ \Phi$, so gilt

$$g(r, \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } r \leq R, \\ 0 & \text{falls } r > R. \end{cases}$$

Damit berechnet sich also die Kreisfläche zu

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) r \, d\varphi \, dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} 1 \, r \, d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^R 2\pi r \, dr = \pi r^2 \Big|_{r=0}^{r=R} = R^2 \pi. \end{aligned}$$

Bei der Reduktion des Integrationsbereichs von $[0, \infty[\times [0, 2\pi]$ auf das Rechteck $[0, R] \times [0, 2\pi]$ verwenden wir, dass der Träger von rg eine Teilmenge dieses Rechtecks ist.

Beispiel 2: Sektorformel von Leibniz

Die Sektorformel von Leibniz für Kurven in Polarkoordinaten (vgl. die Ergänzungen E7) können wir nun so begründen:

Ist $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Kurve mit

$$f(\varphi) = R(\varphi) e^{i\varphi} = R(\varphi) (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \quad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi],$$

so ist der im Winkel- bzw. Zeitintervall $[a, b]$ von der Kurve f überstrichene Flächeninhalt $A(f|_{[a, b]})$ gleich

$$\int_a^b \int_0^{R(\varphi)} 1 \cdot r \, dr \, d\varphi = \int_a^b \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=R(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} \int_a^b R(\varphi)^2 d\varphi,$$

in Übereinstimmung mit der früheren Formel. Für den Spezialfall $R(\varphi) = R$ und $[a, b] = [0, 2\pi]$ ergibt sich erneut die Kreisfläche.

Beispiel 3: Bestimmung des Gauß-Integrals

Wir berechnen das Gauß-Integral

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

mit Hilfe von ebenen Polarkoordinaten und einer auf Poisson zurückgehenden Umformung (vgl. 1.6). Wir definieren hierzu $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

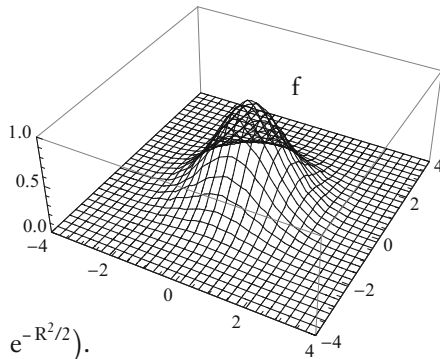
$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ist $K(R)$ der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $R > 0$, so gilt

$$\int_{K(R)} f(x, y) dx dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2/2} r dr d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} -e^{-r^2/2} \Big|_{r=0}^{r=R} d\varphi = 2\pi (1 - e^{-R^2/2}).$$



Damit können wir nun γ bestimmen. Sei hierzu $a > 0$ und

$$g(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2/2} dx.$$

Dann gilt

$$g(a)^2 = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_{-a}^a e^{-y^2/2} dy \right) =$$

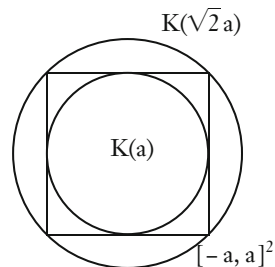
$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dx dy = \int_{[-a, a]^2} f.$$

Wegen $K(a) \subseteq [-a, a]^2 \subseteq K(\sqrt{2}a)$ und $f \geq 0$ gilt

$$\int_{K(a)} f \leq \int_{[-a, a]^2} f \leq \int_{K(\sqrt{2}a)} f.$$

Folglich ist

$$2\pi(1 - e^{-a^2/2}) \leq g(a)^2 \leq 2\pi(1 - e^{-a^2}).$$



Die linke und rechte Seite strebt gegen 2π , wenn a gegen unendlich strebt. Wegen $\lim_{a \rightarrow \infty} g(a) = \gamma$ gilt also $\gamma = \sqrt{2}\pi$.

Bemerkung

Erweitert man die Theorie auf Funktionen mit nichtkompaktem Träger, so kann man folgende Kurzform des Arguments rechtfertigen:

$$\gamma^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} -e^{-r^2/2} \Big|_{r=0}^{r=\infty} d\varphi = 2\pi (1 - 0) = 2\pi.$$

Ebenso kann man dann das Gauß-Integral nach der folgenden auf Laplace zurückgehenden Methode ohne Verwendung von Polarkoordinaten berechnen:

$$\frac{\gamma^2}{4} = \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma}{2} = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) =$$

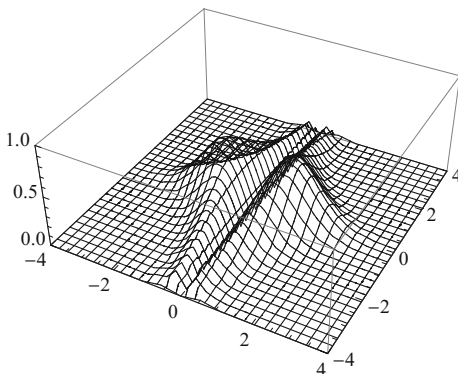
$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \quad (\text{Substitution „} y = xt \text{“})$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(x^2+x^2 t^2)/2} dt dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-x^2(1+t^2)/2} dx dt =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{-1}{1+t^2} e^{-x^2(1+t^2)/2} \Big|_{x=0}^{x=\infty} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$\arctan(t) \Big|_0^{\infty} = \pi/2 - 0 = \pi/2,$$

sodass $\gamma = \sqrt{2\pi}$.



Die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

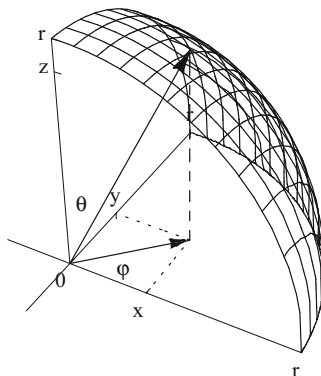
$$g(x, y) = |x| e^{-x^2(1+y^2)/2}.$$

Das Volumen unterhalb von g ist identisch mit dem Volumen unterhalb der Gauß-Funktion.

Integration für Funktionen in räumlichen Polarkoordinaten

Auch dreidimensionale Funktionen können in Polarkoordinaten dargestellt werden, wobei hier drei Koordinaten r , θ , φ verwendet werden. Üblich ist die folgende Bedeutung dieser Koordinaten:

- (1) Die Koordinate $r \geq 0$ misst den Abstand eines Punktes (x, y, z) zum Ursprung.
- (2) Die Koordinate $\theta \in [0, \pi]$ gibt den Winkel an, den (x, y, z) mit der positiven z -Achse einschließt.
- (3) Die Koordinate $\varphi \in [0, 2\pi[$ misst den Winkel der Projektion $(x, y, 0)$ des Punktes auf die x - y -Ebene wie bei ebenen Polarkoordinaten.



Damit ist θ der „polare Breitengrad“ und φ der „Längengrad“ eines Punktes p , der sich auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius r befindet. (Im Gegensatz zur Geographie wird der Breitengrad hier nicht vom Äquator, sondern vom Nordpol aus gemessen, und der Längengrad wird auf die positive x -Achse geeicht.) Dieser geometrischen Bedeutung der Polarkoordinaten entsprechen wie im zweidimensionalen Fall Funktionen Ψ und Φ , die die wechselseitige Umrechnung von x, y, z in Polarkoordinaten r, φ, θ beschreiben.

Definition (Umrechnung von Achsenkoordinaten in Polarkoordinaten im Raum)

Wir setzen $\mathbb{P} = \{ (0, 0, 0) \} \cup]0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$ und definieren $\Psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) = & \left(\|(x, y, z)\|, \arg(z + i\|(x, y, 0)\|), \arg(x + iy) \right) = \\ & \left(\|(x, y, z)\|, \arctan_2(z, \|(x, y, 0)\|), \arctan_2(x, y) \right). \end{aligned}$$

Gilt $\Psi(x, y, z) = (r, \theta, \varphi)$, so heißen r, θ, φ (*räumliche*) *Polarkoordinaten* oder *Kugelkoordinaten* von (x, y, z) .

Zur Begründung der Definition der θ -Koordinate betrachten wir das rechtwinklige Dreieck mit den Ecken

$$A = 0, \quad B = (0, 0, z), \quad C = (x, y, z).$$

θ soll nach (2) der Winkel an der Ecke A dieses Dreiecks sein. Die Strecke von B nach C hat die Länge $a = \|(x, y, 0)\|$. Damit ist das Dreieck ABC kongruent zum ebenen Dreieck mit den Ecken $0, (z, 0), (z, a)$, sodass $\theta = \arg(z + ia)$.

Definition (Umrechnung von Polarkoordinaten in Achsenkoordinaten im Raum)

Wir definieren $\Phi: [0, \infty[\times [0, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, \varphi) &= r \sin(\theta) (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) + r \cos(\theta) (0, 0, 1) = \\ &= r (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta)) \quad \text{für alle } r, \theta, \varphi.\end{aligned}$$

Für räumliche Polarkoordinaten gilt der folgende Integrationssatz:

Satz (Integration in räumlichen Polarkoordinaten)

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit kompaktem Träger.

Dann gilt

$$\begin{aligned}I(f) &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f \circ \Phi(r, \theta, \varphi) r^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta dr = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta)) r^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta dr.\end{aligned}$$

In der angegebenen Reihenfolge der Integration wird bei festgehaltenem r und θ über den Längengrad φ integriert. Polarkoordinaten mit festen Werten r und θ beschreiben Breitenkreise der Oberfläche der Kugel K_r mit Mittelpunkt 0 und Radius r . Lläuft nun θ bei festem r von 0 nach π , so durchlaufen diese Breitenkreise vom Nordpol zum Südpol die gesamte Oberfläche der Kugel K_r . Lläuft nun noch r von 0 nach unendlich, so füllen diese Kugeloberflächen den gesamten Raum aus. Der „Transformationsfaktor“ $r^2 \sin \theta$ lässt sich dabei wie folgt verstehen: Die Oberfläche einer Kugel mit Radius r ist das r^2 -Fache der Oberfläche einer Kugel mit Radius 1, trägt also das entsprechende Gewicht zum Integral bei. Weiter ist der Umfang des dem Winkel θ entsprechenden Breitenkreises auf K_r das $\sin(\theta)$ -Fache des Umfangs des Äquatorialkreises auf K_r mit Radius r , sodass diese Breitenkreise ein entsprechendes Gewicht zum Integral beitragen.

Beispiel: Berechnung der Kugelvolumens

Sei $R > 0$, und sei $K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| \leq R \}$. Dann ist 1_K eine integrierbare Funktion mit kompaktem Träger, und $I(1_K)$ ist das Volumen einer Kugel mit Radius R . Nach dem Satz gilt

$$\begin{aligned}I(1_K) &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 \cdot r^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta dr = \\ &= \int_0^R \int_0^\pi 2\pi r^2 \sin(\theta) d\theta dr = \int_0^R 2\pi r^2 [-\cos(\theta)]_0^\pi dr = \\ &= \int_0^R 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3} \pi R^3.\end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten

Im \mathbb{R}^3 sind neben Polarkoordinaten auch Zylinderkoordinaten in Gebrauch. Ein Punkt (x, y, z) des Raumes hat dabei Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z') , falls (ρ, φ) ebene Polarkoordinaten von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sind und weiter $z' = z$ gilt. Die dritte Komponente ist also der übliche Höhenanteil, während die Koordinaten x und y durch die ebenen Polarkoordinaten ersetzt werden. ρ ist die Länge der Projektion des Vektors (x, y, z) auf die x - y -Ebene, und φ ist das Argument von $x + iy$ im Winkelintervall $[0, 2\pi[$. (Da r oft stillschweigend für die Länge von (x, y, z) verwendet wird, ist es günstig, eine andere Variable zu wählen, und hier bietet sich ρ an.) Wie für die ebenen und räumlichen Polarkoordinaten werden Transformationsfunktionen Ψ und Φ erklärt:

$$\Psi(x, y, z) = (\|(x, y, 0)\|, \arctan_2(x, y), z) \text{ für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi), z) \text{ für alle } (\rho, \varphi, z) \in [0, \infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Ihrer Natur nach sind Zylinderkoordinaten besonders geeignet, Punkte einer bzgl. der z -Achse rotationssymmetrischen Menge zu beschreiben. Für eine Funktion $g: [0, h] \rightarrow]0, \infty[$ ist

$$A = \{ (x, y, z) \mid z \in [0, h], x^2 + y^2 \leq g(z)^2 \}$$

der Körper, der entsteht, wenn wir $[0, h]$ als Teilmenge der z -Achse auffassen und die Funktion g um die z -Achse rotieren. Es gilt

$$\Psi[A] = \{ (\rho, \varphi, z) \mid z \in [0, h], \rho \in [0, g(z)], \varphi \in [0, 2\pi] \}.$$

Die Menge auf der rechten Seite können wir als Darstellung von A in Zylinderkoordinaten auffassen.

In der x - y -Ebene sind Zylinderkoordinaten ebene Polarkoordinaten, sodass bei Integration in Zylinderkoordinaten ein Transformationsfaktor ρ hinzukommt:

Satz (*Integration in Zylinderkoordinaten*)

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit kompaktem Träger.

Dann gilt

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f \circ \Phi(\rho, \varphi, \theta) \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz.$$

Die Transformationsformel

Wir haben nun mehrere Beispiele kennengelernt, wie wir Integrale in anderen Koordinatensystemen berechnen können. Der Übergang von den Achsenkoordinaten zu den neuen Koordinaten ist dabei durch eine Funktion Ψ gegeben, die Rückübersetzung durch eine Funktion Φ . Bei der Berechnung von Integralen in den neuen Koordinaten ist ein Korrektur- oder Transformationsfaktor zu berücksichtigen, der sich aus der geometrischen Natur des Koordinatenwechsels ergibt. Wir hatten ihn von Fall zu Fall anschaulich begründet. Allgemein gilt:

Satz (*Transformationsformel*)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, und sei $\Phi: A \rightarrow B$ bijektiv derart, dass Φ und $\Psi = \Phi^{-1}$ stetig differenzierbar sind. Dann gilt für alle integrierbaren Funktionen $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_B f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_A f \circ \Phi(y_1, \dots, y_n) |\det J_\Phi(y)| \, dy_1 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Der Korrekturfaktor an einem Punkt y ist bei der Koordinatentransformation $\Psi = \Phi^{-1}$ also gegeben durch den Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix von Φ im Punkt y . Da diese Determinante die Volumenverzerrung der Linearisierung von Φ im Punkt y angibt, ist es nicht überraschend, dass dieser Faktor bei der Integration zu berücksichtigen ist. Streckt Φ den Raum im Punkt y , so staucht unsere Transformation Ψ den Raum im Punkt $x = \Phi^{-1}(y)$, und deswegen müssen wir in der transformierten Berechnung den Punkt y mit einem entsprechend höheren Gewicht versehen, um die Stauchung auszugleichen. Analoges gilt, wenn Φ im Punkt y den Raum nicht streckt, sondern staucht.

Der Leser vergleiche die Transformationsformel mit der Substitutionsregel. Für letztere kamen wir ohne Bijektivität und ohne Betragsstriche aus. Die mehrfach durchlaufenen Bereiche löschen sich hier automatisch aus, und negative Ableitungen werden durch die Integrationsgrenzen ausgeglichen.

Zur Illustration betrachten wir die Transformationsformel für die räumlichen Polarkoordinaten. Hier gilt für alle $(r, \theta, \varphi) \in [0, \infty[\times [0, \pi] \times \mathbb{R}$:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Schränken wir Φ auf die offene Menge

$$A =]0, \infty[\times]0, \theta[\times]0, 2\pi[$$

ein, so erfüllt $\Phi: A \rightarrow B$ mit

$$B = \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$$

die Voraussetzungen des Satzes. Die Menge B ist der ganze dreidimensionale Raum ohne die durch die positive x -Achse und die z -Achse definierte Halbebene, die für die Integration im Raum so unwesentlich ist wie im Eindimensionalen ein Punkt und im Zweidimensionalen eine Gerade. Die Determinante der Jacobi-Matrix von Φ in einem Punkt $(r, \theta, \varphi) \in A$ berechnet sich zu

$$\det J_{\Phi}(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \partial_r \Phi_1 & \partial_{\theta} \Phi_1 & \partial_{\varphi} \Phi_1 \\ \partial_r \Phi_2 & \partial_{\theta} \Phi_2 & \partial_{\varphi} \Phi_2 \\ \partial_r \Phi_3 & \partial_{\theta} \Phi_3 & \partial_{\varphi} \Phi_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$r^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta =$$

$$r^2 \sin \theta (\cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) =$$

$$r^2 \sin \theta,$$

wobei wir die Determinante durch Entwicklung nach der ersten Spalte berechnet haben. Für alle betrachteten r und θ ist $r^2 \sin \theta$ größergleich 0, sodass

$$|r^2 \sin(\theta)| = r^2 \sin(\theta).$$

Damit liefert die Transformationsformel unseren anschaulich begründeten Korrekturfaktor.

Ausblick: Oberflächen von Funktionsgraphen

Durch geometrische Überlegungen konnten wir eine Formel für die Oberfläche von Rotationskörpern gewinnen. Nicht alle elementargeometrischen Oberflächen entstehen jedoch durch Rotation. Sattelflächen und Ellipsoide mit paarweise verschiedenen Halbachsen sind Beispiele hierfür. Wir wollen deswegen nun noch einen Oberflächentyp betrachten, der zwar immer noch nicht so allgemein wie möglich ist, aber zumindest Sattelflächen, allgemeine Ellipsoide und viele andere Beispiele umfasst. Wir betrachten hierzu eine Funktion

$$f : P \rightarrow \mathbb{R}, P \subseteq \mathbb{R}^2$$

und fragen, welchen Inhalt der Graph

$$A(f) = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in P \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

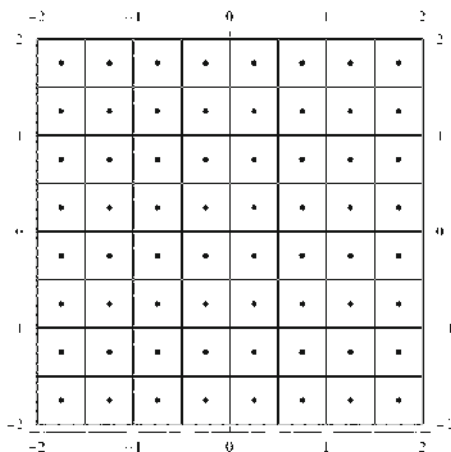
von f besitzt. Wir untersuchen also Höhenlandschaften im Hinblick auf ihre Fläche. Die Idee ist wieder, $A(f)$ durch einfache Flächen zu approximieren, deren Inhalt bekannt ist. Nehmen wir an, dass f differenzierbar ist, so bieten sich hierzu Stücke der Tangentialebenen von f an. Wir überziehen hierzu P mit einem Gitter der Maschenweite $\delta > 0$ und betrachten für jedes Quadrat Q des Gitters die auf Q zurückgeschnittene Tangentialebene $h_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}$ von f im Punkt

$(m_Q, f(m_Q))$, wobei $m_Q =$ „der Mittelpunkt von Q “.

Dadurch wird $A(f)$ durch räumliche Paralleleogramme mit den Ecken

$$(p_1, h(p_1)), (p_2, h(p_2)), (p_3, h(p_3)), (p_4, h(p_4))$$

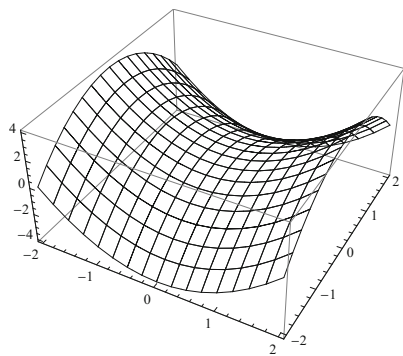
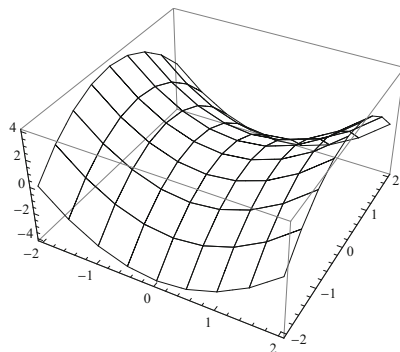
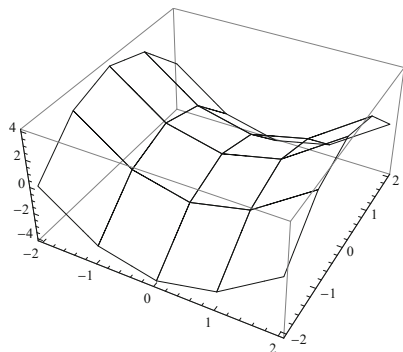
approximiert, wobei p_1, \dots, p_4 die Ecken von Q sind. Die folgenden Diagramme illustrieren diesen Ansatz.



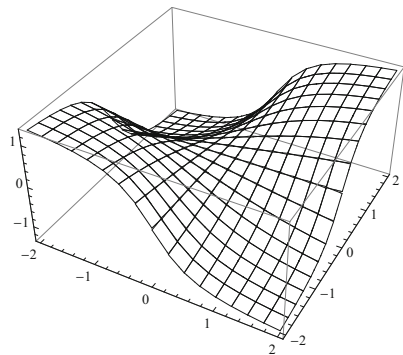
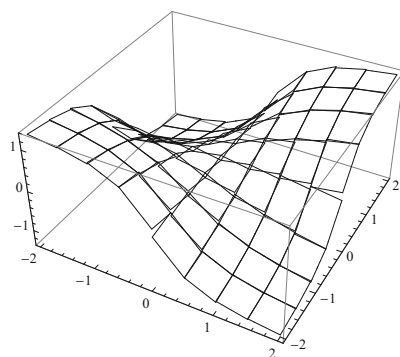
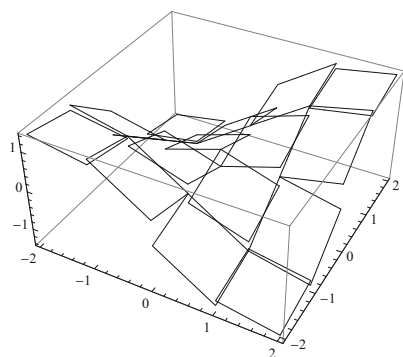
Ein Gitter der Maschenweite

$$\delta = 1/2$$

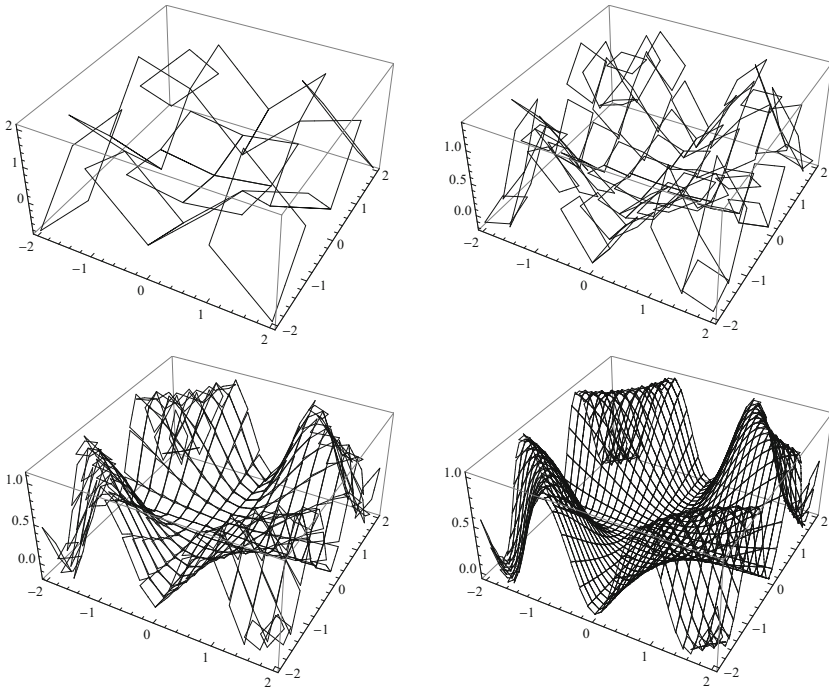
auf $P = [-2, 2]^2$. Eine differenzierbare Höhenlandschaft auf P kann durch über den Quadranten des Gitters angebrachten Tangentialebenen von f approximiert werden. Sie berühren $A(f)$ über den Mittelpunkten der Quadrate.



Tangentialapproximation für
 $f(x, y) = x^2 - y^2$
 auf P mit Maschenweiten
 $\delta = 1, 1/2, 1/4.$



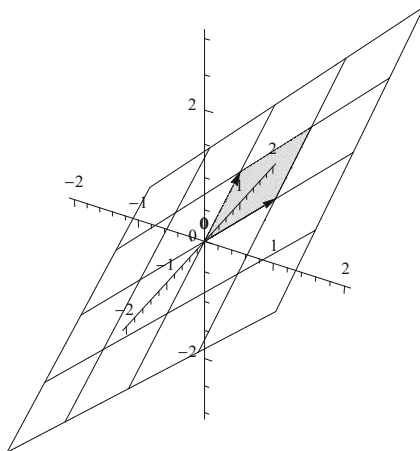
Tangentialapproximation für
 $f(x, y) = \arctan(xy)$
 auf P mit Maschenweiten
 $\delta = 1, 1/2, 1/4.$



Tangentialapproximation für $f(x, y) = \sin(xy)^2$ auf P mit Maschenweiten $\delta = 1, 1/2, 1/4, 1/8$.

Die Flächeninhalte der approximierenden Parallelegramme können wir vergleichsweise leicht ausrechnen. Wir betrachten hierzu eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit darstellender Matrix $A = (a \ b)$, sodass

$$g(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^2.$$



Das von den Bildern der Einheitsvektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ unter g aufgespannte räumliche Parallelogramm hat die Ecken

$$0, (1, 0, a), (0, 1, b), (1, 1, a + b)$$

und den Flächeninhalt

$$\| (1, 0, a) \times (0, 1, b) \| = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Damit ist der Flächeninhalt einer Tangentialebenenersetzung mit Maschenweite δ für eine differenzierbare Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ gleich

$$(+)\quad \sum_Q \|\delta(1, 0, a_Q) \times \delta(0, 1, b_Q)\| = \sum_Q \sqrt{1 + a_Q^2 + b_Q^2} \delta^2, \text{ wobei}$$

$$(a_Q \ b_Q) = J_f(m_Q) = (\partial_x f(m_Q) \ \partial_y f(m_Q))$$

und die Summe alle Quadrate Q des Gitters durchläuft. Die gleiche Formel mit $\delta_x \delta_y$ statt δ^2 ergibt sich, wenn wir ein Gitter mit Maschenweite δ_x in x -Richtung und δ_y in y -Richtung verwenden. Ersetzen wir nun die Summe durch ein Integral und $\delta_x \delta_y$ durch $dx \, dy$, so erhalten wir

$$(++)\quad \int_P \sqrt{1 + \partial_x f(x, y)^2 + \partial_y f(x, y)^2} \, dx \, dy$$

als geometrisch begründete Formel für den Flächeninhalt einer differenzierbaren Höhenlandschaft $f: P \rightarrow \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich P von f muss dabei nicht quadratisch oder rechteckig sein, in der Summation zählen wir nur Quadrate P , deren Mittelpunkt in P liegt.

Dem Leser wird vielleicht die Analogie der Formel $(++)$ zur Formel für die Länge des Graphen einer eindimensionalen Funktion aufgefallen sein (vgl. 3.2). In der Tat reproduziert unsere Argumentation die Längenformel, wenn wir sie für die Dimension 1 statt 2 durchführen.

Beispiel 1: Rotationsparaboloid und Sattelfläche

Seien $R > 0$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $\sigma \in \{-1, 1\}$, $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + \sigma y^2 \quad \text{für alle } (x, y) \in P.$$

Dann liefert $(++)$ den Oberflächeninhalt

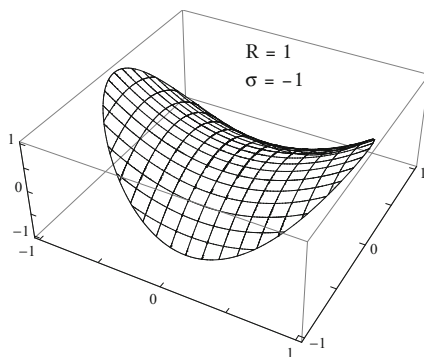
$$\begin{aligned} \int_K \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, d(x, y) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, d\varphi \, dr = \\ &= \frac{\pi}{6} \left((1 + 4R^2)^{3/2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Für $R = 1$ ergibt sich

$$\pi/6 (\sqrt{125} - 1) = 5,3304\dots$$

Die Tangentialapproximation $(+)$ liefert 5,3435... für $\delta = 1/64$.

Aus der Gestalt von $(++)$ ergibt sich ohne Rechnung, dass ein Rotationsparaboloid ($\sigma = 1$) und die zugehörige Sattelfläche ($\sigma = -1$) denselben Oberflächeninhalt besitzen.



Um unseren Fund in einen Satz zu verwandeln, ist eine genaue Definition des Inhalts einer „flächenartigen“ Teilmenge A des \mathbb{R}^3 notwendig. Wir verzichten hier auf eine Durchführung, die nach dem Muster der Definition der Rektifizierbarkeit einer Kurve erfolgt oder besser gleich eine allgemeine Begriffsbildung anstrebt. Dies ist Aufgabe der Differentialgeometrie. Ein allgemeiner Begriff ist unter anderem deswegen wichtig, damit nicht verschiedene Inhaltsbegriffe für Oberflächen von Rotationskörpern, Höhenlandschaften usw. nebeneinander existieren und auf ihre Konsistenz überprüft werden müssen. Unter einer derartigen Definition kann man zeigen, dass die Formel (++) für alle stetig differenzierbaren Funktionen auf Gebieten P gültig ist, wobei ein Gebiet als eine offene nichtleere und zusammenhängende Menge definiert wird. Ist allgemeiner P derart, dass das Innere $\text{int}(P)$ von P ein Gebiet und der Rand $\text{bd}(P)$ von P eine Menge mit Jordan-Maß 0 ist, so gilt die Formel auch für Funktionen auf P , die auf $\text{int}(P)$ stetig differenzierbar sind. Der Rand trägt dann nichts zum Oberflächeninhalt bei. Ein wichtiges Beispiel für diesen Fall ist:

Beispiel 2: Allgemeines Ellipsoid

Seien $a, b, c > 0$ und $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$P = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1 \},$$

$$f(x, y) = c \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2} \quad \text{für alle } (x, y) \in P.$$

Der Graph $A(f)$ ist die obere Hälfte der Oberfläche eines Ellipsoids E mit den x - y - z -Halbachsen $a, b, c > 0$. Die Funktion f ist im Inneren der Ellipse P stetig differenzierbar, nicht aber auf ihrem Rand. In $\text{int}(P)$ gilt

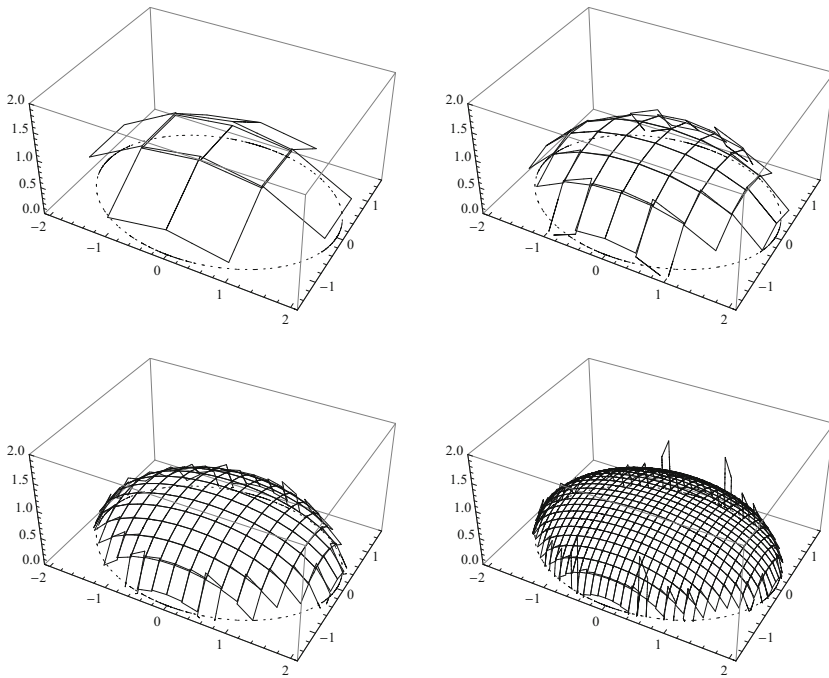
$$\partial_x f(x, y) = -\frac{c^2 x}{a^2 f(x, y)}, \quad \partial_y f(x, y) = -\frac{c^2 y}{b^2 f(x, y)}.$$

Damit ist der Oberflächeninhalt des ganzen Ellipsoids E gleich

$$2 \int_{\text{int}(P)} \left(1 + \frac{c^2 x^2}{a^4 (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)} + \frac{c^2 y^2}{b^4 (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)} \right)^{1/2} d(x, y) =$$

$$2 \int_{\text{int}(P)} \left(1 - \frac{c^2}{a^2 b^2} \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2} \right)^{1/2} d(x, y).$$

Das Integral ist innerhalb der elementaren Funktionen nicht berechenbar. Wie beim Umfang der Ellipse können elliptische Integrale eingeführt werden, mit deren Hilfe sich das Integral ausdrücken und weiter analysieren lässt. Wir kommen im Exkurs darauf zurück. Eine numerische Berechnung des Integrals ergibt für $a = 2$, $b = 3/2$ und $c = 1$ den Wert 27,8864... Die Tangentialapproximation liefert 27,6887... für $\delta = 1/64$.



Tangentialapproximation für die Ellipsoidfunktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Halbachsen $a = 2$, $b = 3/2$, $c = 1$ und Maschenweiten $\delta = 1, 1/2, 1/4, 1/8$. Die besonders im vierten Diagramm zu sehenden Spitzen entstehen durch Auswertungspunkte m_Q , die nahe am Rand von P liegen. Sie lassen sich vermeiden, indem ein Quadrat Q des Gitters nur dann ausgewertet wird, wenn $Q \subseteq P$ (und nicht nur $m_Q \in \text{int}(P)$).

Exkurs

Von der Partialbruchzerlegung zu den elliptischen Funktionen

Die Partialbruchzerlegung

Wir zeigen folgenden algebraischen Satz, der in der Analysis insbesondere zur Integration rationaler Funktionen eingesetzt werden kann:

Satz (*Partialbruchzerlegung von Leibniz und Johann Bernoulli*)

Sei $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$,

$$g(z) = a (z - w_1)^{m_1} (z - w_2)^{m_2} \dots (z - w_r)^{m_r} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen w_1, \dots, w_r . Weiter sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom mit $-\infty \leq \deg(f) < \deg(g)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $c_{k,m} \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq r$, $1 \leq m \leq m_k$, sodass für alle $z \in \mathbb{C} - \{w_1, \dots, w_r\}$ gilt

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{k,m} \frac{c_{k,m}}{(z - w_k)^m} \quad (\text{Partialbruchzerlegung})$$

oder gleichwertig

$$(+)\quad f(z) = \sum_{k,m} c_{k,m} \frac{g(z)}{(z - w_k)^m} = \sum_{k,m} c_{k,m} g_k(z) (z - w_k)^{m_k - m},$$

$$\text{wobei } g_k(z) = \frac{g(z)}{(z - w_k)^{m_k}} \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq r.$$

Die Koeffizienten $c_{1,m_1}, \dots, c_{r,m_r}$ berechnen sich durch

$$(++)\quad c_{k,m_k} = \frac{f(w_k)}{g_k(w_k)}.$$

Sind alle Nullstellen von g einfach, so erhält man so bereits alle Koeffizienten. Andernfalls können die $c_{k,m}$ rekursiv berechnet werden, indem (+) für

$$f^*(z) = \frac{f(z) - \sum_k c_{k,m_k} g_k(z)}{(z - w_1) \dots (z - w_r)}, \quad g^*(z) = a (z - w_1)^{m_1-1} \dots (z - w_r)^{m_r-1}$$

bestimmt wird. Die $c_{k,m}$ sind darüber hinaus die eindeutige Lösung des aus (+) durch Koeffizientenvergleich erhaltenen Systems mit n Gleichungen und n Unbekannten $c_{k,m}$.

Wir nehmen hier und im Folgenden stets maximale Definitionsbereiche für rationale Funktionen an (durch stetige Fortsetzung), sodass zum Beispiel alle g_k Polynome auf ganz \mathbb{C} sind. Jedes Polynom g_k hat den Grad $n - m_k$ und die Nullstellen von g ohne w_k . Anschaulich entsteht g_k aus g einfach durch Streichen des Terms $(z - w_k)^{m_k}$. Dieses Streichen lässt sich auch für g^* durchführen.

Der Beweis des Satzes ist zum Glück kürzer als seine Formulierung:

Beweis

Wir zeigen die Existenz und Eindeutigkeit einer Darstellung (+) durch Induktion nach n . Dies genügt. Für $n = 1$ ist dies klar. Sei also $n > 1$. Nehmen wir (+) an, so ergibt Einsetzen von w_1, \dots, w_r , dass notwendig (++) gilt. Wir definieren also die c_{k,m_k} in dieser Weise. Weiter definieren wir f^* und g^* wie im Satz. Alle w_k sind Nullstellen des Zählers von f^* , sodass f^* ein Polynom ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$f^*(z) = \frac{f(z) - \sum_k c_{k,m_k} g_k(z)}{(z - w_1) \dots (z - w_r)} = \sum_{k, m < m_k} c_{k,m} g_k^*(z) (z - w_k)^{m_k - 1 - m}$$

mit eindeutigen $c_{k,m}$, denn

$$\deg(f^*) \leq n - 1 - r < n - r = \deg(g^*).$$

Multiplikation von $(z - w_1) \dots (z - w_r)$ ergibt

$$f(z) - \sum_k c_{k,m_k} g_k(z) = \sum_{k, m < m_k} c_{k,m} g_k(z) (z - w_k)^{m_k - m}$$

– und damit die gewünschte eindeutige Darstellung von f .

Sind f, g reell, so ergibt sich aus dem Beweis, dass $c_{k,m}$ und $c_{k',m}$ konjugiert komplex zueinander sind, falls dies für w_k und $w_{k'}$ gilt. Durch Zusammenfassung der entsprechenden Partialbruchpaare erhält man eine reelle Version.

Beispiele

(1) Wir betrachten die reelle rationale Funktion

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12} \quad \text{für alle } x \text{ mit } g(x) \neq 0.$$

Der Nenner hat die einfachen reellen Nullstellen

$$w_1 = 2, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = -2, \quad w_4 = -3.$$

Wir schreiben c_k statt $c_{k,1}$ für die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung. Zudem können wir in \mathbb{R} verbleiben. Damit wird (+) zu

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = \sum_{1 \leq k \leq 4} c_k \frac{(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)}{(x-w_k)}.$$

Durch Einsetzen von w_1, \dots, w_4 erhalten wir

$$54 = 20 c_1, \quad 20 = -12 c_2, \quad 2 = 12 c_3, \quad 4 = -20 c_4.$$

Damit ergibt sich die Partialbruchzerlegung

$$\frac{27}{10(x-2)} - \frac{5}{3(x-1)} + \frac{1}{6(x+2)} - \frac{1}{5(x+3)}.$$

(2) Für die komplexe rationale Funktion

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} - \{i, -i\}$$

lautet (+) mit $w_1 = i$, $w_2 = -i$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$

$$1 = \sum_{k,m} c_{k,m} \frac{(z-i)^2(z+i)}{(z-w_k)^m} = c_{1,1}(z-i)(z+i) + c_{1,2}(z+i) + c_{2,1}(z-i)^2.$$

Einsetzen von w_1 und w_2 liefert

$$1 = 2i c_{1,2}, \quad 1 = -4 c_{2,1},$$

und ein Vergleich des z^2 -Koeffizienten ergibt

$$c_{1,1} = -c_{2,1}.$$

Damit lautet die Partialbruchzerlegung (mit $1/i = -i$)

$$\frac{1}{4(z-i)} - \frac{i}{2(z-i)^2} - \frac{1}{4(z+i)}.$$

(3) Leibniz hat mit Hilfe von Partialbruchentwicklung und Teleskopsummen Reihen berechnet. Einige Beispiele sind:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right) =$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \quad (\text{vgl. auch 2.3 in Analysis 1}).$$

Ist $\deg(f) \geq \deg(g)$, so erhält man durch Polynomdivision gefolgt von Partialbruchzerlegung des Restquotienten die Darstellung

$$\frac{f(z)}{g(z)} = h(z) + \sum_{k,m} \frac{c_{k,m}}{(z-w_k)^m} \quad (\text{allgemeine Partialbruchzerlegung})$$

mit einem Polynom h vom Grad $\deg(f) - \deg(g)$.

Zur Integration rationaler Funktionen

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom, so können wir eine Stammfunktion ohne Mühe bestimmen. Für eine rationale Funktion $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist dagegen eine Stammfunktion oft nicht zu sehen. Bemerkenswerterweise gilt aber:

Satz (*Integration rationaler Funktionen*)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Polynome mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$, und sei $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Dann besitzt h eine Stammfunktion innerhalb der elementaren Funktionen.

Zum Beweis schreiben wir h in Partialbruchzerlegung. Der polynomielle Anteil ist unproblematisch und die Brüche der Zerlegung können wir mit Hilfe des folgenden Satzes integrieren, der die zentrale Rolle des Logarithmus und des Arkustangens bei der Integration rationaler Funktionen deutlich werden lässt.

Satz (*Integration von Partialbrüchen*)

Seien $w = c + id \in \mathbb{C}$ mit $c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int \frac{1}{(x - w)^m} dx = - \frac{1}{(m-1)(x - w)^{m-1}}, \quad \text{falls } m > 1,$$

$$\int \frac{1}{x - w} dx = \log(|x - w|), \quad \text{falls } d = 0,$$

$$\int \frac{1}{x - w} dx = \frac{\log((x - c)^2 + d^2)}{2} + i \arctan\left(\frac{x - c}{d}\right), \quad \text{falls } d \neq 0.$$

Beweis

Der interessante dritte Fall ergibt sich aus der Aufspaltung

$$\frac{1}{(x - w)} = \frac{x - \bar{w}}{|x - w|^2} = \frac{x - c}{(x - c)^2 + d^2} + i \frac{d}{(x - c)^2 + d^2}.$$

Für eine effektive Ermittlung einer Stammfunktion müssen die Nullstellen des Nenners bekannt sein. Für Nenner mit hohem Grad ist dies selten der Fall. Sind die Nullstellen unbekannt, so liefern unsere Überlegungen nur noch einen reinen Existenzsatz. Es müssen dann andere Verfahren als die Partialbruchzerlegung eingesetzt werden, um eine Stammfunktion zu finden.

Beispiele

(1) Aufgrund der Partialbruchzerlegung

$$h(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12} =$$

$$\frac{27}{10(x-2)} - \frac{5}{3(x-1)} + \frac{1}{6(x+2)} - \frac{1}{5(x+3)}$$

erhalten wir

$$H(x) = \log\left(\frac{|x-2|^{27/10} |x+2|^{1/6}}{|x-1|^{5/3} |x+3|^{1/5}}\right)$$

als Stammfunktion. Damit gilt

$$\int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a) \quad \text{für alle } [a, b] \text{ mit } 2, 1, -2, -3 \notin [a, b].$$

(2) Die Partialbruchzerlegung von $1/(1+x^2)$ ist

$$\frac{1}{2} \left(\frac{i}{x+i} - \frac{i}{x-i} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right).$$

Nach dem dritten Fall ist

$$2i \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} dx =$$

$$\frac{\log(x^2+1)}{2} + i \arctan(x) - \frac{\log(x^2+1)}{2} - i \arctan(-x) = 2i \arctan(x),$$

sodass sich, wie es sein muss, $\arctan(x)$ als Stammfunktion ergibt.

Ist f/g eine reelle rationale Funktion, so hat f/g natürlich eine reelle Stammfunktion. Beispiel (2) zeigt, wie der Imaginärteil verschwindet. Man kann die Verwendung komplexwertiger Integrale umgehen, indem man in der Partialbruchzerlegung reeller rationaler Funktionen die Brüche mit sich entsprechenden Nullstellen w und \bar{w} paarweise zusammenfasst. Es entstehen so Terme der Form

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^m} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Die Umgehung des Komplexen erscheint bei dem auf dem Fundamentalsatz der Algebra beruhenden Ergebnis aber eher künstlich.

Elliptische Integrale

Wir haben gesehen, dass jede rationale Funktion eine elementare Stammfunktion besitzt. Die Berechnung der Kreisfläche und viele andere Beispiele zeigen, dass im Integranden oft auch Wurzelausdrücke auftauchen. Folgende Verstärkung des Ergebnisses besagt, dass die elementaren Funktionen in gewissen Fällen noch ausreichen:

Satz (*Integration rationaler Funktionen mit Quadratwurzeln vom Grad 2*)

Sei $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \frac{f(x, s(x))}{g(x, s(x))} \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

mit Polynomen $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ beliebigen Grades in zwei Variablen und einer Funktion $s : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ der Form

$$s(x) = \sqrt{a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Dann besitzt h eine elementare Stammfunktion.

Der Beweis des Satzes besteht darin, ein Integral über h durch geeignete Substitutionen in ein Integral über eine rationale Funktion zu überführen. Anstelle einer Durchführung blicken wir nach vorne: Mit dem Ergebnis haben wir die Grenze der elementaren Funktion erreicht. Ist nämlich h wie im Satz mit einer Wurzelfunktion $s : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ der Form

$$s(x) = \sqrt{a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

so liegen die Stammfunktionen H von h im Allgemeinen außerhalb des Reichs der elementaren Funktionen. Ein Integral über eine Funktion dieses Typs heißt ein *elliptisches Integral*. Die Bezeichnung beruht darauf, dass derartige Integrale bei der Berechnung der Bogenlänge von Ellipsen auftauchen (dies motiviert auch die Beschränkung auf den Grad 4). Man muss neue Funktionen einführen, um elliptische Integrale behandeln zu können – ganz so, wie man den Logarithmus und den Arkustangens einführen muss, um rationale Funktionen integrieren zu können. Überraschend ist nun, dass sich alle elliptischen Integrale durch geeignete Transformationen mit Hilfe von drei neuen Grundintegralen bestimmen lassen. Die drei Grundintegrale lassen sich in verschiedenen äquivalenten Formen schreiben. Wir wählen eine Sinus-Formulierung, da uns Beispiele für sie schon begegnet sind:

Im Gegensatz zu den elementaren Funktionen gibt es keine einheitlichen Notationen und Definitionen für die elliptischen Grundintegrale (und für viele andere spezielle Funktionen). Es existieren Varianten, die zwar alle letztendlich äquivalent sind, aber zu Fehlern führen, wenn man die Details nicht überprüft. Wir folgen hier den Definitionen in der DLMF (Digital Library of Mathematical Functions).

Elliptische Integrale in Legendre-Form

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (\text{erster Art})$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \, d\psi, \quad (\text{zweiter Art})$$

$$\Pi(\varphi, \alpha^2, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \quad (\text{dritter Art})$$

Die Zahl φ heißt die *Amplitude* oder das *Argument* der elliptischen Integrale, k ihr *Modul*, und α^2 der *Parameter* des dritten Typs. Wir beschränken uns hier auf reelle Integranden. Genauer betrachten wir die Integrale im Folgenden für

$$(\varphi, k) \in \mathbb{R} \times [0, 1[, \quad (\text{für die erste Art})$$

$$(\varphi, k) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \quad (\text{für die zweite Art})$$

$$(\varphi, \alpha^2, k) \in \mathbb{R} \times [0, 1[\times [0, 1[, \quad (\text{für die dritte Art})$$

wobei wir im ersten und dritten Integral zusätzlich auch $k = 1$ oder $\alpha = 1$ zulassen, dann aber φ auf $] -\pi/2, \pi/2 [$ einschränken. Für $\alpha^2 = 0$ geht das dritte Integral in das erste über.

Traditionell werden die drei Typen auch als „unvollständige elliptische Integrale“ bezeichnet. Integriert man bis zur festen oberen Grenze $\pi/2$, so spricht man von *vollständigen elliptischen Integralen* und definiert

$$K(k) = F(\pi/2, k), \quad E(k) = E(\pi/2, k), \quad \Pi(\alpha^2, k) = \Pi(\pi/2, \alpha^2, k).$$

Durch die Substitution „ $t = \sin \psi$ “ erhält man die äquivalente Darstellung mit Quadratwurzeln über Polynome höchstens vierten Grades:

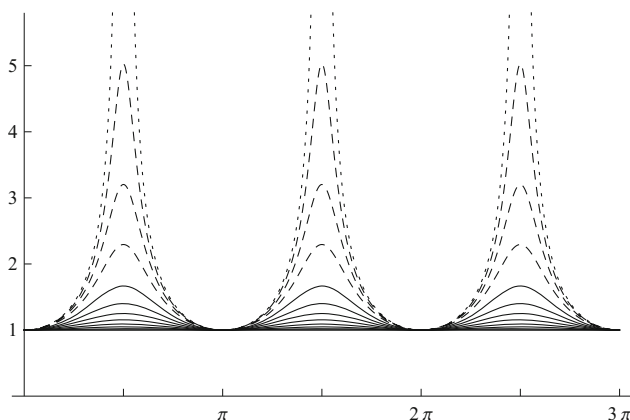
Elliptische Integrale in Jacobi-Form

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}}, \quad (\text{erster Art})$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} \, dt, \quad (\text{zweiter Art})$$

$$\Pi(\varphi, \alpha^2, k) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{(1 - \alpha^2 t^2) \sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}}. \quad (\text{dritter Art})$$

zum elliptischen Legendre-Integral erster Art



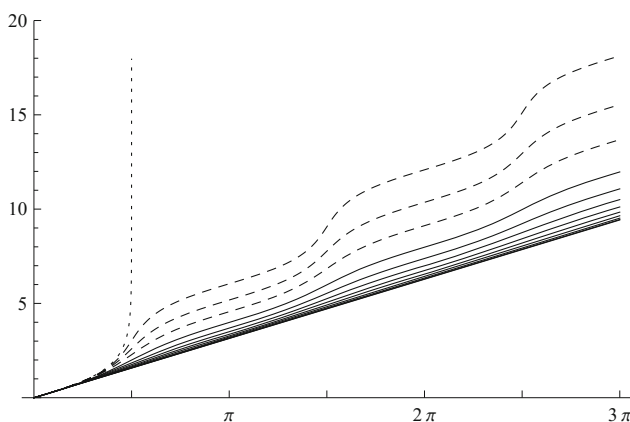
Die Integranden von $F(\varphi, k)$ für

$k = 0, 1/10, \dots, 8/10,$

$k = 0.9; 0.95; 0.98,$
(gestrichelt)

$k = 1$ (gepunktet).

Für $k = 1$ ergibt sich $1/|\cos(x)|$, was wir nur bis $\pi/2$ integrieren können.



$F(\varphi, k)$ für die obigen

Modul-Werte k . Die

Funktion $F(\varphi, 0)$ ist

die Identität, danach

zeigen sich immer

stärkere streng mo-

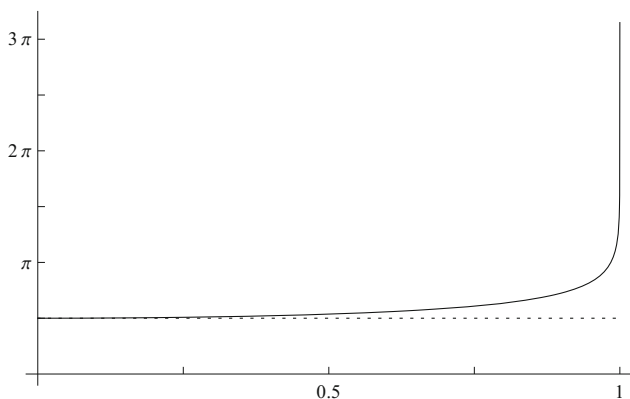
noton steigende

Wellen. $F(\varphi, 1)$ strebt

gegen unendlich,

wenn φ gegen $\pi/2$

strebt.



Das vollständige

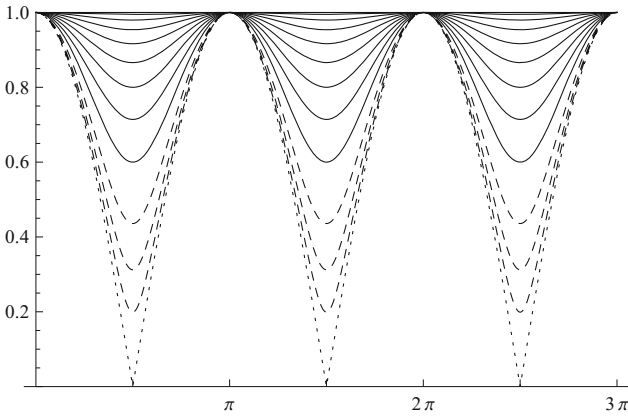
elliptische Integral

$K(k)$ für $k \in [0, 1[$

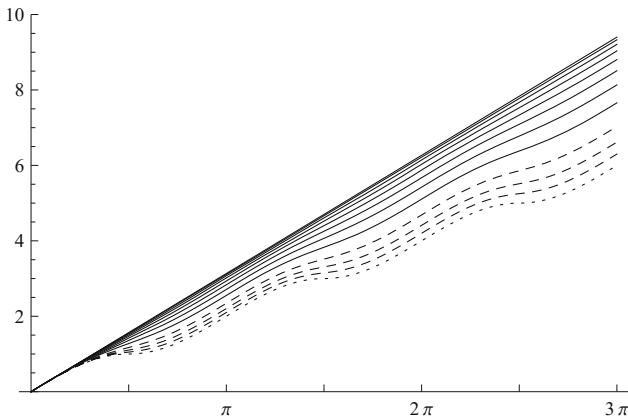
Speziell gilt

$K(0) = \pi/2$.

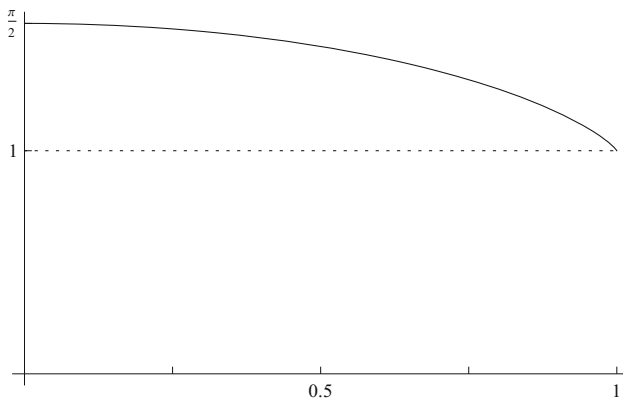
zum elliptischen Legendre-Integral zweiter Art



Die Integranden von $E(\varphi, k)$ für k wie beim Integral erster Art. Für $k = 1$ ergibt sich $|\cos(\varphi)|$.

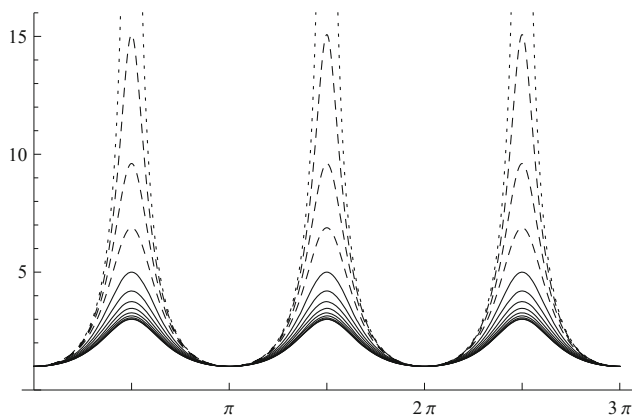


$E(\varphi, k)$ für die obigen Modul-Werte k . Erneut ist $E(\varphi, 0)$ die Identität. Die Dynamik in k verläuft nun nach unten in streng monoton steigenden Wellenbewegungen. $E(\varphi, 1)$ ist überall definiert.

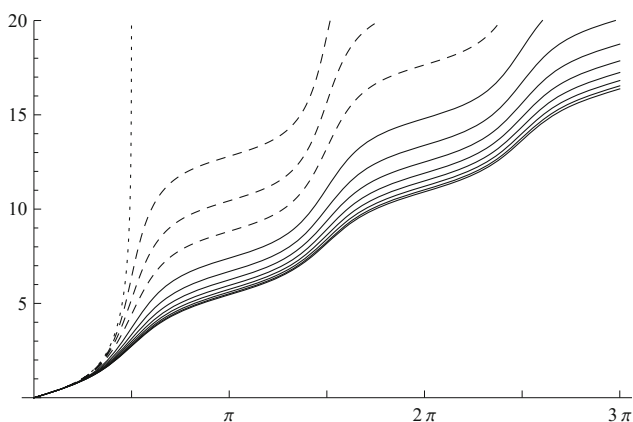


Das vollständige elliptische Integral $E(k)$ für $k \in [0, 1]$. Speziell gilt
 $E(0) = \pi/2$
 $E(1) = 1$.

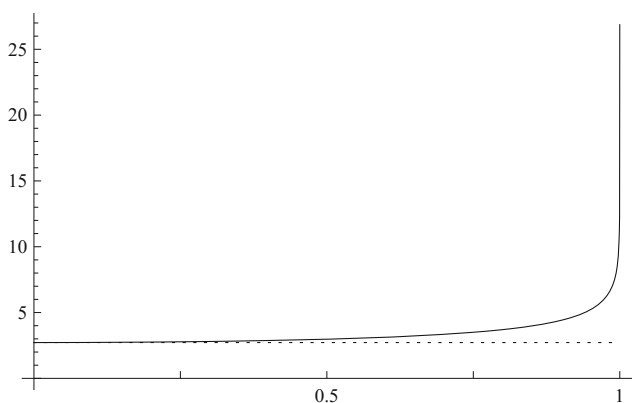
zum elliptischen Legendre-Integral dritter Art



Die Integranden von $\Pi(\varphi, 2/3, k)$ für k wie oben. Für $\alpha^2 = 0$ geht das dritte Integral in das erste über. Für andere α gilt: Je näher α^2 bei der 1 liegt, desto stärker ausgeprägt ist die Grundwelle.



$\Pi(\varphi, 2/3, k)$ für die obigen k . Der Verlauf ist ähnlich wie beim ersten Integral, wobei nun $k = 0$ nicht mehr zur Identität führt.



Das vollständige elliptische Integral $\Pi(k, 2/3)$ für $k \in [0, 1[$. Allgemein gilt

$$\Pi(\alpha^2, 0) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha^2}},$$

sodass also

$$\Pi(2/3, 0) = \sqrt{3} \pi/2.$$

Die elliptischen Integrale haben zahlreiche historisch und inhaltlich bedeutende Anwendungen. Vier davon sind uns in diesem Buch begegnet:

I. Umfang einer Ellipse

Eine Ellipse

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \}$$

mit den Halbachsen $a > b > 0$ hat den Umfang (vgl. 3.2)

$$4a E(\pi/2, k) = 4a E(k), \text{ wobei } k^2 = 1 - b^2/a^2.$$

II. Länge einer Lemniskate

Eine Lemniskate

$$L = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) \}$$

zum Parameter $a > 0$ hat die Länge (vgl. 3.2)

$$2a \varpi = 2\sqrt{2} a F(\pi/2, 1/\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} a K(1/\sqrt{2}).$$

III. Schwingungsdauer des Kreispendels

Ein (nicht linearisiertes) Kreispendel der Länge ℓ und der Auslenkung $\alpha \in]0, \pi[$ hat die Schwingungsdauer (vgl. Kapitel 5)

$$T = \frac{4}{\omega} K(k), \text{ wobei } \omega^2 = g/\ell, k = \sin(\alpha/2), 2k^2 = 1 - \cos(\alpha).$$

IV. Oberfläche eines triaxialen Ellipsoids

Ein Ellipsoid

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \}$$

mit den Halbachsen $a > b > c > 0$ hat den Oberflächeninhalt

$$2\pi c^2 + \frac{2\pi ab}{\sin \varphi} \left(E(\varphi, k) \sin^2 \varphi + F(\varphi, k) \cos^2 \varphi \right), \quad (\text{Legendre-Formel})$$

$$\text{wobei } \varphi = \arccos\left(\frac{c}{a}\right), \quad k^2 = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}.$$

Der Beweis der im Jahr 1811 von Adrien-Marie Legendre gefundenen Formel (oder die Umformung des in Abschnitt 6 angegebenen Doppelintegrals zu dieser Formel) ist eine nichttriviale Angelegenheit. Wir verweisen den Leser hierzu auf die Literatur, etwa auf Frank Bowman, *Introduction to Elliptic Functions with Applications*, Dover, New York, 1961.

Elliptische Funktionen

Sei $k \in [0, 1[$ fest gewählt. Dann ist die Funktion $F(\cdot, k) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

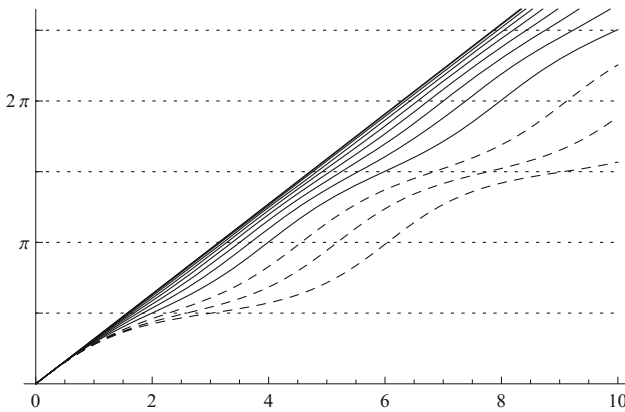
$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R},$$

bijektiv und streng monoton steigend, besitzt also eine bijektive und streng monoton steigende Umkehrfunktion. Wir können also definieren:

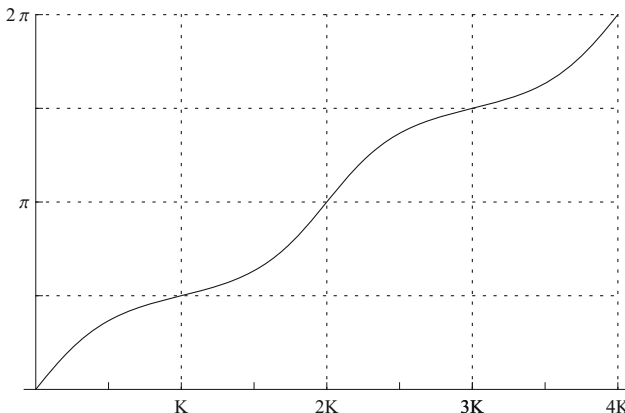
Jakobi-Amplitude

$$\operatorname{am}(u, k) = F^{-1}(u, k) \quad \text{für alle } (u, k) \in \mathbb{R} \times [0, 1[. \quad (\text{Jacobi-Amplitude})$$

Ist k fest, so schreiben wir auch kurz $F(\varphi)$ und $\operatorname{am}(\varphi)$ statt $F(\varphi, k)$ und $\operatorname{am}(u, k)$.



Die Jakobi-Amplitude $\operatorname{am}(u, k)$ entsteht durch Spiegelung von $F(\varphi, k)$ an der Hauptdiagonalen. Im Diagramm sind die Amplituden wieder für obige Modul-Werte k gezeigt.



Wachstumsverhalten der Jakobi-Amplitude $\operatorname{am}(u)$ für $k = 0,98$,
 $K = K(0,98)$.
 Numerisch ist $K = 3,0209\dots$

Die Jakobi-Amplitude rekonstruiert zu einem Wert u des elliptischen Integrals erster Art das Argument φ . Es gilt

$$\operatorname{am}(u, k) = \varphi \quad \text{genau dann, wenn} \quad F(\varphi, k) = u.$$

Die Jakobi-Amplitude lässt sich zur Definition von periodischen Funktionen verwenden, die die trigonometrischen Funktionen verallgemeinern. Sei hierzu $k \in [0, 1[$. Dann gilt aufgrund der Additivität des Integrals und des π -periodischen Integranden in $F(\varphi) = F(\varphi, k)$:

$$(+)\quad F(\varphi + \pi) = F(\varphi) + F(\pi) = F(\varphi) + 2K(k).$$

Ist nun $u \in \mathbb{R}$ beliebig, so gibt es ein φ mit $u = F(\varphi)$. Dann gilt

$$\operatorname{am}(u + 2K(k)) = F^{-1}(F(\varphi) + 2K(k)) =_{(+)} \varphi + \pi = \operatorname{am}(u) + \pi.$$

Allgemeiner gilt

$$\operatorname{am}(u + 2aK(k)) = \operatorname{am}(u) + a\pi \quad \text{für alle } a \in \mathbb{Z}.$$

Für $a = 2$ erhalten wir

$$(++)\quad \sin(\operatorname{am}(u + 4K(k))) = \sin(\operatorname{am}(u) + 2\pi) = \sin(\operatorname{am}(u)).$$

Damit ist $\sin \circ \operatorname{am}$ eine $4K(k)$ -periodische Funktion, die für $k = 0$ mit dem Sinus zusammenfällt (da $\operatorname{am}(u, 0) = F^{-1}(u, 0) = \operatorname{id}(u) = u$). Analoges gilt für den Kosinus. Dies motiviert die folgenden Definitionen:

Sinus und Kosinus Amplitudinis

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin(\operatorname{am}(u, k)), \quad (\text{Sinus Amplitudinis})$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos(\operatorname{am}(u, k)). \quad (\text{Kosinus Amplitudinis})$$

Hierbei ist $(u, k) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$. Ist der Modul k fest, so schreiben wir oft kurz $\operatorname{sn}(u)$ und $\operatorname{cn}(u)$ statt $\operatorname{sn}(u, k)$ und $\operatorname{cn}(u, k)$.

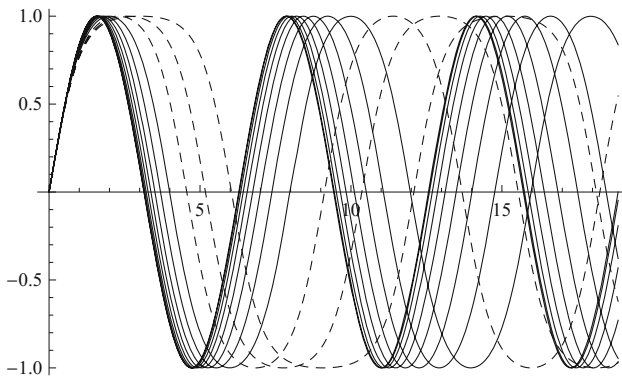
Aus der Definition und den Eigenschaften des Sinus und Kosinus ergeben sich die Formeln:

$$\operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) = 1,$$

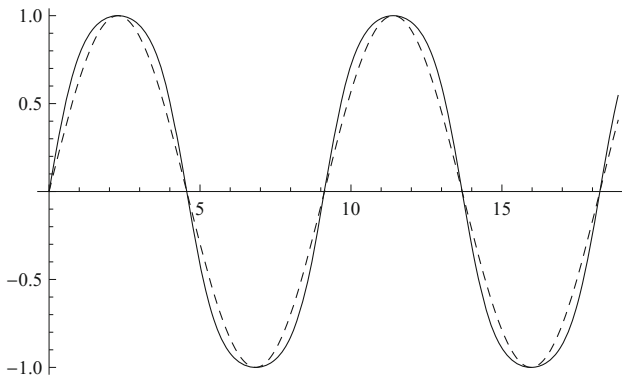
$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn}(u), \quad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn}(u),$$

$$\operatorname{sn}(u + a2K(k)) = (-1)^a \operatorname{sn}(u), \quad \operatorname{cn}(u + a2K(k)) = (-1)^a \operatorname{cn}(u) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{Z}.$$

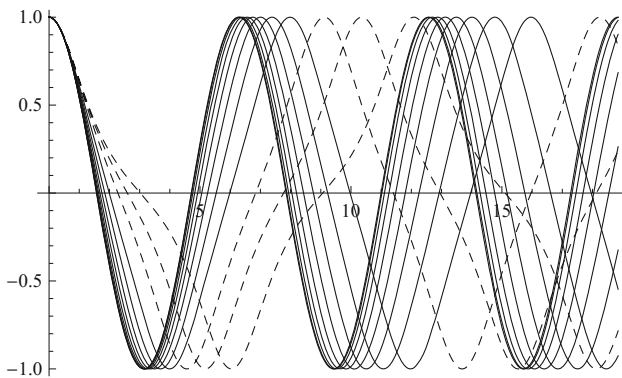
Die folgenden Diagramme visualisieren die Funktionen $\operatorname{sn}(u)$ und $\operatorname{cn}(u)$. Sie zeigen, dass die Funktionen nicht direkt mit Hilfe des Sinus und Kosinus definiert werden können und dass im Unterschied zum Sinus und Kosinus die Funktionen nicht mehr durch eine einfache Translation ineinander überführbar sind.



Die Funktionen $\text{sn}(u, k)$ für obige k . Je größer k ist, desto größer ist die Periode $4K(k)$.



Die Funktionen $\text{sn}(u)$ sind keine gestreckten Sinus-Funktionen. Links sind $\text{sn}(u)$ und $\sin(\pi u / (2K(k)))$ (gestrichelt) für $k=0.9$ gezeigt. Beide Funktionen haben die Periode $4K(k)$.



Die Funktionen $\text{cn}(u, k)$ für unsere k . Diese Funktionen sind für $k \neq 0$ keine um ein Viertel der Periode verschobenen sn -Funktionen.

Die Wellenbewegungen eines elliptischen Integrals $F(\varphi)$ erster Art (für ein festes k) führen, wenn wir sie von der y -Achse aus betrachten und den Sinus und Kosinus anwenden, zu sinus- und kosinusartigen periodischen Funktionen $\text{sn}(u)$ und $\text{cn}(u)$. Die Funktion $\text{sn}(u)$ hat im Vergleich zum Sinus weichere Bögen und steilere Nulldurchgänge, die Funktion $\text{cn}(u)$ im Vergleich zum Kosinus spitzere Bögen und flachere Nulldurchgänge.

Die Bestimmung der Ableitungen der elliptischen Funktionen ist durch die Einführung der Jakobi-Amplitude über das elliptische Integral erster Art leicht möglich. Sei hierzu $k \in [0, 1[$. Nach dem Hauptsatz gilt

$$F'(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

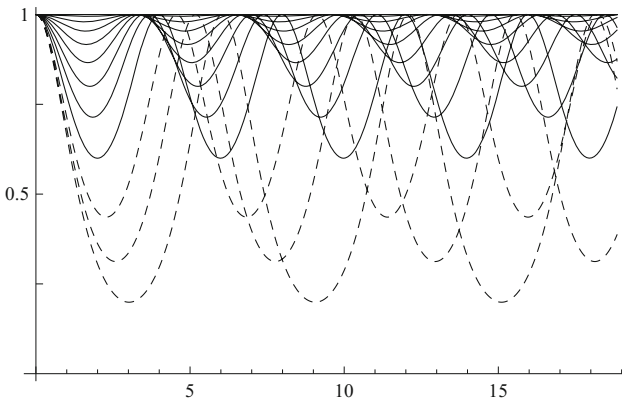
Die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion liefert nun

$$\operatorname{am}'(u) = \frac{1}{F'(\operatorname{am}(u))} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\operatorname{am}(u))} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}.$$

Dies führt uns zur Definition einer weiteren elliptischen Funktion:

Delta Amplitudinis

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(u, k)}. \quad (\text{Delta Amplitudinis})$$



Die „kosinusartigen“ Funktionen $\operatorname{dn}(u, k)$ für die Modul-Werte k von 0 bis 0,98 wie bisher.

Die Funktion dn ist erneut für alle $u \in \mathbb{R}$ und alle $k \in [0, 1[$ definiert, und wir schreiben oft wieder kurz $\operatorname{dn}(u)$.

Wir können nun die Ableitungen unserer neuen Funktionen in eleganter Form angeben:

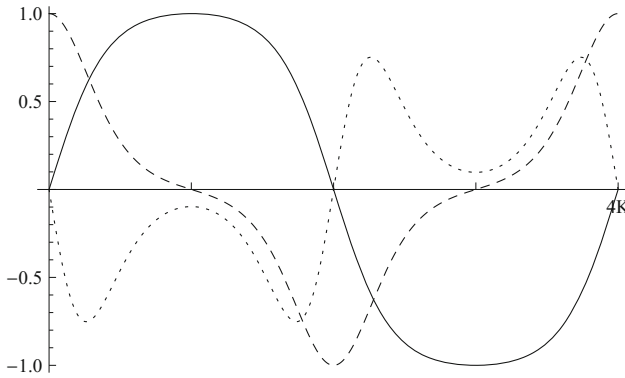
$$\operatorname{am}'(u) = \operatorname{dn}(u),$$

$$\operatorname{sn}'(u) = \sin(\operatorname{am}(u))' = \cos(\operatorname{am}(u)) \operatorname{dn}(u) = \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u),$$

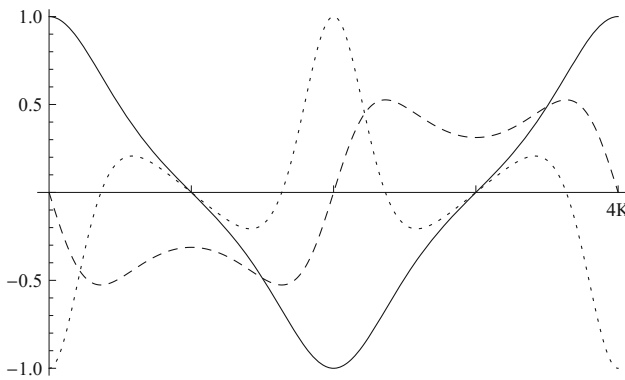
$$\operatorname{cn}'(u) = \cos(\operatorname{am}(u))' = -\sin(\operatorname{am}(u)) \operatorname{dn}(u) = -\operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u),$$

$$\operatorname{dn}'(u) = -2 k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}'(u) / (2 \operatorname{dn}) = -k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u).$$

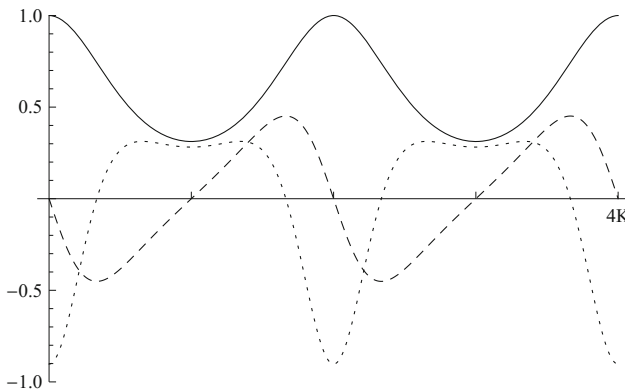
Für $k = 0$ ist $\operatorname{sn}(u) = \sin(u)$, $\operatorname{cn}(u) = \cos(u)$ und $\operatorname{dn}(u) = 1$, sodass diese Formeln die Ableitungen des Sinus und Kosinus verallgemeinern.



Die Funktion $\text{sn}(u)$ für $k = 0,98$ zusammen mit ihrer ersten Ableitung $\text{sn}'(u)$ (gestrichelt) und ihrer zweiten Ableitung $\text{sn}''(u)$ (gepunktet).



Analog für $\text{cn}(u)$. Die Funktion hat 6 Wendepunkte in einer Periode.



Schließlich für $\text{dn}(u)$. Die Graphen sind zudem die ersten drei Ableitungen der Jacobi-Amplitude $\text{am}(u)$.

Taylor-Entwicklung im Nullpunkt liefert

$$\text{sn}(u) = u - (1 + k^2) \frac{u^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{u^5}{5!} + \dots$$

$$\text{cn}(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1 + 4k^2) \frac{u^4}{4!} + \dots$$

$$\text{dn}(u) = 1 - k^2 \frac{u^2}{2!} + (4k^2 + k^4) \frac{u^4}{4!} + \dots$$

Der dn -Funktion taucht nicht nur in den Ableitungen von sn und cn auf. Sie spielt auch eine wichtige Rolle in den folgenden Additionstheoremen, die wir hier ohne Beweis angeben:

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(v) + \operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)},$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v) - \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)},$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v) - k^2 \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)}.$$

Setzen wir speziell $K = v$ mit $K = K(k)$, so erhalten wir

$$\operatorname{sn}(u+K) = \frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}, \quad \operatorname{cn}(u+K) = -\frac{k' \operatorname{sn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}, \quad \operatorname{dn}(u+K) = \frac{k'}{\operatorname{dn}(u)},$$

wobei $k' = \sqrt{1-k^2}$ der *komplementäre Modul* ist. Diese Formeln liefern einen Ersatz für die für $k > 0$ nicht mehr gültige Umrechnung $\cos(u) = \sin(u + \pi/2)$ bei Addition einer Viertelperiode.

Die Lösung des Kreispendels

Mit Hilfe elliptischer Integrale konnten wir die Schwingungsdauer $T(\alpha)$ eines Kreispendels der Länge ℓ mit maximaler Auslenkung $\alpha \in]0, \pi[$ angeben. Mit Hilfe elliptischer Funktionen können wir nun das Kreispendel analytisch lösen. Dabei beschränken wir uns nicht nur auf Schwingungen, sondern lassen auch Überschlüge und den Sonderfall einer Annäherung an π zu. Wir betrachten also, für ein beliebiges $w_0 > 0$ und $v_0 := w_0 \ell$ eine Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(\#) \quad \ell \ddot{\varphi}(t) = -g \sin(\varphi(t)), \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = w_0.$$

Die Größe $\varphi(t)$ ist die Auslenkung zur Zeit t . Der Punkt $(0, -\ell)$ entspricht dem Winkel $\varphi(t) = 0$. Das Pendel startet dort mit der Winkelgeschwindigkeit w_0 nach rechts. Die Tangentialgeschwindigkeit ist zu jedem Zeitpunkt das ℓ -fache der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$.

Im Folgenden werden wir φ identifizieren. Dadurch wird sich ergeben, dass eine Funktion mit $(\#)$ eindeutig existiert. Alternativ kann man hierzu auch den Satz von Picard-Lindelöf heranziehen.

Mit $\omega^2 = g/\ell$ gilt für alle t (vgl. Kapitel 5):

$$\frac{\dot{\varphi}(t)^2 - \dot{\varphi}(0)^2}{2} = \int_0^t \ddot{\varphi}(s) \dot{\varphi}(s) \, ds = \int_0^t -\omega^2 \sin(\varphi(s)) \dot{\varphi}(s) \, ds = \omega^2 (\cos(\varphi(t)) - 1).$$

Mit $2 \sin^2(\alpha/2) = 1 - \cos(\alpha)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (+) \quad \dot{\varphi}(t)^2 &= w_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos(\varphi(t))) = w_0^2(1 - \kappa^2 \sin^2(\varphi(t)/2)), \quad \text{mit} \\ \kappa &= 2\omega/w_0. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden drei Fälle.

1. Fall: $\kappa < 1$, Modul $k := \kappa \in]0, 1[$

Wegen $w_0 > 0$ und $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ nach (+) ist $\dot{\varphi}(t) > 0$ für alle t . Damit können wir in (+) die Wurzel mit positivem Vorzeichen ziehen. Dies liefert

$$\begin{aligned} w_0 t &= \int_0^t \frac{\dot{\varphi}(s) ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi(s)/2)}} = \\ 2 \int_0^{\varphi(t)/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} &= 2 F(\varphi(t)/2), \quad \text{sodass} \end{aligned}$$

$F(\varphi(t)/2) = w_0 t/2$, und damit

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{am}(w_0 t/2) = 2 \operatorname{am}(\omega t/k). \quad (\text{Lösung im ersten Fall})$$

Als Jakobi-Amplitude ist $\varphi(t)$ streng monoton steigend. Das Pendel schlägt über. Die für einen Looping benötigte Zeit ist

$$T = \frac{2kK}{\omega} = \frac{4K}{w_0} = \frac{4K\ell}{v_0}, \quad \text{mit } K = K(k).$$

Die Gestalt von φ lässt sich auch durch Experimentieren mit den Ableitungen der elliptischen Funktionen finden. Denn für alle $k \in]0, 1[$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt nach der Verdopplungsformel für den Sinus und der zweiten Ableitung der Jakobi-Amplitude:

$$\sin(2 \operatorname{am}(ct)) = 2 \sin(\operatorname{am}(ct)) \cos(\operatorname{am}(ct)) = 2 \operatorname{sn}(ct) \operatorname{cn}(ct),$$

$$2 \operatorname{am}''(ct) = 2 c \operatorname{dn}'(ct) = -2 k^2 c^2 \operatorname{sn}(ct) \operatorname{cn}(ct).$$

Für $c = \omega/k$ erfüllt die Funktion $\varphi(t) = 2 \operatorname{am}(ct)$ also wie gewünscht

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \sin(\varphi(t)), \quad \varphi(0) = 0.$$

Nun kann k so eingestellt werden, dass die vorgegebene Startgeschwindigkeit stimmt:

$$w_0 = \dot{\varphi}(0) = 2 \omega/k \operatorname{dn}(0) = 2 \omega/k,$$

wobei $2\omega/w_0 < 1$ sein muss, damit $k < 1$.

Diese Überlegung verifiziert auch, dass wir eine Lösung gefunden haben.

2. Fall: $\kappa > 1$, Modul $k := 1/\kappa \in]0, 1[$

Sei $t^* > 0$ mit $\dot{\varphi}(t) > 0$ für alle $t \in]-t^*, t^*[$. Dann gilt für alle $t \in]-t^*, t^*[$

$$w_0 t = \int_0^t \frac{\dot{\varphi}(s) ds}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2(\varphi(s)/2)}} = \quad (\text{mit } \sin(\psi) = \kappa \sin(\varphi(s)/2))$$

$$\int_0^{\arcsin(\kappa \sin(\varphi(t)/2))} \frac{2k d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} =$$

$2k F(\arcsin(\kappa \sin(\varphi(t)/2)))$, sodass

$$\omega t = F(\arcsin(\kappa \sin(\varphi(t)/2))), \quad \text{am}(\omega t) = \arcsin(\kappa \sin(\varphi(t)/2)),$$

$$\text{sn}(\omega t) = \kappa \sin(\varphi(t)/2), \quad \text{und schließlich}$$

$$\varphi(t) = 2 \arcsin(k \text{sn}(\omega t)). \quad (\text{Lösung im zweiten Fall})$$

Dies löst das Pendel sogar für alle $t \in \mathbb{R}$, da

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{2k\omega \text{cn}(\omega t) \text{dn}(\omega t)}{\sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(\omega t)}} = 2k\omega \text{cn}(\omega t),$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -2k\omega^2 \text{sn}(\omega t) \text{dn}(\omega t),$$

$$\sin(\varphi(t)) = 2 \sin(\arcsin(k \text{sn}(\omega t))) \cos(\arcsin(k \text{sn}(\omega t))) = 2k^2 \text{sn}(\omega t) \text{dn}(\omega t).$$

Das Pendel schwingt also mit der Schwingungsdauer

$$T = 4K/\omega, \quad \text{wobei } K = K(k), \quad k = 1/\kappa = w_0/(2\omega).$$

Die größte Auslenkung α wird zur Zeit $T/4 = K/\omega$ erreicht. Es gilt aber $\varphi(K/\omega) = 2 \arcsin(k)$, sodass $k = \sin(\alpha/2)$. Damit haben wir die Formel aus Beispiel III für Anwendungen der elliptischen Integrale reproduziert.

Man kann durch analytische Überlegungen die Struktur der Lösung vorab klären: Wegen $\kappa > 1$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $|\varphi(t)| < \pi - \varepsilon$ für alle t (sonst wäre die rechte Seite in (+) für gewisse t negativ). Ist $\dot{\varphi}(t^*) = 0$, so wechselt $\dot{\varphi}$ in t^* das Vorzeichen (da dann $\varphi(t^*) \neq 0$ nach (+), also $\dot{\varphi}(t^*) \neq 0$ wegen $|\varphi(t^*)| < \pi$ und $\dot{\varphi}(t^*) = -\omega \sin(\varphi(t^*)/2)$); genauer hat φ in t^* ein lokales Maximum, falls $\varphi(t^*) > 0$, und ein lokales Minimum, falls $\varphi(t^*) < 0$. Aus (+) folgt, dass $\dot{\varphi}(t) = 0$ genau dann gilt, wenn $\sin(\varphi(t)/2) = \pm k$. Derartige Nullstellen existieren, da sich $\dot{\varphi}$ wegen $|\dot{\varphi}(t)| \geq |\omega \sin(\pi - \varepsilon)|$ nicht monoton der 0 annähern kann, ohne sie zu erreichen. Damit existiert eine kleinste positive Nullstelle von t^* von φ , und es gilt $\sin(\alpha/2) = k$ mit $\alpha = \varphi(t^*) = \max_t \varphi(t)$. Aufgrund der Natur der Differentialgleichung genügt es, die Lösung im Intervall $[0, t^*]$ zu kennen, da sich die Lösung auf \mathbb{R} dann als eine Schwingung mit der Schwingungsdauer $T = 4t^*$ aus der Teillösung zusammensetzen lässt. Derartige Überlegungen können wichtig sein, wenn sich eine Differentialgleichung nicht in einfacher Weise lösen lässt oder die Lösung noch nicht gefunden ist.

3. Fall: $\kappa = 1$

Es gilt $w_0 = 2\omega$. Sei wieder $t^* \geq 0$ derart, dass $\dot{\varphi}(t) > 0$ für alle $t \in]-t^*, t^*[$. Dann gilt für alle $t \in]-t^*, t^*[$ (vgl. 1.5 zur Stammfunktion des Sekans):

$$w_0 t = \int_0^t \frac{\dot{\varphi}(s) ds}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi(s)/2)}} =$$

$$2 \int_0^{\varphi(t)/2} \frac{d\psi}{\cos(\psi)} = 2 \operatorname{arsinh}(\tan(\varphi(t)/2)), \text{ sodass}$$

$\sinh(\omega t) = \tan(\varphi(t)/2)$, und damit

$$\varphi(t) = 2 \arctan(\sinh(\omega t)) = 2 \arcsin(\tanh(\omega t)). \quad (\text{Lösung im dritten Fall})$$

Ableiten zeigt wieder, dass eine Lösung auf ganz \mathbb{R} gefunden wurde. Man kann auch argumentieren, dass die gefundene Lösung keine kritischen Punkte besitzt und damit die Wahl $t^* = \infty$ möglich ist.

Im dritten Fall kriecht das Pendel also auf den oberen Kreispunkt zu, ohne ihn je zu erreichen.

Wir fassen die Ergebnisse noch einmal zusammen.

$\varphi(t)$	Fall	Periode	Verhalten
$2 \arcsin(k \sin(\omega t))$	$k = 2\omega/w_0 < 1$	$2\pi K/k$	Überschlag
$2 \arcsin(k \sinh(\omega t))$	$k = w_0/(2\omega) < 1$	$4K/\omega$	Schwingung
$2 \arcsin(\tanh(\omega t))$	$w_0 = 2\omega$	–	Kriechfall

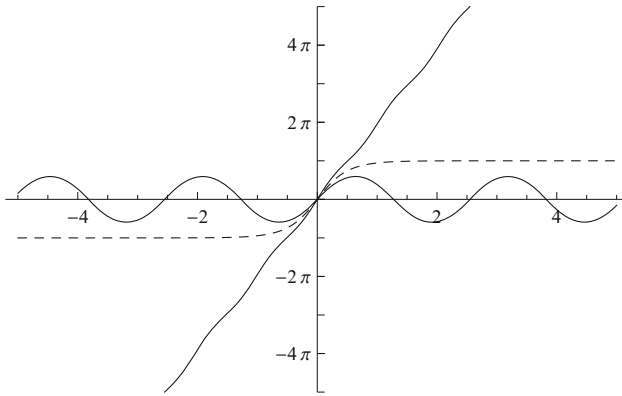
Wir haben alles aus der Formel (+) abgeleitet. Diese Formel ergibt sich auch direkt aus der Erhaltung der Energie

$$\frac{m\ell^2(w_0^2 - \dot{\varphi}(t)^2)}{2} = mg\ell(1 - \cos(\varphi(t))) \quad \text{für alle } t,$$

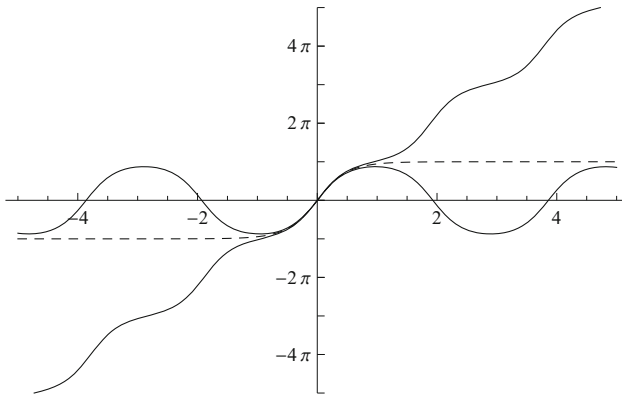
(Ableiten liefert die Differentialgleichung $\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \sin(\varphi(t))$, sodass bei diesem energetischen Ansatz die Projektion des Kraftvektors F auf die Tangente des Kreises mit abfällt.) Energetisch wird auch die Fallunterscheidung besonders klar: Im ersten Fall ist die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = mv_0^2/2 = m w_0^2 \ell^2/2$$

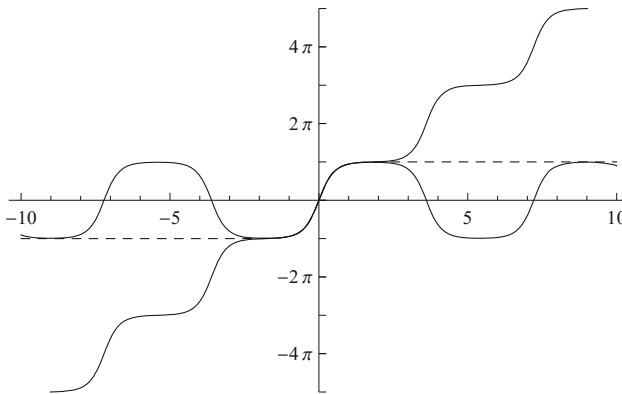
größer als $2mg\ell$, im zweiten Fall ist $E_{\text{kin}} < 2mg\ell$ und im dritten $E_{\text{kin}} = 2mg\ell$.



Die Lösungen für
 $g = 9,8$, $\ell = 1$,
sowie (in den beiden
ersten Fällen)
 $k = 0,8$,
getrennt durch den
Kriechfall (gestrichelt).



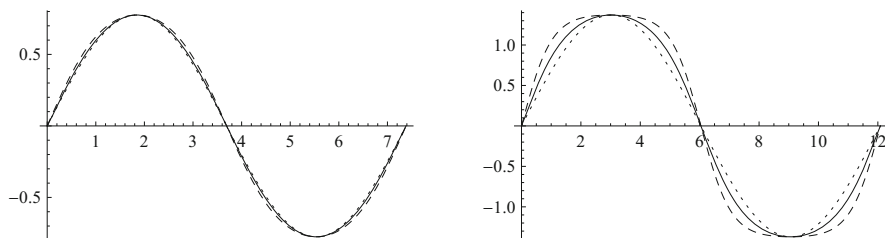
Analog für
 $k = 0,98 \dots$



\dots und für
 $k = 0,9999$.

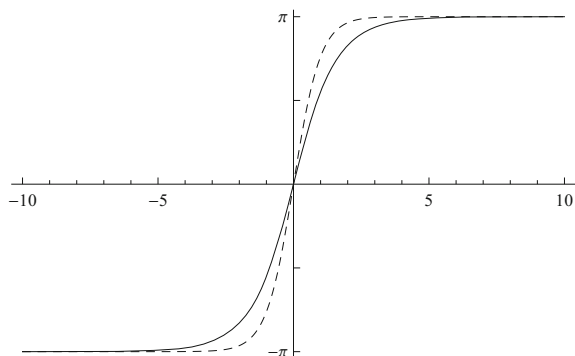
Das erste Diagramm zeigt eine typische Lösung für die Fälle 1 und 2. Die Startgeschwindigkeit im ersten Fall ist relativ hoch ($w_0 = v_0 = 2\omega/k = 2\sqrt{g}/0,6 = 10,43$), sodass jeder Looping mit einer recht gleichmäßigen Geschwindigkeit durchlaufen wird. In den anderen Diagrammen nähern wir uns dem Extremfall $w_0 = 2\omega$ von oben und unten. Für $k \sim 1$ ist $\arcsin(\sin(am(\omega t)/k)) \sim \arcsin(k \operatorname{sn}(\omega t))$, was die strukturelle Ähnlichkeit der Lösungen im Fall 1 und 2 im dritten Diagramm erklärt.

Noch eine Bemerkung zur Arkussinus-sn-Kombination in der zweiten Lösung: Der vorgeschaltete Arkussinus bewirkt, dass die Lösung zwischen einem skalierten Sinus Amplitudinis und einem passend gestreckten und skalierten Sinus liegt:



$\arcsin(k \operatorname{sn}(u))$ (durchgezogen), $\arcsin(k) \operatorname{sn}(u)$ (gestrichelt) und $\arcsin(k) \sin(\pi u / (2 K))$ (gepunktet) für $k = 0,7$ (links) und $k = 0,98$ (rechts)

Schließlich bewirkt der vorgeschaltete Arkussinus im dritten Fall einen im Vergleich zu einem Tangens Hyperbolicus etwas verlangsamten Anstieg:



$2 \arcsin(\tanh(u))$ und $\pi \tanh(u)$ (gestrichelt)

Ergänzungen

Die Ergänzungen können folgenden Kapiteln zugeordnet werden:

E1	Anschauung und Definition des Integrals	1.1, 1.2, 1.6
E2	Aneignung des Integralbegriffs	1.3
E3	Diskussion des Hauptsatzes	1.4, 1.5
E4	Die Cantor-Menge	2.1
E5	Topologische Visualisierungen	2.2, 2.3, 2.4
E6	Kompaktheitsargumente	2.5, 2.6
E7	Die Sektorformel von Leibniz	3.1, 3.2
E8	Der Ableitungsbegriff im \mathbb{R}^n	3.3, 3.4, 3.5
E9	Gradient, Divergenz und Rotation	3.4, 3.5, 3.6
E10	Kennenlernen von Fourier-Reihen	4
E11	Das Fadenpendel	5
E12	Doppelintegrale und Cavalierisches Prinzip	6

Erste Ergänzungen: Anschauung und Definition des Integrals

Ergänzungsübung 1

Illustrieren Sie die Definition des Riemann- und des Darboux-Integrals anhand des Graphen einer stetigen Funktion.

Ergänzungsübung 2

Argumentieren Sie anschaulich, warum eine Unstetigkeitsstelle einer beschränkten und ansonsten stetigen Funktion als „für die Integrierbarkeit unbedeutend“ angesehen werden kann. Betrachten Sie dabei Unstetigkeitsstellen erster als auch zweiter Art.

Ergänzungsübung 3

Zeichnen Sie Diagramme, die die elementaren Eigenschaften

Normiertheit, Linearität, Monotonie, Einschränkung, Aufspaltung

des Integrals illustrieren und als Grundlage für Beweise der Eigenschaften verwendet werden können. Spalten Sie dabei die Linearität zur Vereinfachung in die beiden Eigenschaften

$$I(cf) = c I(f) \quad \text{und} \quad I(f + g) = I(f) + I(g)$$

auf, und legen Sie besonderen Wert auf eine anschauliche Diskussion der zweiten Eigenschaft. Betrachten Sie hierzu positive Funktionen f und g und die drei Flächen

A_1 zwischen x -Achse und f ,

A_2 zwischen x -Achse und g ,

A_3 zwischen f und $f + g$.

Ergänzungsübung 4

Begründen Sie, warum die folgenden physikalischen Größen durch Integrale berechnet werden:

- (a) der Weg, den ein Körper zurücklegt, der sich zur Zeit $t \in [a, b]$ mit der Geschwindigkeit $v(t)$ bewegt,
- (b) die Energie, die ein elektrisches Gerät verbraucht, das zur Zeit $t \in [a, b]$ die momentane Leistung $p(t)$ besitzt.

Finden Sie weitere derartige Beispiele.

Ergänzungsübung 5

Diskutieren Sie, wie und warum „mittlere Temperatur“, „mittlerer Luftdruck“, „Durchschnittsgeschwindigkeit“ durch ein Integral berechnet werden können.

Ergänzungsübung 6

Erläutern Sie die Gewichtsfunktion g in der Mittelwertbildung $M_g(f) = I(fg)/I(g)$ durch Beispiele.

Ergänzungsübung 7

Sei (Ω, μ) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, d. h., Ω ist eine nichtleere endliche Menge und $\mu: \Omega \rightarrow [0, 1]$ ist eine Funktion mit $\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) = 1$. (Die Vorstellung dabei ist, dass $\mu(\omega)$ die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses ω angibt.) Eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir wie üblich auch eine *Zufallsvariable* auf Ω . Zeigen Sie, dass der *Erwartungswert*

$$E(f) = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)\mu(\omega)$$

von f durch eine geeignete Identifizierung der Elemente von Ω mit Teilintervallen von $[0, 1]$ als Integral über $[0, 1]$ dargestellt werden kann. Zeichnen Sie Diagramme und deuten Sie den Erwartungswert als Mittelwert. Verallgemeinern Sie anschließend die Konstruktion auf abzählbar unendliche Wahrscheinlichkeitsräume.

Ergänzungsübung 8

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Weiter sei $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine mit Diagrammen unterstützte Beweisskizze der Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (a) $I(f) = c$.
- (b) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 mit:

$$|\sum_p f - c| < \varepsilon \text{ für alle äquidistanten Partitionen } p \text{ von } [a, b]$$
 der Länge $n \geq n_0$.

Ergänzungsübung 9

Geben Sie eine Limesformulierung der Integrierbarkeit mit Hilfe von Folgen äquidistanter Zerlegungen, die statt der Feinheit die Länge von Partitionen involviert.

Ergänzungsübung 10

Illustrieren Sie den Zusammenhang zwischen dem Darboux-Integral und dem Jordan-Inhalt durch Diagramme.

Ergänzungsübung 11

Begründen Sie anschaulich, worum der Jordan- und der Peano-Inhalt äquivalent sind.

Zur Geschichte des Integralbegriffs

Bei den folgenden Übungen wird nach einer wichtigen Arbeit von Bernhard Riemann und historischer Sekundärliteratur gefragt. Neben dem Besuch einer Bibliothek ist hierzu auch eine Recherche im Internet geeignet.

Ergänzungsübung 12

Recherchieren Sie, wann und wo Riemann den heute nach ihm benannten Integralbegriff eingeführt hat und vergleichen Sie die in Riemanns Originalarbeit präsentierte Definition des (bestimmten) Integrals mit unserer Definition.

Ergänzungsübung 13

Recherchieren Sie, welche Mathematiker den hier kurz „Darboux-Integral“ genannten Begriff eingeführt haben.

Ergänzungsübung 14

Vergleichen Sie die in 1.6 gegebene Definition des unbestimmten Integrals mit der entsprechenden Definition in Riemanns Originalarbeit. Wie definiert Riemann das uneigentliche Integral? Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es im Vergleich zu unserer Definition?

Ergänzungsübung 15

Recherchieren Sie den von Cauchy verwendeten Begriff des (eentlichen und uneentlichen) Integrals.

Ergänzungsübung 16

Informieren Sie sich über die Flächen- und Volumenberechnungen bei Archimedes. Welche Methoden verwendet er? Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede bestehen zur Flächenberechnung durch Integration?

Zweite Ergänzungen: Aneignung des Integralbegriffs

Ergänzungsübung 1

Illustrieren Sie die einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und einer Partition p von $[a, b]$ zugeordneten Treppenfunktionen f_p , f_p^s und f_p^S .

Ergänzungsübung 2

Betrachten Sie eine Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit genau einer Unstetigkeit an einer irrationalen Stelle. Erzeugen Sie nun immer feinere Partitionen durch wiederholte Halbierung von $[0, 1]$ und versuchen Sie, das Monotonie- und Konvergenzverhalten der Treppenfunktionen f_p^S und f_p^s anschaulich zu machen.

Ergänzungsübung 3

Zeichnen Sie Diagramme zu den Beweisen der Integrierbarkeit aller stetigen und aller monotonen Funktionen.

Ergänzungsübung 4

Veranschaulichen Sie sich die Inklusionsbeziehungen zwischen den folgenden Teilmengen von $M = \{ f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \}$ für ein gegebenes Intervall $[a, b]$ mit $a < b$:

$$S = \{ f \in M \mid f \text{ ist eine Treppenfunktion} \},$$

$$C = \{ f \in M \mid f \text{ ist stetig} \},$$

$$PC = \{ f \in M \mid f \text{ ist stückweise stetig} \},$$

$$AC = \{ f \in M \mid f \text{ hat höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen} \},$$

$$M = \{ f \in M \mid f \text{ ist monoton} \},$$

$$BV = \{ f \in M \mid f \text{ ist eine bv-Funktion} \},$$

$$RG = \{ f \in M \mid f \text{ ist eine Regelfunktion} \},$$

$$R = \{ f \in M \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar} \}.$$

Geben Sie möglichst viele Beispiele, um echte Inklusionen zu belegen.

Ergänzungsübung 5

Diskutieren Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede sowie die begrifflichen und rechnerischen Vor- und Nachteile des Riemann-, Darboux- und Regelintegrals sowie des Jordan-Inhalts.

Ergänzungsübung 6

Diskutieren Sie die Aussage

„Eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kann beliebig genau durch Treppenfunktionen approximiert werden.“

im Hinblick auf das Riemann-Integral und das Regelintegral.

Ergänzungsübung 7

Beschreiben Sie, wie Sie ein einfaches Computerprogramm zur näherungsweisen Berechnung von Integralen programmieren würden. Entspricht ihr Programm eher dem Riemann-, dem Darboux- oder dem Regelintegral? Diskutieren Sie, für welche Funktionen Ihr Programm evtl. keine guten Ergebnisse liefert und wie Sie es entsprechend verbessern könnten.

Ergänzungsübung 8

Implementieren Sie ein Computerprogramm zur näherungsweisen Berechnung von Integralen und vergleichen Sie die approximativen mit den exakten Werten für ausgewählte Funktionen.

Dritte Ergänzungen: Diskussion des Hauptsatzes

Ergänzungsübung 1

Fertigen Sie eine zweisepaltige Tabelle an, deren linke Spalte den aktuellen Kontostand wiedergibt, während in der rechten Spalte die Ein- und Auszahlungen dokumentiert werden. Notieren Sie die mathematischen Eigenschaften dieser Tabelle.

Ergänzungsübung 2

Entwickeln Sie, aufbauend auf die vorangehende Übung, eine diskrete Version des Hauptsatzes. Vergleichen Sie diese Version mit dem Beweis des Hauptsatzes.

Ergänzungsübung 3

Erläutern Sie den Hauptsatz mit Hilfe der Leibnizschen df/dx -Notation als „infinitesimale“ Version einer diskreten Aussage.

Ergänzungsübung 4

Diskutieren Sie die Berechtigung und alle Ungenauigkeiten der Aussage: „Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation.“

Ergänzungsübung 5

Beweisen Sie den Hauptsatz für stetige Funktionen, die stückweise linear sind. Versuchen Sie durch Diagramme möglichst klar herauszuarbeiten, warum der Hauptsatz für diese Funktionen gültig ist.

Ergänzungsübung 6

Betrachten Sie eine „typische“ Treppenfunktion auf $[0, 1]$ und zeichnen Sie den Graphen der Integralfunktion dieser Treppenfunktion zum Startpunkt 0. Welche Eigenschaften besitzt die Integralfunktion?

Ergänzungsübung 7

Zeichnen Sie die Betragsfunktion auf $[-1, 1]$ und ihre Integralfunktion

$$F(x) = \int_{-1}^x |t| \, dt \quad \text{für alle } x \in [-1, 1]$$

zum Startwert -1 .

Ergänzungsübung 8

Sei $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ streng monoton wachsend und stetig differenzierbar. Finden Sie mit Hilfe eines Diagramms eine Integrationsregel für die Umkehrfunktion von f . Beweisen Sie nun die Regel mit Hilfe partieller Integration und der Substitutionsregel. Skizzieren Sie, wieder unterstützt durch Diagramme, einen Beweis der Regel mit Hilfe von Riemann-Summen.

Ergänzungsübung 9

Erläutern Sie die Substitutionsregel mit Hilfe der Leibniz-Notation.

Ergänzungsübung 10

Erläutern Sie mit Hilfe von Diagrammen den geometrischen Gehalt (im Hinblick auf signierte Flächenmessungen) der Substitutionsregel.

Ergänzungsübung 11

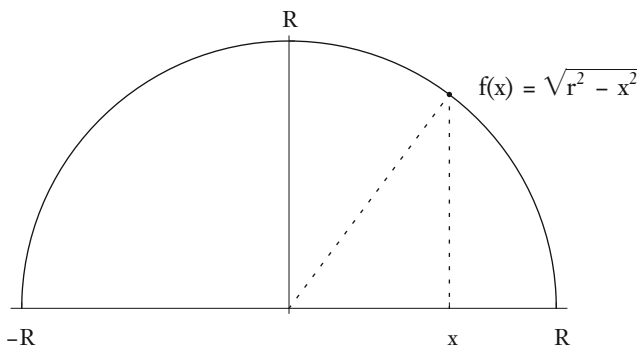
Geben Sie Beispiele für Anwendungen der Substitutionsregel mit nichtinjektiven Substitutionsfunktionen s . Wie lässt sich die Identität der Integrale mit unterschiedlichen s -Urbildern an den Integrationsgrenzen deuten?

Ergänzungsübung 12

Interpretieren Sie die zur Berechnung der Kreisfläche durchgeführte Substitution

$$x = s(t) = r \cos(t)$$

geometrisch. Kann man hier auch $\sin(t)$ statt $\cos(t)$ verwenden? Wie ändert sich die Berechnung?



Vierte Ergänzungen: Die Cantor-Menge

In Kapitel 2.1 haben wir die Cantor-Menge als Schnitt über Mengen C_n eingeführt, die durch Entfernung von mittleren Drittelintervallen definiert waren:

$$C = \bigcap_n C_n.$$

Wir haben erwähnt, dass $C = C^*$ gilt, wobei

$$C^* = \{ x \in [0, 1] \mid x \text{ besitzt eine 3-adische Darstellung, in der} \\ \text{nur die Ziffern 0 und 2 vorkommen} \} = \\ \{ \sum_{k \geq 1} a_k / 3^k \mid (a_k)_{k \geq 1} \text{ ist eine Folge in } \{0, 2\} \}.$$

Diese 3-adische Darstellung der Cantor-Menge wollen wir nun untersuchen.

Ergänzungsübung 1

Geben Sie Beispiele für 3-adische Darstellungen, die Elemente von C^* bzw. keine Elemente von C^* sind. Achten Sie dabei auf die Zweideutigkeit der Darstellungen.

Ergänzungsübung 2

Argumentieren Sie anhand von Diagrammen, warum

$$(a) \ C^* \subseteq C, \quad (b) \ C \subseteq C^*.$$

Ergänzungsübung 3

Wir haben mit Hilfe der Schnittdefinition gezeigt:

- (a) C ist perfekt.
- (b) C ist überabzählbar. Genauer gilt $|C| = |\mathbb{R}|$.
- (c) C enthält kein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$.

Beweisen Sie diese Eigenschaften unter Verwendung der 3-adischen Darstellung der Cantor-Menge. Vergleichen Sie die Argumente mit denen des ursprünglichen Beweises.

Es ist instruktiv, auch das offene Komplement von C zu betrachten:

Ergänzungsübung 4

Betrachten Sie die offene Menge $U = \mathbb{R} - C$ und die Zerlegung von U in abzählbar viele offene paarweise disjunkte nichtleere Mengen. Welche Eigenschaften hat diese Zerlegung? Wie lässt sich die Anordnung der Intervalle beschreiben?

Die Konstruktion der Cantor-Menge lässt sich vielfach variieren. Nicht immer entstehen dabei Riemann-integrierbare Indikatorfunktionen:

Ergänzungsübung 5

Definieren Sie in Analogie zur Definition der Mengen C_n abgeschlossene Intervalle D_n , indem sie aus $D_0 = [0, 1]$ wiederholt gewisse offene Mittelintervalle entfernen, deren Länge nun nicht mehr notwendig ein Drittel der Länge des betrachteten Intervalls sein muss. Welche Eigenschaften hat die Menge $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$? Wann ist $1_D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar? An welchen Stellen ist 1_D unstetig?

Ergänzungsübung 6

Ordnen Sie jedem entfernten Drittelintervall der Konstruktion der Cantor-Menge eine endliche (evtl. leere) Folge in $\{-1, 1\}$ zu und definieren Sie mit Hilfe dieser Folgen den Wert, den die Cantor-Funktion auf einem dieser Intervalle konstant annimmt.

Ergänzungsübung 7

Wir haben angegeben, dass sich die Cantor-Funktion auch durch

$$f\left(\sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{3^k}\right) = \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{2^k} \quad \text{für alle Folgen } (a_k)_{k \geq 1} \text{ in } \{0, 1, 2\}.$$

darstellen lässt, wobei die b_k -Folge aus der a_k -Folge durch Nullsetzen nach der ersten 1 gefolgt von einem Ersetzen jeder 2 durch eine 1 entsteht. Zeigen Sie, dass diese Definition gleichwertig ist zu:

$$f(x) = \frac{1}{2^n} + \sum_{1 \leq k < n} \frac{a_k/2}{2^k}, \quad \text{für } x = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{3^k}, \quad a_n = 1, \quad a_k \neq 1 \text{ für } k < n,$$

$$f(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k/2}{2^k}, \quad \text{für } x = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{3^k}, \quad a_k \in \{0, 2\} \text{ für alle } k.$$

Zeigen Sie nun, dass diese Darstellungen die Cantor-Funktion definieren.

Fünfte Ergänzungen: Topologische Visualisierungen

Der topologische Stetigkeitsbegriff für reelle Funktionen lässt sich mit Hilfe von Abbildungen zwischen Geraden anschaulich machen:

Ergänzungsübung 1

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeichnen Sie anstelle eines Koordinatensystems zwei waagrechte Geraden und interpretieren sie f als Abbildung der Punkte der oberen Geraden auf Punkte der unteren Geraden. Erläutern Sie nun anhand dieser Interpretation die drei in 2.1 untersuchten topologischen Stetigkeitsformulierungen:

Umgebungsstetigkeit in einem Punkt,

Urbildstetigkeit in allen Punkten,

Stetigkeit als Erhalt von Nähe.

Diskutieren Sie nun konkrete stetige und unstetige Beispiele (etwa Polynome, Cantorfunktion, Unstetigkeiten erster und zweiter Art).

Ergänzungsübung 2

Erweitern Sie die Überlegungen mit Hilfe der Relativbegriffe auf Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer Teilmenge P von \mathbb{R} wie zum Beispiel

$[0, 1[$, $[0, 1] \cup [2, 3]$, $\mathbb{R} - \{0\}$, \mathbb{Z} , $\{0\} \cup \{1/n \mid n \geq 1\}$ usw.

Wir betrachten nun die Ebene \mathbb{R}^2 mit der euklidischen Metrik. Sie eignet sich gut, um ein Gefühl für abstrakte metrische und topologische Begriffsbildungen zu entwickeln.

Ergänzungsübung 3

Zeichnen Sie Diagramme, die in der Ebene \mathbb{R}^2 die folgenden Begriffe illustrieren:

- (a) offene ε -Umgebung eines Punktes,
- (b) Umgebung eines Punktes,
- (c) offene Menge, abgeschlossene Menge, perfekte Menge,
- (d) Inneres, Abschluss, Rand einer Menge,
- (e) Durchmesser einer Menge,
- (f) Abstand eines Punktes von einer Menge, Abstand zweier Mengen voneinander.

Ergänzungsübung 4

Wir betrachten einige Teilräume $X \subseteq \mathbb{R}^2$ unter der euklidischen Metrik. Zeichnen Sie jeweils Diagramme zur Illustration der offenen und abgeschlossenen Mengen in X für

- (a) $X = [0, 1] \times [0, 1]$,
- (b) $X =]0, 1[\times [0, 1]$,
- (c) $X =]0, 1[\times [0, 1]$,
- (d) $X = \mathbb{R} \times \{0\}$,
- (e) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ergänzungsübung 5

Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$\|(x, y)\| = |x + y|.$$

- (a) Zeigen Sie, dass eine Seminorm auf dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^2 vorliegt.
- (b) Definieren Sie die induzierte Semimetrik d und weiter die durch Äquivalenzklassenbildung entstehende Metrik d' . Wie sehen die Äquivalenzklassen aus? Wie misst d' Abstände zwischen den Äquivalenzklassen?

Ergänzungsübung 6

- (a) Seien $A = U_1(0)$, $B = U_2(0)$ im \mathbb{R}^2 . Definieren und visualisieren Sie eine stetige Bijektion $f: A \rightarrow B$.
- (b) Wir betrachten die Teilmengen

$$A = U_1(0),$$

$$B = U_1(3) \cup U_1(6)$$

der Ebene. Argumentieren Sie mit Hilfe von Diagrammen, warum es keine stetige Bijektion $g: A \rightarrow B$ gibt.

Wir betrachten nun noch einige Beispiele für Funktionen, die Teilmengen der Ebene in Teilmengen des Raumes abbilden. Auch hier sind die Räume mit der euklidischen Metrik ausgestattet.

Ergänzungsübung 7

Seien $A = U_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ und

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| = 1, (x, y, z) \neq (0, 0, 1) \} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Beschreiben Sie eine stetige Bijektion $f: A \rightarrow B$, die sich stetig zu einer Funktion $g: \text{cl}(A) \rightarrow \text{cl}(B)$ fortsetzen lässt.

Ergänzungsübung 8

Seien

$$R = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

$$T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - 1^2 = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

das Einheitsquadrat der Ebene bzw. der Torus („Autoreifen“) im \mathbb{R}^3 mit den Radien 2 und 1.

- (a) Skizzieren Sie R und T und begründen Sie die Gleichung der Definition von T .
- (b) Beschreiben Sie mit Hilfe ihrer Skizze eine stetige Surjektion $f : R \rightarrow T$. Für welche Punkte von T existieren mehrere Urbilder?

Nun sind wir gut vorbereitet, einige Sprechweisen, die Mathematiker gerne verwenden, zu verstehen:

Ergänzungsübung 9

Finden Sie Beispiele, die die folgenden Aussagen illustrieren:

- (a) Dehnen ist stetig.
- (b) Zerschneiden ist unstetig.
- (c) Quetschen ist stetig.
- (d) Verkleben ist stetig.
- (e) Identifizieren ist stetig.
- (f) Lochen ist unstetig.

Sechste Ergänzungen: Kompaktheitsargumente

Wir betrachten zunächst einige häufig anzutreffende Fehlvorstellungen über den Kompaktheitsbegriff.

Ergänzungsübung 1

Geben Sie hilfreiche und mit Beispielen versehene Korrekturen der folgenden Aussagen:

„X ist kompakt, wenn es eine endliche Überdeckung von X mit offenen Mengen gibt.“

„X ist kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X endlich ist.“

„X ist kompakt, wenn jede Überdeckung von X endlich viele Elemente enthält, die X überdecken.“

Die drei folgenden Übungen sollen helfen, sich mit dem Begriff spielerisch anhand konkreter Mengen anzufreunden.

Ergänzungsübung 2

Versuchen Sie, das Intervall $[0, 1]$ mit unendlich vielen offenen Intervallen so zu überdecken, dass endlich viele Intervalle nicht ausreichen. Formulieren Sie, warum Ihr Ansatz scheitert. Ziehen Sie zum Vergleich eine offene nicht endlich reduzierbare Überdeckung von $[0, 1]$ heran.

Ergänzungsübung 3

Wiederholen Sie die Beweisführung der Kompaktheit von $[0, 1]$ in \mathbb{R} für die Kreislinie $K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 1 \}$. Zeichnen Sie eine Skizze, die den Grundgedanken der Argumentation verdeutlicht.

Ergänzungsübung 4

Für $p_0 \in \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$ sei $K_\varepsilon(p_0) = \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p - p_0\| = \varepsilon \}$. Weiter sei

$$C = \bigcup_{n \geq 1} K_{1/n}((1/n, 0)).$$

- (a) Skizzieren Sie die Menge C.
- (b) Aus welchem allgemeinen Satz folgt, dass C kompakt ist?
- (c) Zeigen Sie ohne Verwendung des allgemeinen Satzes, dass C kompakt ist: betrachten Sie eine offene Überdeckung \mathcal{U} von C und zeigen Sie, dass \mathcal{U} endlich reduzierbar ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass die Kreislinien $K_\varepsilon(p_0)$ kompakt sind (vgl. die vorangehende Übung).

Unsere Formulierung der Kompaktheit verwendete offene Überdeckungen. Eine analoge Definition mit abgeschlossenen Mengen führt dagegen zu keinem neuen Begriff:

Ergänzungsübung 5

Bestimmen Sie die Teilmengen P von \mathbb{R} , die die folgende Eigenschaft besitzen:

„Jede Überdeckung von P mit abgeschlossenen Mengen ist endlich reduzierbar.“

Dagegen gelangen wir durch Dualisierung der Definition zu einer äquivalenten Formulierung der Kompaktheit mit Hilfe abgeschlossener Mengen. Hierzu definieren wir:

Definition (*endliche Durchschnittseigenschaft*)

Ein Mengensystem \mathcal{A} hat die *endliche Durchschnittseigenschaft* *fip*, falls gilt:

Für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ist $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$.

Hier steht „fip“ für engl. „finite intersection property“.

Ergänzungsübung 6

Geben Sie verschiedene Beispiele für fip-Systeme \mathcal{A} . Bestimmen Sie dabei jeweils auch $\bigcap \mathcal{A}$.

Ergänzungsübung 7

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) X ist kompakt.
- (b) Ist \mathcal{A} ein fip-System abgeschlossener Mengen in X , so ist $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Als Anwendung der fip-Formulierung (b) betrachten wir noch einmal das Schachtelungsprinzip.

Ergänzungsübung 8

Beweisen Sie das Schachtelungsprinzip für kompakte metrische Räume mit Hilfe der fip-Formulierung der Kompaktheit.

Siebte Ergänzungen: Die Sektorformel von Leibniz

Das Integral einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir geometrisch als die signierte Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse interpretiert. Lesen wir das Definitionsintervall $[a, b]$ von f als Zeitintervall, so überstreichen die senkrechten Geradenstücke von $(t, 0)$ nach $(t, f(t))$ in der Zeit $t \in [a, b]$ eine Fläche mit dem signierten Inhalt

$$I(f) = \int_a^b f(t) \, dt.$$

Ist nun $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Kurve, so können wir die Fläche betrachten, die durch die Geradenstücke von $0 \in \mathbb{R}^2$ nach $f(t) \in \mathbb{R}^2$ im Zeitintervall $[a, b]$ überstrichen wird. Diese Fläche ist signiert, wenn wir eine Umlaufrichtung gegen den Uhrzeigersinn als positiv betrachten und eine Umlaufrichtung im Uhrzeigersinn als negativ. Den signierten Inhalt dieser Fläche bezeichnen wir mit $A(f)$.

Ergänzungsübung 1

Zeichnen Sie Diagramme zur Illustration der „überstrichenen signierten Fläche“ einer Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ergänzungsübung 2

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Definieren Sie $A(f)$ in Analogie zur Definition von $L(f)$.

[Verwenden Sie Polygonzüge wie für $L(f)$ und den signierten Flächeninhalt $A(D)$ eines Dreiecks D mit den Ecken $(0, 0)$, (a_1, a_2) , (b_1, b_2) .]

Überstrichene Flächen einer ebenen Kurve lassen sich mit der folgenden Formel berechnen:

Satz (*Sektorformel von Leibniz*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt:

$$A(f) = \frac{1}{2} \int_a^b f_1(t) f_2'(t) - f_2(t) f_1'(t) \, dt.$$

Ergänzungsübung 3

Geben Sie eine durch Diagramme unterstützte anschauliche Begründung der Sektorformel.

[Verwenden Sie Approximationen an $A(f)$ durch signierte Dreiecke und verwenden Sie elementare geometrische Eigenschaften der Determinante einer (2×2) -Matrix.]

Für „verbeulte Kreise“ in der Ebene wird die Sektorformel besonders einfach:

Satz (Sektorformel von Leibniz für Kurven in Polarkoordinaten)

Sei $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve in Polarkoordinaten, d.h., es gebe eine stetig differenzierbare Funktion $r: [0, 2\pi] \rightarrow [0, \infty[$ mit

$$f(t) = r(t) e^{it} = r(t) (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Dann gilt für alle $[a, b]$ mit $0 \leq a \leq b \leq 2\pi$:

$$A(f| [a, b]) = \frac{1}{2} \int_a^b r(t)^2 dt.$$

Ergänzungsübung 4

Beweisen Sie die zweite Sektorformel mit der ersten.

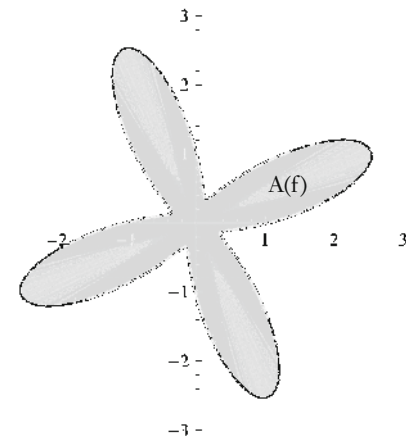
Mit den Sektorformeln können wir viele alte und neue Flächen der Ebene elegant berechnen:

Ergänzungsübung 5

Sei $r > 0$. Berechnen Sie die Fläche des Kreises

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \}$$

mit Hilfe einer der Sektorformeln.



Überstrichene Fläche der Kurve

$$f(t) = \exp(\sin(4t)) e^{it} \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi]$$

Ergänzungsübung 6

Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b mit Hilfe der Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, und der ersten Sektorformel. Ist die auch die zweite Sektorformel geeignet?

Ergänzungsübung 7

Sei $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(t) = (1 - \cos(t)) e^{it} = (1 - \cos(t)) (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Skizzieren Sie f . Analysieren Sie dabei besonders das Verhalten von f zu den Zeiten 0 und π . Berechnen Sie weiter $A(f)$.

Die vom Fahrstrahl von 0 nach $f(t)$ einer Kurve f überstrichene Fläche spielt eine prominente Rolle in den Planetenbewegungen. Das zweite Keplersche Gesetz, der sog. Flächensatz, lautet:

Zweites Keplersches Gesetz

Der Fahrstrahl, der von der Sonne zu einem Planeten führt, überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Achte Ergänzungen: Der Ableitungsbegriff im \mathbb{R}^n

Um mit den mehrdimensionalen Differenzierbarkeitsbegriffen vertraut zu werden, betrachten wir einige Spezialfälle der Dimensionen des Definitionsbereichs und des Wertebereichs.

Ergänzungsübung 1

Erläutern Sie durch Skizzen und Erklärungen die Differenzierbarkeit einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt 0 für die vier Fälle $n, m \in \{1, 2\}$.

Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lassen sich durch dreidimensionale Graphen als Höhenlandschaften visualisieren. In einigen Fällen kann man die Tangentialebenen einer solchen Funktion vor Augen sehen:

Ergänzungsübung 2

Sei $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir definieren $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = g(\|(x, y)\|) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Beschreiben Sie die Funktion f anschaulich.
- (b) Beschreiben Sie anschaulich den Zusammenhang zwischen den Tangenten von g und den Tangentialebenen von f .

Die Visualisierung einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ als dreidimensionale Höhenlandschaft ist per Hand in vielen Fällen nur schwer möglich und erfordert bereits für einfache Funktionen zeichnerisches Geschick. Eine alternative Visualisierung, die ganz in der Ebene verbleibt, stellen die von den Landkarten bekannten Höhenlinien dar: Eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^2$ kann man mit Hilfe ihrer Niveaumengen

$$\text{niv}_f(c) = f^{-1}[\{c\}] = \{(x, y) \in P \mid f(x, y) = c\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

visualisieren, indem man für einige Werte c die Mengen $\text{niv}_f(c)$ berechnet, in der Ebene einzeichnet und mit dem Wert c markiert (Höhenliniendiagramm oder Kontur-Plot).

Ergänzungsübung 3

Visualisieren Sie die folgenden Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch Höhenlinien:

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, (c) $f(x, y) = x$, (d) $f(x, y) = xy$.

Beschreiben Sie, wie sich das Änderungsverhalten der Höhenlandschaft f in den Höhenlinien von f widerspiegelt.

Ergänzungsübung 4

Berechnen Sie für die obigen Funktionen (a) – (d) die Jacobi-Matrizen

$$J_f(x, y) = (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tragen Sie nun einige Vektoren $(\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) \in \mathbb{R}^2$ in Ihre Kontur-Plots ein, indem Sie sie an die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ anheften.

Die betrachteten Vektoren sind als Gradienten bekannt:

$$\text{grad}_f(x, y) = (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{Gradient von } f \text{ im Punkt } (x, y))$$

In der Ebene lassen sich geometrische Eigenschaften des Gradienten spielerisch entdecken. (Die folgenden Übungen können vor der allgemeinen Definition in 3.5 bearbeitet werden.)

Ergänzungsübung 5

Welche geometrische Bedeutung hat die Länge eines Gradienten?

Ergänzungsübung 6

Welchen geometrischen Zusammenhang zwischen den Höhenlinien und der Richtung der Gradienten erkennen Sie? Formulieren Sie eine Hypothese und beweisen Sie sie für eine oder mehrere der betrachteten Funktionen.

Ergänzungsübung 7

Wie lassen sich die Vektoren $\text{grad}_f(x, y)$ und $-\text{grad}_f(x, y)$ insgesamt interpretieren?

Für Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $P \subseteq \mathbb{R}^2$ steht uns die Visualisierung durch ein Vektorfeld zur Verfügung: Für jedes $(x, y) \in P$ heften wir den Vektor $f(x, y)$ an den Punkt (x, y) an. Die Jacobi-Matrizen sind nun 2×2 -Matrizen. Ihre Zeilen sind als Vektoren der Ebene gelesen die Gradienten der Komponenten von f .

Ergänzungsübung 8

Sei $f: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|}.$$

- Visualisieren Sie das Vektorfeld f . Wo zeigt f eine starke und wo eine schwache Änderung?
- Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_c(x) = x/\|(x, c)\|$ für einige c und bestimmen Sie den Wertebereich dieser Funktionen.
- Berechnen Sie die (2×2) -Matrizen $J_f(x, y)$ für alle $(x, y) \neq 0$ und überprüfen Sie Ihre Aussagen aus (a) über das Änderungsverhalten von f .

Neunte Ergänzungen: Gradient, Divergenz und Rotation

Ergänzungsübung 1

Erklären Sie die geometrische Bedeutung des Gradienten als „Richtung des größten Anstiegs“ anhand von Skizzen für die Fälle:

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ergänzungsübung 2

Welche Bedeutung hat $\langle w, \nabla \rangle$ für $w \in \mathbb{R}^n$ und $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$?

Ergänzungsübung 3

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Weiter sei $g: [a, b] \rightarrow P$ mit $g'(t) = \text{grad}(f)(g(t))$ für alle $t \in [a, b]$.

Welche geometrische Bedeutung haben g und $f \circ g$?

Ergänzungsübung 4

Erklären Sie die Bedeutung der Divergenz $\text{div} f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, für die Fälle $n = 1, 2, 3$ als „Quelldichte“ von f durch einfache Beispiele und Skizzen (etwa $f(x, y) = 1/2(x, y)$ für $n = 2$). Welche „optischen Eigenschaften“ haben Vektorfelder mit $\text{div}(f)(p) > 0$, $\text{div}(f)(p) = 0$ und $\text{div}(f)(p) < 0$?

Ergänzungsübung 5

Wir betrachten differenzierbare Vektorfelder $f: P \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

(+) $f(x, y, z) = f(x, y, z')$ für alle $(x, y, z), (x, y, z') \in P$,
 $f_3(x, y, z) = 0$ für alle $(x, y, z) \in P$.

- (a) Beschreiben Sie die Eigenschaft (+) anschaulich.
- (b) Ordnen Sie jedem zweidimensionalen Vektorfeld $g: Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein dreidimensionales Vektorfeld $f: P \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft (+) zu.
- (c) Berechnen Sie $\text{rot } f$ für Vektorfelder f mit (+).
- (d) Motivieren Sie die Definition

$$\text{rot} g(p) = \partial_1 f_2(p) - \partial_2 f_1(p) \in \mathbb{R}$$
 für differenzierbare zweidimensionale Vektorfelder $g: Q \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- (e) Erläutern Sie den Begriff der Rotation für einige einfache zwei- und dreidimensionale Vektorfelder.

Ergänzungsübung 6

Konstruieren und zeichnen Sie ein Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\operatorname{rot}(f)(x, y) = 1 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $\operatorname{rot}(f)$ wie in der vorangehenden Übung erklärt ist. Geben Sie allgemeiner für alle $c \in \mathbb{R}$ ein Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, dessen Rotation konstant gleich c ist.

Ergänzungsübung 7

Welche Bedeutung hat Δf für $f: P \rightarrow \mathbb{R}, P \subseteq \mathbb{R}^2$?

Ergänzungsübung 8

Kombinieren Sie Ihre Anschauungen über den Gradienten und die Divergenz, um eine Anschauung von

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

für $f: P \rightarrow \mathbb{R}, P \subseteq \mathbb{R}^2$, zu entwickeln. Berechnen Sie $\Delta f(p)$ für einige Beispiele, um Hypothesen zu $\Delta f(p) = 0$ bzw. $\Delta f(p) \neq 0$ zu überprüfen.

Ergänzungsübung 9

Berechnen Sie Δf für die Funktionen

$$(a) \quad f: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y, z) = \|(x, y, z)\|^{-1},$$

$$(b) \quad g: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(x, y, z) = \|(x, y, z)\|^{-2},$$

$$(c) \quad h: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad h(x, y) = \log(\|(x, y)\|).$$

Zehnte Ergänzungen: Kennenlernen von Fourier-Reihen

Ergänzungsübung 1

Nennen Sie Beispiele für periodische Funktionen aus der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Ergänzungsübung 2

Erklären Sie anschaulich, warum man sich bei der Untersuchung periodischer Funktionen auf eine bestimmte Periode beschränken kann. Begründen Sie, warum die Periode 2π eine ausgezeichnete Rolle spielt.

Ergänzungsübung 3

Skizzieren Sie die trigonometrischen Funktionen $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ für einige ganze Zahlen k . Begründen Sie, warum der Parameter k dieser Funktionen auch Frequenz genannt wird.

Ergänzungsübung 4

Diskutieren Sie qualitative Eigenschaften von reellen trigonometrischen Polynomen k -ten Grades (lokale Extremwerte, Nullstellen, Wertebereich, Symmetrieeigenschaften usw.). Zeichnen oder Plotten Sie typische Graphen.

Ergänzungsübung 5

Diskutieren Sie die Sonderrolle des Koeffizienten a_0 bzw. c_0 einer Fourier-Reihe aus reeller und komplexer Sicht.

Ergänzungsübung 6

Motivieren Sie die Bezeichnung „trigonometrisches Polynom“, indem sie die komplexwertige Darstellung der reellen trigonometrischen Polynome heranziehen.

Ergänzungsübung 7

Beschreiben Sie Analogien und Unterschiede der Begriffspaare „Potenzreihe – Trigonometrische Reihe“, „Taylor-Reihe – Fourier-Reihe“, „Taylor-Koeffizienten – Fourier-Koeffizienten“.

Ergänzungsübung 8

Beschreiben Sie die Abbildungseigenschaften der Funktionen $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, mit $f_k(x) = c_k e^{ikx}$ für alle x . Wie kann man derartige Funktionen visualisieren? Auf welchem Definitionsbereich können wir uns diese Funktionen vorstellen?

Ergänzungsübung 9

Beschreiben Sie, für ein $k > 0$, die Abbildungseigenschaften der Summanden

$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}$$

einer komplexen Fourier-Reihe. Nehmen Sie weiter an, dass die Koeffizienten c_k von reellen Koeffizienten a_k und b_k herkommen und interpretieren Sie die Umrechnungsformeln zwischen den reellen und komplexen Koeffizienten.

Ergänzungsübung 10

Begründen Sie die Orthogonalitätseigenschaften von $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ und e^{ikx} anschaulich.

Ergänzungsübung 11

Beschreiben die Funktionsgraphen der Dirichlet-Kerne D_n qualitativ. Welche Konvergenz gilt für n gegen unendlich?

Ergänzungsübung 12

Formulieren Sie präzise Fragen über den Zusammenhang zwischen f und $FS(f)$.

Ergänzungsübung 13

Komentieren Sie die Aussage: „Wenn $FS(f)$ absolut und gleichmäßig konvergiert, so gegen f .“

Ergänzungsübung 14

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeichnen Sie ein Diagramm zur Erläuterung der Werte $f(x+)$, $f(x-)$, $f(x\pm)$, $f'(x+)$, $f'(x-)$.

Ergänzungsübung 15

Antworten Sie auf die Frage:

„Haben die Mathematiker im 19. Jahrhundert geglaubt, dass $FS(f)$ für alle 2π -periodischen Funktion f gegen f konvergiert?“

Ergänzungsübung 16

Stellen Sie durch Recherche im Internet eine Zeittafel zu Geschichte der Fourier-Reihen zusammen. Welche Begriffe sind direkt oder indirekt mit der Entwicklung der Theorie der Fourier-Reihen verbunden?

Ergänzungsübung 17

Zur Vertiefung der vorangehenden Übung: Beschreiben Sie die Beiträge von einem Mathematiker Ihrer Wahl – etwa Joseph Fourier, Johann Peter Dirichlet, Bernhard Riemann, Georg Cantor – zur Theorie der Fourier-Reihen in größerem Detail (Probleme, Ergebnisse, Wirkungsgeschichte).

Elfte Ergänzungen: Das Fadenpendel

Gegeben sei ein Pendel mit einem Faden der Länge ℓ , an dem ein Körper der Masse m befestigt ist. Die Bewegung des Pendels in der Zeit t modellieren wir in der x - y -Ebene, den Körper als Massepunkt. Dabei seien

- 0 der Aufhängepunkt des Pendels,
- $(0, -\ell)$ die Grund- oder Ruhestellung des Pendels,
- K der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius ℓ ,
- $\varphi(t)$ der Auslenkungswinkel des Pendels zur Zeit t ,
- $(x(t), y(t))$ der Ort des Massepunktes zur Zeit t ,
- $h(t)$ die Tangente an den Kreis K im Punkt $(x(t), y(t))$.

Den Winkel $\varphi(t)$ messen wir gegen den Uhrzeigersinn, wobei die Grundstellung des Pendels dem Winkel $\varphi(t) = 0$ entspricht. Ziel ist, die Auslenkung $\varphi(t)$ und die Ortsfunktion $f(t)$ des Massepunktes als Funktionen in der Zeit t zu bestimmen.

Ergänzungsübung 1

Geben Sie die geometrischen Zusammenhänge zwischen den Funktionen $\varphi(t)$, $x(t)$, $y(t)$ an und zeigen Sie dadurch, dass es genügt, eine der drei Funktionen zu bestimmen.

Für unser Modell nehmen wir an, dass auf den Massepunkt die konstante Schwerkraft $F = (0, -mg)$ wirkt.

Ergänzungsübung 2

Wie sieht ein genaueres Modell aus? Ist der Fehler erheblich?

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz erfüllt die Auslenkungsfunktion $\varphi(t)$ die von der Masse m unabhängige Differentialgleichung

$$(+)\quad \ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t))$$

zweiter Ordnung, die wir mit der signierten Bogenlängenfunktion

$$L(t) = \ell \varphi(t)$$

auch schreiben können als

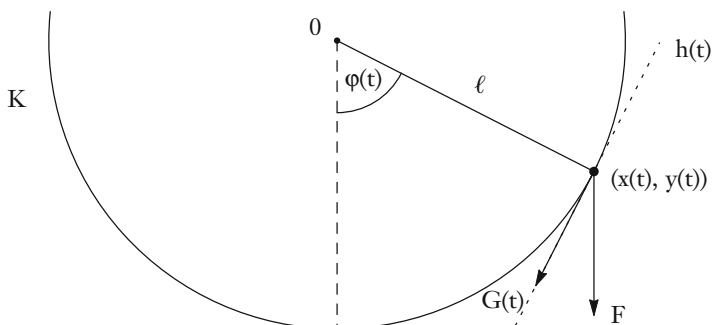
$$(++)\quad \ddot{L}(t) = -g \sin(\varphi(t)).$$

Ergänzungsübung 3

Begründen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe der folgenden Skizze. Berechnen Sie hierzu die Projektion $G(t)$ von F auf die Tangente $h(t)$ und schreiben Sie diese Projektion in der Form

$$G(t) = \alpha(t) \frac{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}{\|(\dot{x}(t), \dot{y}(t))\|} \quad \text{für } t \text{ mit } (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq 0.$$

Wenden Sie nun das zweite Newtonsche Gesetz an. Argumentieren Sie, dass $\alpha(t) = m\ddot{L}(t)$.

*Ergänzungsübung 4*

Begründen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe des Erhalts der Energie.

Ergänzungsübung 5

Ersetzen Sie nun in der Differentialgleichung $\sin(\varphi(t))$ durch $\varphi(t)$ und geben Sie die allgemeine auf \mathbb{R} definierte Lösung $\varphi(t)$ bzw. $L(t)$ der vereinfachten Differentialgleichung an in der Form

$$\varphi(t) = a \cos(\omega t - t_0), \quad a \geq 0, \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

(Rechnen Sie die Form $a' \cos(\omega t) + b' \sin(\omega t)$ in diese Form um, wenn noch nicht geschehen.) Welche physikalische Bedeutung haben a , ω und t_0 ?

Welche Schwingungsdauer T ergibt sich für das Pendel? Bestimmen Sie T für einige in Metern gemessene Längen ℓ mit der Näherung $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Bestimmen Sie zudem die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$. Welche physikalische Bedeutung hat $y(t)$? Sind $x(t)$ und $y(t)$ harmonische Schwingungen in t ?

Genauer: Welche Differentialgleichungen erfüllen $x(t)$ und $y(t)$?

Ergänzungsübung 6

Diskutieren Sie die Ersetzung von $\sin(\varphi(t))$ durch $\varphi(t)$ aus analytischer Sicht. Welche Fragen stellen sich?

Zwölfte Ergänzungen: Doppelintegrale und Cavalierisches Prinzip

Wir betrachten die Dimension $n = 2$ und die Berechnung von zweidimensionalen Integralen durch Doppelintegrale:

$$(+)\quad \int_P f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy,$$

wobei $P = [a, b] \times [c, d]$.

Ergänzungsübung 1

Interpretieren Sie (+) als „Mittelwert von Mittelwerten“. Ziehen Sie hierzu diskrete Beispiele heran.

Ergänzungsübung 2

Begründen Sie anschaulich, warum (+) gilt, wenn f eine Treppenfunktion ist, d. h., falls gilt

$$f(x) = \sum_{k \leq n, j \leq m} c_{k,j} \, 1_{R_{k,j}} \quad \text{für alle } x \in R = \bigcup_{k,j} R_{k,j},$$

mit einer Partition $(t_k, s_j)_{k \leq n, j \leq m}$ von P ohne Stützstellen, $c_{k,j} \in \mathbb{R}$ und Zerlegungsrechtecken

$$R_{k,j} =]t_k, t_{k+1}[\times]s_j, s_{j+1}[\quad \text{für } k \leq n, j \leq m.$$

(Die Werte von f auf dem Gitter $P - R$ sind beliebig.)

Zeichnen Sie hierzu ein zweidimensionales Diagramm, indem Sie in die Rechtecke $R_{k,j}$ die Werte $c_{k,j}$ eintragen. Übersetzen Sie nun Ihre anschauliche Argumentation in einem Beweis von (+) für Treppenfunktionen.

Ergänzungsübung 3

Argumentieren Sie anschaulich, aber so genau wie möglich, warum (+) nicht für alle integrierbaren f gilt.

Ergänzungsübung 4

Diskutieren Sie, wie ein Beweis von (+) für schnittweise Riemann-integrierbare Funktionen verlaufen könnte.

Ergänzungsübung 5

Formulieren Sie eine Version von (+) für $P = [0, 1]^2$, bei der P in Diagonalen und nicht in Waagrechten und Senkrechten durchlaufen wird. Was ist ist dabei zu beachten?

Neben den Doppelintegralen ist vor allem das Cavalierische Prinzip zur Berechnung von Flächeninhalten und Volumina hilfreich. Wir untersuchen es anschaulich und anhand von Beispielen.

Ergänzungsübung 6

Illustrieren Sie das Cavalierische Prinzip zur Berechnung von Flächen mit Hilfe von dünnen Stäbchen (z.B. Streichhölzer oder Mikadostäbchen) oder entsprechenden Skizzen. Bilden Sie Analogien für die Dimension $n = 3$.

Ergänzungsübung 7

Beweisen Sie die Formel für den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks. Begründen Sie mit dem Cavalierischen Prinzip, dass diese Formel für alle Dreiecke gilt.

Ergänzungsübung 8

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $0 \leq f \leq g$, und sei

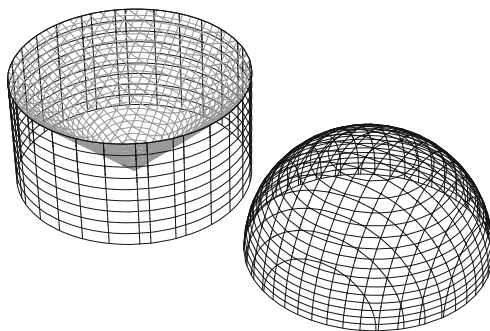
$$A = \{ (x, y) \mid x \in [a, b], y \in [f(x), g(x)] \}.$$

Interpretieren Sie „A fällt auf die x-Achse herab“ mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips. Illustrieren Sie die Aussage durch konkrete Beispiele.

Auf Archimedes geht eine beeindruckende Herleitung der Formel für das Volumen einer Kugel zurück, die lediglich das Volumen von Zylindern und Kegeln verwendet. Mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips lassen sich die Hebel und Schwerpunkte, mit denen Archimedes argumentiert, eliminieren:

Ergänzungsübung 9

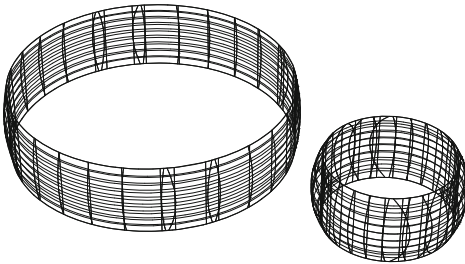
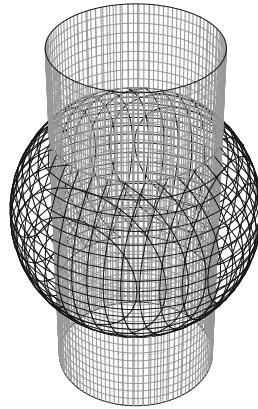
Wir betrachten einen Zylinder mit Radius r und Höhe r , aus dem von oben ein Kegel mit Radius r und Höhe r ausgeschnitten wird. Neben den so behandelten Zylinder legen wir eine Halbkugel mit Radius r .



- Zeigen Sie, dass die z -Schnitte der Halbkugel für alle $z \in [0, r]$ den selben Flächeninhalt besitzen wie die z -Schnitte des ausgeschnittenen Zylinders.
- Leiten Sie die Formel $\frac{4}{3} r^3 \pi$ für das Volumen einer Kugel aus den Formeln für das Volumen eines Zylinders und eines Kegels her.

Ergänzungsübung 10

Ein Serviettenring entsteht, wenn aus einer Kugel zentrisch ein Zylinder herausgeschnitten wird. Ein solcher Ring ist bestimmt durch seinen Radius und seine Höhe. Zeigen Sie mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips, dass das Volumen eines Serviettenrings nur von seiner Höhe, nicht aber von seinem Radius abhängt.



Oben die Konstruktion eines Serviettenrings, links zwei Ringe gleicher Höhe mit verschiedenen Radien.

Ergänzungsübung 11

Prüfen Sie, ob die Unabhängigkeit des Volumens eines Serviettenrings von seinem Radius erhalten bleibt, wenn der Ring aus einem Rotationsellipsoid anstelle einer Kugel entsteht.

Ergänzungsübung 12

Für einen Torus mit den Radien $R \geq r \geq 0$ ergab sich $2Rr^2\pi^2$ als Volumen. Schneiden wir den Torus auf und verbiegen wir ihn zu einem Zylinder mit der Grundfläche $r^2\pi$ und Höhe $2R\pi$, so hat der Zylinder genau dieses Volumen. Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri, dass die Methode des Aufschneidens und Geradebiegens für alle Kreisringe die korrekte Fläche und für alle Jordan-messbaren Körper, deren z -Schnitte Kreise sind, das korrekte Volumen liefert. Gilt dies auch für Ellipsenringe?

Ergänzungsübung 13

Allgemeine Kegel bzw. Zylinder haben das Volumen „ $1/3$ Grundfläche mal Höhe“ bzw. „Grundfläche mal Höhe.“ Gelten analoge Formeln auch für Oberflächeninhalte?

Übungen

1.1	Das Riemann-Integral	545
1.2	Darboux-Integral und Jordan-Inhalt	546
1.3	Integrierbare Funktionen	548
1.4	Differentiation und Integration	551
1.5	Anwendungen des Hauptsatzes	553
1.6	Uneigentliche Integrale	557
2.1	Lineare Punktmengen	558
2.2	Topologische Formulierungen der Stetigkeit	560
2.3	Metrische Räume	562
2.4	Topologie metrischer Räume	565
2.5	Kompaktheit in \mathbb{R}	570
2.6	Kompaktheit in metrischen Räumen	571
3.1	Kurven	573
3.2	Rektifizierbare Kurven	574
3.3	Mehrdimensionale Differenzierbarkeit	576
3.4	Partielle Ableitungen	578
3.5	Die Differentialoperatoren	580
3.6	Taylor-Entwicklung und lokale Extremwerte	581
4.	Fourier-Reihen	584
5.	Gewöhnliche Differentialgleichungen	588
6.	Mehrdimensionale Integration	591

1.1 Das Riemann-Integral

Übung 1

Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für alle $x \in [0, 1]$. Bestimmen Sie die Riemann-Summen $\sum_{p_0} f, \dots, \sum_{p_4} f$ für die äquidistanten Partitionen p_0, \dots, p_4 von $[0, 1]$ der Längen $0, \dots, 4$, deren Stützstellen durch die Mittelpunkte der Teilintervalle der Partitionen gegeben sind.

Übung 2

Zeigen Sie, dass das Integral c einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ im Fall der Existenz eindeutig bestimmt ist.

Übung 3

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist.

Übung 4

Geben Sie einen ausführlichen, auf der Definition der Integrierbarkeit beruhenden Beweis für die Integrierbarkeit der Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x < 1/2, \\ 1, & \text{falls } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Übung 5

Zeigen Sie, dass für alle $b \geq 0$ gilt:

$$\int_0^b x \, dx = \frac{b^2}{2}, \quad \int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}.$$

Übung 6

Beweisen Sie die Monotonie, Einschränkung und Aufspaltung im im Satz über die elementaren Eigenschaften des Integrals.

Übung 7

Beweisen Sie die Monotonie des Integrals mit Hilfe der Linearität und der folgenden Positivitäts-Eigenschaft:

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0, \quad \text{falls } f \geq 0.$$

Übung 8

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und sei $f: [\min(a, b, c), \max(a, b, c)] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der Aufspaltungseigenschaft:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Übung 9

Für $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir:

$f \sim g$, falls $\{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\}$ ist endlich.

Zeigen Sie:

- (a) \sim ist eine Äquivalenzrelation auf $M = \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$.
- (b) Ist f integrierbar und $g \sim f$, so ist auch g integrierbar und $I(f) = I(g)$.

Übung 10

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Weiter sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge in $[a, b]$, und es sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\{x \in [a, b] \mid g(x) \neq f(x)\} \subseteq \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass g integrierbar ist, und dass $I(g) = I(f)$.

Übung 11

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

1.2 Darboux-Integral und Jordan-Inhalt

Übung 1

Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $I(f) = c$.
- (b) $\lim_{\delta(p) \rightarrow 0} \sum_p f = c$, d. h., für jede Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Partitionen von $[a, b]$ mit $\lim_n \delta(p_n) = 0$ gilt $\lim_n \sum_{p_n} f = c$.

Übung 2

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist Darboux-integrierbar.
- (b) Für alle $\varepsilon > 0$ existieren Partitionen p und q von $[a, b]$ mit

$$S_p f - s_q f < \varepsilon.$$
- (c) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition p von $[a, b]$ mit

$$S_p f - s_p f < \varepsilon.$$

Übung 3

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass Partitionen p und q von $[a, b]$ existieren mit $s_p f = \sum_p f$ und $S_q f = \sum_q f$.

Übung 4

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie:

$$(a) \quad S(cf) = c S(f) \quad \text{für alle } c \geq 0,$$

$$(b) \quad S(f + g) \leq S f + S g.$$

Geben Sie weiter eine reelle Zahl c und Funktionen $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ an mit $S(cf) \neq c S(f)$ und $S(f + g) \neq S f + S g$.

Übung 5

Finden Sie eine Bedingung für Partitionen p und q von $[a, b]$, sodass für alle beschränkten Funktionen f auf $[a, b]$ gilt:

$$s_p f \leq s_q f \leq S_q f \leq S_p f.$$

Übung 6

Seien $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, p eine Partition von $[a, b]$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $\delta > 0$, sodass für alle δ -Partitionen q von $[a, b]$ gilt:

$$\sum_q f \leq S_p f + \varepsilon.$$

(b) Es existiert eine äquidistante Partition q von $[a, b]$ mit

$$S_q f \leq S_p f + \varepsilon.$$

Übung 7

Für $P \subseteq [a, b]$ ist die Länge $L(P)$ von P im Fall der Existenz durch $L(P) = I(1_P)$ definiert. Zeigen Sie:

(a) $L(P)$ hängt nicht von der Wahl des Intervalls $[a, b] \supseteq P$ ab.

(b) Sei I ein beschränktes reelles Intervall. Dann gilt

$$L(I) = \sup(I) - \inf(I).$$

(c) Seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Intervalle. Dann gilt

$$L(I_1 \cup I_2) = L(I_1) + L(I_2) - L(I_1 \cap I_2).$$

(d) Seien I_1, \dots, I_n paarweise disjunkte und beschränkte reelle Intervalle. Dann gilt

$$L(I_1 \cup \dots \cup I_n) = L(I_1) + \dots + L(I_n).$$

1.3 Integrierbare Funktionen

Übung 1

Zeigen Sie, dass die Treppenfunktionen auf $[a, b]$ genau die Funktionen der Form $\sum_{k \leq n} c_k 1_{A_k}$ mit Intervallen A_k sind.

Übung 2

Seien f und g Treppenfunktionen auf $[a, b]$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass cf , $f + g$ und $f \cdot g$ Treppenfunktionen auf $[a, b]$ sind.

Übung 3

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stützstellen-freien Partitionen von $[a, b]$ mit $\lim_n \delta(p_n) = 0$. Für alle n sei p_{n+1} eine *Verfeinerung* von p_n , d. h., jeder Zerlegungspunkt von p_n ist auch ein Zerlegungspunkt von p_{n+1} . Für alle n seien $g_n = f_{p_n}^s$ und $h_n = f_{p_n}^S$ die unteren bzw. oberen Darboux-Summe von f bzgl. p_n zugeordneten Treppenfunktionen. Zeigen Sie:

- (a) $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend,
- (b) $g \leq f \leq h$, wobei $g = \lim_n g_n$ und $h = \lim_n h_n$,
- (c) g und h sind integrierbar mit $I(g) = I(f) = I(h)$,
- (d) $\{x \in [a, b] \mid g(x) = f(x) = h(x)\} = \{x \in [a, b] \mid f \text{ ist stetig in } x\} \cup T$,
wobei $T = \{t \in [a, b] \mid t \text{ ist ein Zerlegungspunkt eines } p_n\} \cup \{b\}$.

Übung 4

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann definieren wir f_o und f_u auf $[a, b]$ durch:

$$f_o(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} f(y),$$

$$f_u(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} f(y).$$

Vergleichen Sie f_o und f_u mit den in der vorangehenden Übung konstruierten Funktionen g und h . Wann gilt $f_u(x) = f(x) = f_o(x)$?

Übung 5

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie unter Verwendung von Riemann-Summen, dass f integrierbar ist.

[Betrachten Sie eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Partitionen, deren Feinheit gegen Null konvergiert. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Riemann-Summen gegen ein $c \in \mathbb{R}$ konvergieren. Weisen Sie nun die Integrierbarkeitsbedingung für c nach.]

Übung 6

Zeigen Sie, dass für alle $b \geq 1$ gilt: $\int_1^b \frac{1}{x} dx = \log(b)$.

[Die Funktion f mit $f(x) = 1/x$ ist integrierbar auf $[1, b]$. Also ist eine speziell gewählte Partitionsfolge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit gegen Null konvergierender Feinheit zum Beweis der Behauptung geeignet. Betrachten Sie zur Konstruktion einer solchen Folge Zerlegungspunkte und Stützstellen der Form $b^{i/(n+1)}$.]

Übung 7

Seien $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ stetig mit $I(f) = 0$. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Übung 8

Sei $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ integrierbar mit $I(f) = 0$. Weiter sei $c > 0$ und

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq c\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ Intervalle $[c_1, d_1], \dots, [c_n, d_n]$ existieren mit

$$(a) \quad A \subseteq [c_1, d_1] \cup \dots \cup [c_n, d_n],$$

$$(b) \quad \sum_{k \leq n} (d_k - c_k) < \varepsilon.$$

Übung 9

Sei $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, x = m/n, \text{ gekürzt,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

In welchen Punkten ist f stetig? Ist f integrierbar?

Übung 10

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Die Menge

$$E = \{x \in [a, b] \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$$

sei endlich. Zeigen Sie, dass f integrierbar ist.

Übung 11

Zeigen Sie allgemeiner als die vorangehende Übung: Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und die Menge E der Unstetigkeitsstellen von f abzählbar, so ist f integrierbar.

Übung 12

Zeigen Sie, dass es eine stetige (oder stärker sogar differenzierbare) Funktion auf $[0, 1]$ gibt mit $bv(f) = \infty$.

Übung 13

Zeigen Sie, dass für alle $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $c \in \mathbb{R}$ und $x \in [a, b]$ gilt:

- (a) $\text{var}(cf) = |c| \text{var}(f)$, speziell $\text{var}(f) = \text{var}(-f)$,
- (b) $\text{var}(f + g) \leq \text{var}(f) + \text{var}(g)$, $\text{var}(f + c) = \text{var}(f)$,
- (c) $\text{var}(f) \geq |f(b) - f(a)|$, mit Gleichheit, falls f monoton,
- (d) $\text{var}(f) = 0$ genau dann, wenn f ist konstant,
- (e) $\text{var}(f) = \text{var}(f|_{[a, x]}) + \text{var}(f|_{[x, b]})$,
- (f) $\text{var}_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton steigend, $\text{var}_f(a) = 0$, $\text{var}_f(b) = \text{var}(f)$.

Übung 14

Finden Sie Bedingungen, unter denen $\text{var}(f + g) = \text{var}(f) + \text{var}(g)$ gilt.

Übung 15

Betrachten Sie für eine bv-Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Darstellung $f = g - h$ mit $g = \text{var}_f$ und $h = (\text{var}_f - f)$. Welche Eigenschaften hat diese Darstellung? Berechnen Sie $\text{var}(g) + \text{var}(h)$. Vergleichen Sie die Darstellung mit der Jordan-Zerlegung von f .

Übung 16

Sei $f = g - h$ die Jordan-Zerlegung einer bv-Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$g = \text{var}_f^+ + f(a)/2, \quad h = \text{var}_f^- - f(a)/2.$$

Übung 17

Beweisen Sie den Charakterisierungssatz für Regelfunktionen.

Übung 18

Zeigen Sie, dass es eine Regelfunktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die weder stückweise stetig noch monoton ist.

Übung 19

Zeigen Sie, dass die bei der Diskussion der Regelfunktionen betrachtete Zackenfunktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ Riemann-integrierbar, aber keine Regelfunktion ist.

Übung 20

Zeigen Sie, dass es eine integrierbare Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ mit $I(f) = 0$ gibt, die keine Regelfunktion ist.

Übung 21

Zeigen Sie, dass das Regelintegral wohldefiniert ist.

Übung 22

Geben Sie integrierbare Funktionen $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ an derart, dass $g \circ f$ nicht integrierbar ist.

Übung 23

Sei $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ integrierbar und $g : [c, d]$ stetig. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ integrierbar ist.

Übung 24

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist integrierbar.
- (b) f^+ und f^- sind integrierbar.

Zeigen Sie weiter, dass dann $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$.

Übung 25

Sei $A \subseteq [0, 1]$ derart, dass jedes Intervall in $[0, 1]$ positiver Länge sowohl Punkte von A als auch von $B = [0, 1] - A$ enthält. Zeigen Sie, dass 1_A nicht integrierbar ist.

Übung 26

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Ist f^2 integrierbar, so ist f integrierbar.
- (b) Ist f^3 integrierbar, so ist f integrierbar.

Übung 27

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf $[a, b]$, die punktweise monoton steigend gegen f konvergiert. Zeigen Sie, dass $\lim_n I(f_n) = I(f)$.

1.4 Differentiation und Integration

Übung 1

Berechnen Sie $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} dx$ durch Raten einer Stammfunktion.

Übung 2

Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $c, w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$ gilt:

$$\int_a^b c e^{wx} dx = \frac{c}{w} (e^{wb} - e^{wa}).$$

Übung 3

Seien $a, b > 0$, und sei $E(a, b) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1 \}$.

- (a) Skizzieren Sie die Menge $E(a, b)$.
- (b) Berechnen Sie die Fläche von $E(a, b)$ durch Integration und Verwendung der Funktion $F : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = b \left(x \sqrt{1 - (x/a)^2} + a \arcsin(x/a) \right).$$

Übung 4

Zeigen Sie, dass es eine integrierbare Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gibt, sodass für alle $a, b \in [0, 1]$ mit $a < b$ gilt:

$f|_{[a, b]}$ besitzt keine Stammfunktion.

Übung 5

Formulieren und beweisen Sie eine Version des Hauptsatzes I für integrierbare Funktionen, die „stückweise eine Stammfunktion besitzen“ (vgl. die Definition der stückweisen Stetigkeit).

Übung 6

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und f besitze eine Stammfunktion. Zeigen Sie, dass die Integralfunktion von f zu einem Startwert $s \in I$ eine Stammfunktion von f ist.

Übung 7

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Integralfunktion von f zu einem Startwert $s \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass F Lipschitz-stetig ist.

Übung 8

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei $g : J \rightarrow I$ differenzierbar. Weiter sei $s \in I$. Wir definieren $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_s^{g(x)} f \quad \text{für alle } x \in J.$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist mit $F' = (f \circ g) \cdot g'$.

Übung 9

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und seien $g_1, g_2 : J \rightarrow I$ differenzierbar. Weiter sei $s \in I$. Wir definieren $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f \quad \text{für alle } x \in J.$$

Zeigen Sie unter Verwendung der vorangehenden Aufgabe, dass F differenzierbar ist und bestimmen Sie F' .

Übung 10

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g > 0$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in I$ gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) g(t) dt}{\int_x^{x+h} g(t) dt} = f(x).$$

Übung 11

Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

differenzierbar ist, aber F' nicht integrierbar ist. Was zeigt die Funktion im Hinblick auf den Hauptsatz I?

1.5 Anwendungen des Hauptsatzes

Übung 1

Bestimmen Sie $\int_a^b \arcsin(x) dx$ und $\int_a^b \arccos(x) dx$ für $[a, b] \subseteq [-1, 1]$ jeweils durch

- (a) partielle Integration,
- (b) Anwendung der Substitutionsregel.

Übung 2

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) f''(x) dx.$$

Übung 3

Bestimmen Sie:

- (a) $\int \frac{\log(x)}{x} dx,$ (b) $\int \log^2(x) dx,$ (c) $\int \log^3(x) dx,$
- (d) $\int \sqrt{x} \log(x) dx,$ (e) $\int x \log^2(x) dx,$ (f) $\int \frac{\log(\log(x))}{x} dx.$

Übung 4

Bestimmen Sie:

$$(a) \int \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx, \quad (b) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx, \quad (c) \int e^{e^x} e^x dx.$$

Übung 5

Bestimmen Sie:

$$(a) \int x \sqrt{1 - x^2} dx \quad (b) \int \frac{1}{x \sqrt{1 - x^2}} dx \quad (c) \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx.$$

$$(d) \int \sqrt{1 - x^2} dx \quad (e) \int \sqrt{1 + x^2} dx \quad (f) \int \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

Übung 6

$$\text{Bestimmen Sie } \int \sec^3(x) dx = \int \frac{1}{\cos^3(x)} dx$$

mit Hilfe partieller Integration und dem in den Beispielen zur Substitution bestimmten unbestimmten Integral über $1/\cos(x)$.

Übung 7

$$\text{Bestimmen Sie } \int \tan^2(x) dx.$$

[Hinweis: Formen Sie $\tan^2(x)$ in einen Term um, im dem nur der Kosinus als trigonometrische Funktion vorkommt.]

Übung 8

$$\text{Bestimmen Sie } \int \frac{x^2}{x - 1} dx.$$

[Hinweis: Verwenden Sie, dass $x^2 = x^2 - 1 + 1$.]

Übung 9

$$\text{Bestimmen Sie } \int \frac{1}{1 - x^2} dx \text{ ohne Verwendung der hyperbolischen}$$

Funktionen mit Hilfe von Partialbruchzerlegung. Gewinnen Sie hiermit die Logarithmus-Darstellungen von artanh und arcoth unter Verwendung von

$$\frac{d}{dx} \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{für } |x| < 1,$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{für } |x| > 1.$$

Übung 10

Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$n \int \sin^n(x) dx = -\cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int \sin^{n-2}(x) dx,$$

Folgern Sie, dass

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) dx \quad \text{für alle } n \geq 2,$$

und berechnen Sie hiermit die reellen Zahlen

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx \quad \text{für alle } n.$$

Zeigen Sie nun, dass

$$\pi/2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Übung 11

Wir betrachten die folgende alternative Definition von $\log :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$:

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{für alle } x > 0.$$

Beweisen Sie auf der Grundlage dieser Definition:

- (a) $\log'(x) = 1/x$ für alle $x > 0$,
- (b) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ für alle $x, y > 0$,
- (c) $\log(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Übung 12

Zeigen Sie den Satz von Taylor mit Lagrange-Restglied mit Hilfe des Satzes von Taylor mit integralem Restglied.

Übung 13

Zeigen Sie mit Hilfe des Vertauschungssatzes für Ableitungen, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden dürfen:

Ist $\sum_n a_n (x-p)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so ist die Funktion $f :]p-R, p+R[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_n a_n (x-p)^n$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} \quad \text{für alle } x \in]p-R, p+R[.$$

Übung 14

Seien $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_n(x) = n^2 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Zeigen Sie:

- (a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine nichtstetige Funktion.
- (b) $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.

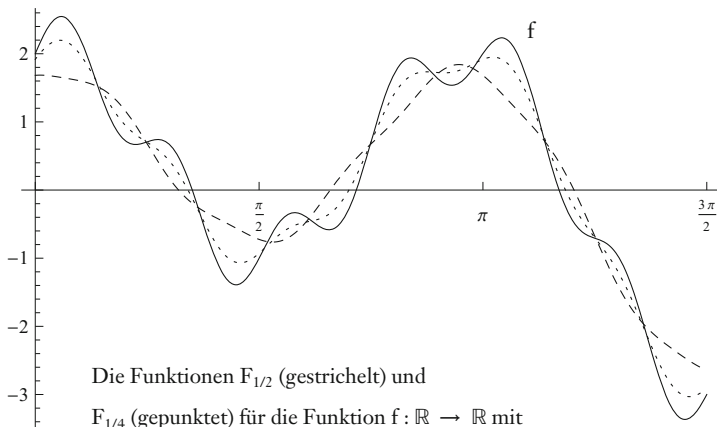
Übung 15

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass f auf jedem Intervall $[a, b]$ integrierbar ist. Weiter sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren $F_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass F_ε stetig ist, und dass für stetige f gilt:

- (a) F_ε ist differenzierbar mit $F'_\varepsilon(x) = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$ für alle x .
- (b) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(x) = f(x)$ für alle x .



Die Funktionen $F_{1/2}$ (gestrichelt) und $F_{1/4}$ (gepunktet) für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x) + 2 \cos(2x) + \sin(8x)/2$ für alle x .

1.6 Uneigentliche Integrale

Übung 1

Geben Sie ein $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ an mit den beiden Eigenschaften:

- (a) f ist uneigentlich Riemann-integrierbar mit endlichem Integral,
- (b) f^+ und f^- sind uneigentlich Riemann-integrierbar mit jeweils unendlichem Integral.

Übung 2

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 1/(1 + x^2)$ für alle x . Berechnen Sie

$$I(f|[-a, a]) = \int_{-a}^a f \quad \text{für alle } a \geq 0.$$

Zeigen Sie weiter, dass $I(f)$ existiert und berechnen Sie es.

Übung 3

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar. Zeigen Sie:

$$(+)\quad I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f|[-n, n]).$$

Zeigen Sie weiter, dass die Gültigkeit von (+) im Allgemeinen nicht die uneigentliche Integrierbarkeit von f impliziert.

Übung 4

Geben Sie ein uneigentlich integrierbares $f: [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $I(f) = 0$ an derart, dass $I(f^+) = I(f^-) = \infty$.

Übung 5

Geben Sie ein uneigentlich integrierbares $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty[$ an derart, dass f^2 nicht uneigentlich integrierbar ist.

Übung 6

Definieren Sie eine Erweiterung des uneigentlichen Integrals, das auch gewisse Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrieren kann, die nicht auf allen kompakten Teilintervallen ihres Definitionsbereichs beschränkt sind.

Übung 7

Beweisen Sie die Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum_{n \geq 2} 1/(n \log(n))$ mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Übung 8

Schätzen Sie $\sum_{n \geq 1} 1/n^2 - \sum_{1 \leq k \leq 10^3} 1/k^2$ mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums ab.

2.1 Lineare Punktmengen

Übung 1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Wir definieren für $x, y \in U$:

$$x \sim y, \text{ falls } [\min(x, y), \max(x, y)] \subseteq U.$$

Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf U ist und dass jede Äquivalenzklasse x/\sim ein offenes Intervall ist.

Übung 2

Zeigen Sie:

$$(a) \operatorname{int}([0, 1]) =]0, 1[,$$

$$(b) \operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \operatorname{int}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset.$$

Übung 3

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$(a) \operatorname{int}(P) = \bigcup \{ U \subseteq P \mid U \text{ offen} \},$$

$$(b) \operatorname{int}(P) \text{ ist offen und für alle offenen } V \subseteq P \text{ gilt } V \subseteq \operatorname{int}(P).$$

Übung 4

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$ offen und abgeschlossen. Zeigen Sie, dass $P = \emptyset$ oder $P = \mathbb{R}$.

Übung 5

Zeigen oder widerlegen Sie, dass für alle $P, Q \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$(a) P \subseteq Q \text{ impliziert } P' \subseteq Q',$$

$$(b) (P \cup Q)' = P' \cup Q',$$

$$(c) (P \cap Q)' = P' \cap Q'.$$

$$(d) (P')' = P'.$$

Übung 6

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass P' abgeschlossen ist.

Übung 7

Zeigen Sie, dass für alle n abgeschlossene $P_0, \dots, P_n \subseteq \mathbb{R}$ existieren mit

$$(a) P_{k+1} = P_k' \text{ für alle } k < n.$$

$$(b) P_k \neq \emptyset \text{ für alle } k < n, P_n = \emptyset.$$

Übung 8

Seien $P \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $x \in \text{cl}(P)$.
- (b) $\inf \{ |p - x| \mid p \in P \} = 0$.
- (c) Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P mit $x = \lim_n x_n$.

Übung 9

Zeigen Sie, dass für alle $P \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\text{int}(P) = \mathbb{R} - \text{cl}(\mathbb{R} - P)$,
- (b) $\text{cl}(P) = \mathbb{R} - \text{int}(\mathbb{R} - P)$,
- (c) $\text{bd}(P) = \text{cl}(P) - \text{int}(P) = \text{bd}(\mathbb{R} - P)$.

Übung 10

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) U ist dicht in \mathbb{R} .
- (b) $\text{int}(\mathbb{R} - U) = \emptyset$.

Übung 11

Eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt *regulär offen*, falls $\text{int}(\text{cl}(U)) = U$. Geben Sie Beispiele für offene Mengen, die regulär offen sind bzw. nicht regulär offen sind. Welche Abgeschlossenheitseigenschaften besitzen die regulär offenen Mengen?

Übung 12

Ein $P \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht-kodicht*, falls P und $\mathbb{R} - P$ dicht in \mathbb{R} sind. Geben Sie Beispiele für derartige Mengen. Was gilt für $\text{int}(P)$, $\text{cl}(P)$, $\text{bd}(P)$, wenn P dicht-kodicht ist?

Übung 13

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$. Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt *Kondensationspunkt* von P , falls für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $U_\varepsilon(x) \cap P$ überabzählbar ist. Zeigen Sie:

- (a) Ist P überabzählbar, so gibt es einen Kondensationspunkt x von P mit $x \in P$.
- (b) $P^* = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist ein Kondensationspunkt von } P \}$ ist perfekt.

Übung 14

Eine Menge P heißt *in sich dicht*, falls $P \subseteq P'$. Geben Sie Beispiele für in sich dichte Mengen. Welche Abgeschlossenheitseigenschaften erfüllen die in sich dichten Mengen?

Übung 15

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$, und sei $P^* = \bigcup \{ X \subseteq P \mid X \text{ ist in sich dicht} \}$. Zeigen Sie, dass P^* perfekt ist.

Übung 16

Zeigen Sie:

- (a) Jede offene und jede abgeschlossene Menge ist sowohl eine G_δ -Menge als auch eine F_σ -Menge.
- (b) Ist P eine G_δ -Menge, so ist $\mathbb{R} - P$ eine F_σ -Menge.
Ist Q eine F_σ -Menge, so ist $\mathbb{R} - Q$ eine G_δ -Menge.
- (c) Sind $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ G_δ -Mengen, so ist $\bigcap_n P_n$ eine G_δ -Menge.
Sind $Q_0, Q_1, \dots, Q_n, \dots$ F_σ -Mengen, so ist $\bigcup_n Q_n$ eine F_σ -Menge.
- (d) Sind P_0, \dots, P_n G_δ -Mengen, so ist $\bigcup_{i \leq n} P_i$ eine G_δ -Menge.
Sind Q_0, \dots, Q_n F_σ -Mengen, so ist $\bigcap_{i \leq n} P_i$ eine F_σ -Menge.

Übung 17

Zeigen Sie, dass die Vereinigung endlich vieler nirgends dichter Mengen nirgends dicht ist.

2.2 Topologische Formulierungen der Stetigkeit

Übung 1

- (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass genau die Mengen \emptyset und $[a, b]$ offen und zugleich abgeschlossen in $[a, b]$ sind.
- (b) Sei $P = [0, 1] \cup [2, 3]$. Bestimmen Sie alle Teilmengen von P , die zugleich offen und abgeschlossen in P sind.

Übung 2

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist stetig.
- (b) Für alle abgeschlossenen $A \subseteq \mathbb{R}$ ist $f^{-1}[A]$ abgeschlossen.

Übung 3

Seien $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f[P] \subseteq Q$. Zeigen Sie mit Hilfe der topologischen Relativbegriffe, dass $g \circ f$ stetig ist.
Formulieren und beweisen Sie weiter eine punktweise Version des Verknüpfungssatzes.

Übung 4

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei c eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Zeigen Sie unter Verwendung der topologischen Relativbegriffe, dass ein $x \in [a, b]$ existiert mit $f(x) = c$.

Übung 5

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist stetig.
- (b) $f[\text{cl}(P)] \subseteq \text{cl}(f[P])$ für alle $P \subseteq \mathbb{R}$.
- (c) $\text{cl}(f^{-1}[Q]) \subseteq f^{-1}[\text{cl}(Q)]$ für alle $Q \subseteq \mathbb{R}$.

Übung 6

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p \in P$. Welche Implikationen gelten zwischen den folgenden Aussagen und der Stetigkeit von f in p ?

- (a) Für alle $X \subseteq P$ gilt: $p \in \text{int}(X)$ impliziert $f(p) \in \text{int}(f[X])$.
- (b) Für alle $X \subseteq P$ gilt: $p \in \text{int}(X)$ impliziert $f(p) \in \text{cl}(f[X])$.
- (c) Für alle $X \subseteq P$ gilt: $p \in \text{cl}(X)$ impliziert $f(p) \in \text{bd}(f[X])$.
- (d) Für alle $X \subseteq P$ gilt: $p \in \text{bd}(X)$ impliziert $f(p) \in \text{bd}(f[X])$.
- (e) Für alle $X \subseteq P$ gilt: $p \in \text{bd}(X)$ impliziert $f(p) \in \text{cl}(f[X])$.

Übung 7

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$ eine G_d -Menge. Konstruieren Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig in } x\}.$$

[Hinweis: Sei $Q = \mathbb{R} - P = \bigcup_n A_n$ mit abgeschlossenen $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$. Wir setzen $f(x) = \pm 1/n$ für $x \in Q$, wobei n minimal ist mit $x \in A_n$ und das Vorzeichen von $f(x)$ gemäß „ $x \in D$ “ oder „ $x \notin D$ “ festgelegt wird, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass D und $\mathbb{R} - D$ dicht in \mathbb{R} sind (z. B. $D = \mathbb{Q}$). Weiter sei $f(x) = 0$ für $x \in P$.]

Übung 8

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es F_σ -Mengen $F_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k}$ gibt mit

$$\{p \in \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar in } p\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k}.$$

2.3 Metrische Räume

Übung 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für alle $x, y \in X$ seien

$$d_1(x, y) = \min(1, d(x, y)), \quad d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass d_1 und d_2 Metriken auf X sind.
- (b) Skizzieren Sie für $X = \mathbb{R}^2$ und $U_\varepsilon^d(0) = \{x \in X \mid d(x, 0) < \varepsilon\}$ die Mengen
 $U_{1/2}^{d_1}(0), U_2^{d_2}(0), U_{1/2}^{d_2}(0), U_{3/4}^{d_2}(0).$

Übung 2

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton steigend. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist. Welche Eigenschaften gelten und welche sind verletzt, wenn f monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend ist?

Übung 3

Seien $V = \mathbb{C}^n$ und $p \geq 1$. Zeigen Sie mit Hilfe der Hölder-Ungleichung die Dreiecksungleichung für die p -Norm auf V .

Übung 4

Zeigen Sie, dass für alle $p, q, r \in [1, \infty]$ gilt:

$$(a) \quad \|A\|_{p,q} = \sup \{ \|Ax\|_q \mid \|x\|_p = 1 \} = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p} \mid x \neq 0 \right\},$$

$$(b) \quad \|Ax\|_q \leq \|A\|_{p,q} \|x\|_p,$$

$$(c) \quad \|AB\|_{p,q} \leq \|A\|_{r,q} \|B\|_{p,r} \quad (A \text{ } (m \times d)\text{-Matrix, } B \text{ } (d \times n)\text{-Matrix}).$$

Übung 5

Zeigen Sie, dass für jede $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ gilt:

$$(a) \quad \|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|, \quad (\text{Maximumsnorm})$$

$$(b) \quad \|A\|_{1,1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq m} |a_{ij}|, \quad (\text{Spaltensummennorm})$$

$$(c) \quad \|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|. \quad (\text{Zeilensummennorm})$$

Übung 6

Sei (X, d) ein semimetrischer Raum. Für alle $x, y \in X$ setzen wir

$$x \sim y, \text{ falls } d(x, y) = 0.$$

Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf X ist. Zeigen Sie weiter, dass die Funktion $d' : X/\sim^2 \rightarrow [0, \infty[$ mit

$$d'(x/\sim, y/\sim) = d(x, y) \text{ für alle } x, y \in X$$

wohldefiniert und (X, d') ein metrischer Raum ist.

Übung 7

Zeigen oder widerlegen Sie, dass in allen metrischen Räumen (X, d) für alle $x, y \in X$ und alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gilt:

- (a) Gilt $x = \lim_n x_n$, so gilt $\lim_n d(x_n, x) = 0$.
- (b) Gilt $\lim_n d(x_n, x) = 0$, so gilt $x = \lim_n x_n$.
- (c) Gilt $x = \lim_n x_n$, so gilt $d(x, y) = \lim_n d(x_n, y)$.
- (d) Gilt $d(x, y) = \lim_n d(x_n, y)$, so gilt $x = \lim_n x_n$.

Übung 8

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in X , und seien $x = \lim_n x_n$ und $y = \lim_n y_n$. Zeigen Sie:

$$d(x, y) = \lim_n d(x_n, y_n).$$

Übung 9

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Cauchy-Folge in X . Zeigen Sie, dass $\text{diam} \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \} < \infty$.

Übung 10

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X . Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Übung 11

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge in X . Für alle n sei $T_n = \{ x_k \mid k \geq n \}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.
- (b) $\lim_n \text{diam}(T_n) = 0$.

Übung 12

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $D \subseteq X$ dicht in. Jede Cauchy-Folge mit Gliedern in D konvergiere in (X, d) . Zeigen Sie, dass (X, d) vollständig ist.

Übung 13

Sei $h : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ *abstandserhaltend*, d.h., es gilt

$$e(h(x), h(y)) = d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Zeigen Sie durch Nachweis der Definitionen:

- (a) h ist limesstetig.
- (b) h ist ε - δ -stetig.

Finden Sie weiter eine natürliche Abschwächung von „abstandserhaltend“, die immer noch die Stetigkeit impliziert.

Übung 14

Sei $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$, und sei $p \in X$. Zeigen Sie, dass f genau dann limesstetig in p ist, wenn f ε - δ -stetig in p ist.

Übung 15

Seien $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ und $p \in X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist stetig im Punkt p .
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \operatorname{diam} \{ f(x) \mid x \in X, d(x, p) < \delta \} < \varepsilon$.

Übung 16

Seien $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ und $g : (X_2, d_2) \rightarrow (X_3, d_3)$ stetig. Zeigen Sie, dass $h = g \circ f$ stetig ist.

Übung 17

Sei $K = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1 \}$, und sei $f : [0, 2\pi[\rightarrow K$ definiert durch $f(x) = e^{ix}$ für alle $x \in [0, 2\pi[$.

Weiter sei $g = f^{-1}$. Untersuchen Sie g auf Stetigkeitseigenschaften (unter der euklidischen Metrik auf $[0, 2\pi[$ und K).

Übung 18

Seien $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ metrische Räume, und sei

$$X = X_1 \times \dots \times X_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in X_k \text{ für alle } 1 \leq k \leq n \}.$$

Für alle $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ sei

$$d(x, y) = \max \{ d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n) \}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist.
- (b) Präzisieren Sie die Aussage:

„Die Konvergenz in (X, d) ist die koordinatenweise Konvergenz.“

Beweisen Sie Ihre Präzisierung.

Übung 19

Seien (X_n, d_n) metrische Räume für alle n . Wir setzen

$$X = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in X_n \text{ für alle } n \},$$

$$d_{\text{sup}}(x, y) = \sup_n 1/2^{n+1} d_n(x_n, y_n)/(1 + d_n(x_n, y_n)),$$

$$d_{\sigma}(x, y) = \sum_n 1/2^{n+1} d_n(x_n, y_n)/(1 + d_n(x_n, y_n))$$

für alle $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X . Zeigen Sie, dass d_{sup} und d_{σ} Metriken auf X sind und dass die Konvergenz in (X, d_{sup}) und (X, d_{σ}) die koordinatenweise Konvergenz ist.

2.4 Topologie metrischer Räume

Übung 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

- (a) Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es eine Umgebung U von x und eine Umgebung V von y mit $U \cap V = \emptyset$.
- (b) Für alle $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen.

Übung 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für alle abgeschlossenen $A, B \subseteq V$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt: Es gibt offene Mengen $U \supseteq A$ und $V \supseteq B$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Übung 3

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $x \in X$ konvergente Folge in X , die nicht schließlich konstant ist. Zeigen Sie, dass x ein Häufungspunkt von $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist.

Übung 4

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Weiter seien $P \subseteq X$ und $p \in P'$. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $P - \{p\}$ mit $\lim_n x_n = p$.
- (b) Für alle Umgebungen U von p ist $U \cap P$ unendlich.

Übung 5

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $Y \subseteq X$. Zeigen Sie, dass für alle $V \subseteq Y$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) V ist eine offene Menge in $(Y, d|_Y)$.
- (b) Es gibt ein in (X, d) offenes U mit $V = U \cap Y$.

Übung 6

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $Y \subseteq X$. Wir schreiben $\text{cl}_X(P)$ für den Abschluss einer Menge $P \subseteq X$ in (X, d) und $\text{cl}_Y(P)$ für den Abschluss einer Menge $P \subseteq Y$. Analoges gilt für das Innere und den Rand.

Zeigen Sie, dass für alle $P \subseteq Y$ gilt:

- (a) $\text{cl}_Y(P) = \text{cl}_X(P) \cap Y$,
- (b) $\text{int}_Y(P) \supseteq \text{int}_X(P) \cap Y$,
- (c) $\text{bd}_Y(P) \subseteq \text{bd}_X(P) \cap Y$.

Geben Sie weiter Gegenbeispiele für die anderen Inklusionen in (b), (c) an.

Übung 7

Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrische Räume, und sei d die Maximumsmetrik auf $X = X_1 \times X_2$. Zeigen Sie, dass für alle $P_1 \subseteq X_1$ und $P_2 \subseteq X_2$ gilt:

- (a) $\text{cl}(P_1 \times P_2) = \text{cl}(P_1) \times \text{cl}(P_2)$,
- (b) $\text{int}(P_1 \times P_2) = \text{int}(P_1) \times \text{int}(P_2)$,
- (c) $\text{bd}(P_1 \times P_2) = (\text{bd}(P_1) \times \text{cl}(P_2)) \cup (\text{cl}(P_1) \times \text{bd}(P_2))$.

Übung 8

Beweisen Sie (in Anlehnung an den Beweis für \mathbb{R}) den Baireschen Kategoriensatz für vollständige metrische Räume.

Übung 9

Konstruieren Sie ein Analogon zur Cantor-Menge in der Ebene. Welche charakteristischen Eigenschaften hat diese Menge?

Übung 10

Sei $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ stetig und bijektiv, und sei $D \subseteq X$ dicht in X . Zeigen Sie, dass $f[D]$ dicht in Y ist.

Übung 11

Sei $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \geq 1\}$. Zeigen Sie (unter der euklidischen Topologie auf A und \mathbb{N}):

- (a) Es gibt eine stetige Bijektion $f: \mathbb{N} \rightarrow A$.
- (b) Es gibt keine stetige Bijektion $f: A \rightarrow \mathbb{N}$.

Übung 12

Sei X eine Menge, und sei d die diskrete Metrik auf X . Bestimmen Sie alle Teilmengen von X , die zugleich offen und abgeschlossen sind. Bestimmen Sie weiter alle stetigen Funktionen $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$, mit einem beliebigen metrischen Raum (Y, e) .

Übung 13

Seien d und e topologisch äquivalente Metriken auf X , und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Zeigen Sie, dass die Folge in (X, d) genau dann konvergiert, wenn sie in (X, e) konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass im Fall der Konvergenz die Grenzwerte übereinstimmen.

Übung 14

Seien d und e numerisch äquivalente Metriken auf X . Zeigen Sie:

- (a) Die Metriken d und e sind topologisch äquivalent.
- (b) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X ist genau dann eine Cauchy-Folge in (X, d) , wenn sie eine Cauchy-Folge in (X, e) ist.
- (c) (X, d) ist genau dann vollständig, wenn (X, e) vollständig ist.

Übung 15

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei

$$r(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Wir definieren für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$d(x, y) = |r(x) - r(y)|.$$

Zeigen Sie:

- (a) d ist eine unvollständige beschränkte Metrik auf \mathbb{R} .
- (b) d und die euklidische Metrik auf \mathbb{R} sind topologisch, aber nicht numerisch äquivalent.

Übung 16

Zeigen Sie, dass zwei Normen auf einem \mathbb{R} oder \mathbb{C} -Vektorraum V genau dann topologisch äquivalent sind, wenn sie numerisch äquivalent sind.

Übung 17

Sei $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ surjektiv und stetig, und sei (X, d) wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass (Y, e) wegzusammenhängend ist.

Übung 18

Sei (X, d) wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass (X, d) zusammenhängend ist.

Übung 19

Zeigen Sie, dass der aus der Zackenlinie und dem Punkt p^* bestehende Raum $X \subseteq \mathbb{R}^2$ (vgl. das Diagramm im Text) unter der euklidischen Metrik topologisch zusammenhängend ist.

Übung 20

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangsrelationen \sim und \sim_c Äquivalenzrelationen auf X sind. Zeigen Sie weiter, dass jede Wegzusammenhangskomponente eine Teilmenge einer Zusammenhangskomponente ist.

Übung 21

Zeigen Sie, dass für ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ äquivalent sind:

- (a) U ist zusammenhängend.
- (b) U ist wegzusammenhängend.
- (c) Je zwei Punkte in U können durch Streckenzüge verbunden werden, d. h., für alle $x, y \in U$ gibt es $x_1, \dots, x_n \in U$ mit $x = x_0, y = x_k$ derart, dass $\{x_k + t(x_{k+1} - x_k) \mid t \in [0, 1]\} \subseteq U$ für alle $1 \leq k < n$.

Übung 22

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass unter der euklidischen Metrik äquivalent sind:

- (a) X ist zusammenhängend.
- (b) X ist wegzusammenhängend.
- (c) X ist ein Intervall.

Übung 23

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ unter der euklidischen Topologie wegzusammenhängend ist. Können Sie ein allgemeineres Ergebnis formulieren?

[Betrachten Sie zum Beispiel Kreisbögen zwischen zwei Punkten.]

Übung 24

Sei $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{I}^2$ unter der euklidischen Topologie wegzusammenhängend ist.

[Betrachten Sie endlich und unendlich viele zusammengesetzte Geradenstücke mit einer rationalen von Null verschiedenen Steigung.]

Übung 25

Sei $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Q}^2, \mathbb{I}^2, (\mathbb{Q} \times \mathbb{I}) \cup (\mathbb{I} \times \mathbb{Q})$$

unter der euklidischen Topologie unzusammenhängend sind.

Übung 26

Sei $K = \{(x, y) \mid |(x, y)| = 1\}$, und sei $X \subseteq \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie durch ein Zusammenhangsargument, dass es unter den euklidischen Metriken auf K und X keine stetige Bijektion $f: K \rightarrow X$ gibt.

Übung 27

Zeigen Sie, dass die Menge aller offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten eine Basis von \mathbb{R} unter der euklidischen Topologie bildet.

Übung 28

Sei (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum, der eine abzählbare Basis besitzt. Zeigen Sie, dass es höchstens \mathbb{R} -viele offene und höchstens \mathbb{R} -viele abgeschlossene Teilmengen von X gibt.

[Verwenden Sie, dass $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.]

Übung 29

Sei X eine Menge, und sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Weiter seien

$$\mathcal{B} = \{X\} \cup \{S_1 \cap \dots \cap S_n \mid S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}\},$$

$$\mathcal{U} = \{\bigcup \mathcal{V} \mid \mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) \mathcal{U} ist eine Topologie auf X mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ und Basis \mathcal{B} .
- (b) Ist \mathcal{T} eine Topologie auf X mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, so ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$.

Übung 30

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass äquivalent sind:

- (a) $f: (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\downarrow}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\text{euk}})$ ist stetig in p .
- (b) $\lim_{x \downarrow p} f(x) = f(p)$ (unter der euklidischen Metrik).

Übung 31

Was bedeutet die Stetigkeit in einem Punkt $p \in \mathbb{R}$ für

- (a) $f: (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\text{euk}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\downarrow})$,
- (b) $f: (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\downarrow}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\downarrow})$?

[Warnung: Die Stetigkeit für (b) lässt sich nicht mit einer einfachen Monotonie-Eigenschaft ausdrücken.]

Übung 32

Sei X eine Menge, und sei $I: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Für alle $A, B \subseteq X$ gelte:

- (a) $I(A) \subseteq A$, (b) $I(I(A)) = A$,
- (c) $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$, (d) $I(X) = X$.

Sei $\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid I(U) = U\}$. Zeigen Sie, dass (X, \mathcal{U}) ein topologischer Raum ist, und dass $\text{int}(A) = I(A)$ für alle $A \subseteq X$ gilt.

2.5 Kompaktheit in \mathbb{R}

Übung 1

Zeigen oder widerlegen Sie:

Ist $\varepsilon_q > 0$ für alle $q \in \mathbb{Q}$, so ist $\{ U_{\varepsilon_q}(q) \mid q \in \mathbb{Q} \}$ eine Überdeckung von \mathbb{R} .

Übung 2

Zeigen Sie:

- (a) Sind $C_1, \dots, C_n \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, so ist $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$ kompakt.
- (b) Jede endliche Teilmenge von \mathbb{R} ist kompakt.

Übung 3

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie die Kompaktheit von $[a, b]$ mit Hilfe der Prinzips der Intervallschachtelung.

[Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von $[a, b]$. *Annahme*, \mathcal{U} ist nicht endlich reduzierbar. Iterierte Halbierung von Intervallen liefert geschachtelte Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ derart, dass \mathcal{U} für alle n keine endlich reduzierbare Überdeckung von I_n ist. Sei $\bigcap_n I_n = \{p\}$. Ein $U \in \mathcal{U}$ mit $p \in U$ liefert einen Widerspruch.]

Übung 4

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit

$f(x) < x$ und $g(x) > x$ für alle $x \in [a, b]$.

Zeigen Sie, dass $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ in $[a, b]$ existieren mit

$[a, b] \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq n} [f(x_k), g(x_k)]$.

Übung 5

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Beweisen Sie die Kompaktheit von $[a, b]$ mit Hilfe der Aussage der vorangehenden Übung.

Übung 6

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$, und sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von P . Zeigen Sie, dass \mathcal{U} abzählbar reduzierbar bzgl. P ist, d. h., es gibt ein abzählbares $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, das P überdeckt.

Übung 7

Beweisen Sie den Satz von Dini (vgl. Kapitel 3.6 in Band 1) mit Hilfe eines topologischen Kompaktheitsarguments.

2.6 Kompaktheit in metrischen Räumen

Übung 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $P \subseteq X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) P ist kompakt.
- (b) Jede offene Überdeckung $\mathcal{U} \subseteq \{ U_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0 \}$ von P ist endlich reduzierbar.

Übung 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $C \subseteq X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) C ist kompakt in (X, d) .
- (b) Der Teilraum (C, d) ist kompakt.

Übung 3

Sei X eine Menge, und sei d die diskrete Metrik auf X . Bestimmen Sie die kompakten Teilmengen von X .

Übung 4

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und seien $A, B \subseteq X$ kompakt und nichtleer. Zeigen Sie:

- (a) $\text{diam}(A) < \infty$.
- (b) Es gibt $x, y \in A$ mit $\text{diam}(A) = d(x, y)$.
- (c) Es gibt $x \in A$ und $y \in B$ mit $d(A, B) = d(x, y)$.

Übung 5

Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, und sei d die Maximumsmetrik auf $X = X_1 \times X_2$. Weiter seien $C \subseteq X_1$ und $D \subseteq X_2$ kompakt. Zeigen Sie, dass $C \times D$ kompakt in (X, d) ist.

Übung 6

Sei $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $[a, b]^n$ kompakt in \mathbb{R}^n unter der euklidischen Metrik ist.

Übung 7

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Jede offene Überdeckung \mathcal{U} von X sei abzählbar reduzierbar, d.h., es gibt ein abzählbares $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ mit $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Zeigen Sie, dass (X, d) separabel ist.

Übung 8

Zeigen Sie, dass jede beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} total beschränkt ist.

Übung 9

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $P \subseteq X$ total beschränkt. Zeigen Sie, dass $\text{cl}(P)$ total beschränkt ist.

Übung 10

Sei V der Vektorraum aller beschränkten Folgen in \mathbb{R} , und sei d die von der Supremumsnorm auf V induzierte Metrik, d. h., es gilt

$$d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_n |x_n - y_n| \quad \text{für alle } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V.$$

Weiter sei K abgeschlossene Einheitskugel K in V , also

$$K = \text{cl}(U_1(0)) = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V \mid \sup_n |x_n| \leq 1 \}.$$

Zeigen Sie:

- (a) K ist nicht kompakt.
- (b) (K, d) ist vollständig, aber nicht total beschränkt.

Übung 11

Sei (X, d) ein unvollständiger metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine abgeschlossene und beschränkte Menge existiert, die nicht kompakt ist.

Übung 12

Sei $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ stetig mit (X, d) kompakt. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Für alle abgeschlossenen $A \subseteq X$ ist $f[A]$ abgeschlossen.
- (b) Für alle offenen $U \subseteq X$ ist $f[U]$ offen.

Übung 13

Sei X eine Menge, und sei

$$\mathcal{U} = \{ \emptyset \} \cup \{ U \subseteq X \mid X - U \text{ ist endlich} \}$$

die koendliche Topologie auf X . Zeigen Sie, dass (X, \mathcal{U}) ein kompakter topologischer Raum ist.

Übung 14

Sei X eine Menge, und sei

$$\mathcal{U} = \{ \emptyset \} \cup \{ U \subseteq X \mid X - U \text{ ist abzählbar} \}$$

die koabzählbare Topologie auf X . Zeigen Sie, dass jede offene Überdeckung \mathcal{U} von X eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt. Bestimmen Sie weiter die kompakten Teilmengen von X .

3.1 Kurven

Übung 1

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$, und sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie, dass die Projektionen $\text{pr}_i(f): P \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, stetig sind.

Übung 2

Sei $E_{a,b}$ die Ellipse im \mathbb{R}^2 mit dem Mittelpunkt 0 und den Hauptachsen a und b . Geben Sie eine Kurve $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, die die Spur $E_{a,b}$ besitzt.

Übung 3

Sei $k \geq 2$. Geben Sie eine Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, die eine Spiralbewegung gegen den Uhrzeigersinn beschreibt und durch die Punkte $(1, 0), (2, 0), \dots, (k, 0)$ verläuft.

Übung 4

Sei $n \geq 1$. Geben Sie eine geschlossene Kurve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ an, die eine gleichmäßige Spiralbewegung mit n Umläufen (bzgl. r_1) auf dem Torus

$$T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (r_2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r_1^2 = 0 \}$$

mit den Radien r_1 und r_2 beschreibt.

Übung 5

Seien $c, w \in \mathbb{R}$, und seien $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(t) = e^{2\pi i c t}, \quad g(t) = 2t e^{i w} \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c und w die Schnittpunkte und Schnittwinkel der beiden Kurven.

Übung 6

Betrachten Sie den Beweis des Satzes, dass es keine stetige Bijektion $g: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ gibt. Wo scheitert das Argument, wenn g lediglich als stetig und surjektiv vorausgesetzt wird? Geben Sie zudem eine stetige Surjektion von $[0, 1]^2$ nach $[0, 1]$ an.

Übung 7

Zeigen Sie, dass die Konstruktion einer Peano-Kurve nach Hilbert eine stetige Surjektion von $[0, 1]$ nach $[0, 1]^2$ definiert.

Übung 8

Zeigen Sie, dass die Konstruktion einer Peano-Kurve mit Hilfe der Cantor-Menge eine stetige Surjektion von $[0, 1]$ nach $[0, 1]^2$ definiert. Berechnen Sie einige Werte der Surjektion und skizzieren Sie die lineare Interpolation für einige Drittelintervalle.

3.2 Rektifizierbare Kurven

Übung 1

Sei $n \geq 1$, und sei $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine euklidische Isometrie, d. h., es gilt $d(h(x), h(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und die euklidische Metrik d . Weiter sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve. Zeigen Sie, dass $g = h \circ f$ eine rektifizierbare Kurve ist und dass $L(g) = L(f)$.

Übung 2

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ derart, dass die zugeordnete Kurve $g_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g_f(t) = (t, f(t))$ für alle $t \in [a, b]$ rektifizierbar ist und dass die Umkehrfunktion $h = f^{-1}$ existiert. Zeigen Sie, dass die h zugeordnete Kurve g_h rektifizierbar ist und dass $L(g_f) = L(h_f)$.

Übung 3

Zeigen Sie, dass die Länge einer rektifizierbaren Kurve nicht von ihrer Parametrisierung abhängt.

Übung 4

Zeigen Sie, dass die Länge einer fast injektiven rektifizierbaren Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ nur von ihrer Spur abhängt, d. h., ist $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ fast injektiv und ist $\text{Bild}(f) = \text{Bild}(g)$, so ist $L(f) = L(g)$.

Übung 5

Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Kurven. Sei $h : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $h(t) = f(t)$ für $t \in [a, b]$ und $h(t) = g(t)$ für $t \in [b, c]$. Zeigen Sie, dass h genau dann rektifizierbar ist, wenn f und g rektifizierbar sind, und dass dann $L(h) = L(f) + L(g)$.

Übung 6

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve. Weiter seien $s \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$g(t) = s f(t) - v \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Zeigen Sie, dass g rektifizierbar ist mit $L(g) = |s| L(f)$.

Übung 7

Sei $a > 0$, und sei $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve derart, dass $f|_{[0, a]}$ rektifizierbar ist. Für alle $1 \leq i \leq n$ gebe es ein $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, sodass gilt:

$$f(-t)_i = \sigma_i f(t)_i \quad \text{für alle } t \in [-a, a].$$

Zeigen Sie, dass f rektifizierbar ist und dass $L(f) = 2 L(f|_{[0, a]})$.

Übung 8

Geben Sie eine stetige Funktion $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ an, sodass für den parametrisierten Graphen

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (t, g(t)) \quad \text{für alle } t \in [0, 1],$$

der Funktion gilt:

- (a) $f|_{[0, b]}$ ist rektifizierbar für alle $b < 1$,
- (b) f ist nicht rektifizierbar.

Übung 9

Zeigen Sie mit Hilfe des Berechnungssatzes für stetig differenzierbare Kurven und der Kettenregel die Invarianz der Länge einer Kurve unter einer stetig differenzierbaren Parametertransformation.

Übung 10

Sei $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Weiter sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(t) = e^{(c+i)t} \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

- (a) Skizzieren Sie f für $c = 2\pi$, $a = -2\pi$, $b = 2\pi$.
- (b) Berechnen Sie $L(f)$.

Übung 11

Die *Neilsche Parabel* $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist definiert durch

$$f(t) = (t^2, t^3) \quad \text{für alle } t \in [-a, a].$$

Skizzieren Sie f und berechnen Sie $L(f)$.

Übung 12

Berechnen Sie, für $0 < a < b$, die Länge des Graphen der Wurzelfunktion auf $[a, b]$. Existiert die Länge auch für $a = 0$ und $b > 0$?

Übung 13

Berechnen Sie, für $0 < a < b$, die Länge des Graphen der Logarithmusfunktion \log auf $[a, b]$.

Übung 14

Seien $0 < a < b$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b \sqrt{1 + 1/x^2} \, dx = \int_{\log(a)}^{\log(b)} \sqrt{1 + e^{2x}} \, dx.$$

Wie lässt sich diese Identität im Hinblick auf Kurven interpretieren?

Übung 15

Begründen Sie die analytische Darstellung

$$f(t) = e^{-i(t + \pi/2)} + (t, 1) = -i e^{-it} + (t, 1) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

der Zykloide $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Übung 16

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir markieren den Punkt $(0, 1 - \alpha) \in \mathbb{R}^2$ und verbinden ihn fest mit dem Mittelpunkt $(0, 1)$ des auf dem Nullpunkt aufliegenden Einheitskreises. Nun rollen wir den Kreis entlang der x -Achse gleichmäßig ab. Dabei beschreibt der markierte Punkt eine Kurve $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$. (Die Zykloide entspricht dem Fall $\alpha = 1$.)

- (a) Skizzieren Sie die Bahn von f für $\alpha = 1/2$ und $\alpha = 3/2$.
- (b) Geben Sie eine analytische Darstellung der Kurve f .

Übung 17

Zeigen Sie, dass das folgende Analogon zum Mittelwertsatz bereits für Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ im Allgemeinen nicht gilt:

$$\text{Es gibt ein } p \in [a, b] \text{ mit } f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Übung 18

Wir definieren ein zweidimensionales Vektorfeld $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$g(x, y) = (y, x - y).$$

- (a) Skizzieren Sie g .
- (b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale zweiter Art für einige Kurven von $[0, 0]$ nach $[1, 1]$ Ihrer Wahl. Was stellen Sie fest?

3.3 Mehrdimensionale Differenzierbarkeit

Übung 1

Leiten Sie aus der Definition der totalen Differenzierbarkeit ab, dass die Ableitung einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ in einem Punkt $p \in P$ im Fall der Existenz eindeutig bestimmt ist.

Übung 2

Seien A eine $(m \times n)$ -Matrix und $v \in \mathbb{R}^m$. Wir definieren $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $f(x) = Ax + v$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und bestimmen Sie $J_f(p)$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$.

Übung 3

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$, und sei $p \in P$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist differenzierbar in p .
- (b) Alle Komponenten f_1, \dots, f_m von f sind differenzierbar in p .

Zeigen Sie weiter, dass in diesem Fall die Matrizen $J_{f_1}(p), \dots, J_{f_m}(p)$ die Zeilen der Matrix $J_f(p)$ sind.

Übung 4

Zeigen Sie, dass die Formulierungen (a) – (e) der Differenzierbarkeit äquivalent sind.

Übung 5

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x + y^2$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und dass $J_f(p_1, p_2) = (1, 2p_2)$ für alle $p \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Übung 6

Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ eine $(n \times n)$ -Matrix, und sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \langle x, Ax \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i a_{ij} x_j.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und bestimmen Sie $J_f(p)$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$.

Übung 7

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $df: P \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ genau dann stetig ist, wenn $Df: P \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $Df(p, x) = df(p)(x)$ stetig ist.

Übung 8

Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $p \in P$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $h = \alpha f + \beta g$ differenzierbar in p ist und dass $J_h(p) = \alpha J_f(p) + \beta J_g(p)$.

Übung 9

Beweisen Sie die Produkt- und die Quotientenregel für $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$.

Übung 10

Führen Sie die Beweisskizze der Kettenregel aus.

Übung 11

Formulieren und beweisen Sie eine Kettenregel für Verknüpfungen der Form $h \circ g \circ f$.

Übung 12

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und sei p ein Fixpunkt von f , d. h. $f(p) = p$. Zeigen Sie, dass $J_{f \circ f}(p) = J_f(p)^2$.

3.4 Partielle Ableitungen

Übung 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2), & \text{falls } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{falls } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit in der ersten und zweiten Koordinate.

Übung 2

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie

$$P = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f \text{ ist partiell differenzierbar in } p\}$$

und die partiellen Ableitungen von f für alle $p \in P$.

Übung 3

Sei $I \subseteq]0, \infty[$ ein offenes Intervall, und sei $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Weiter sei $n \geq 1$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in I\}$. Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = g(\|x\|) \quad \text{für alle } x \in P.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und bestimmen Sie $J_f(x)$ für alle $x \in P$.

Übung 4

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$g(t) = \begin{cases} t^2 \sin(1/t), & \text{falls } t \neq 0, \\ 0, & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

Wir definieren nun $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = g(x) + g(y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

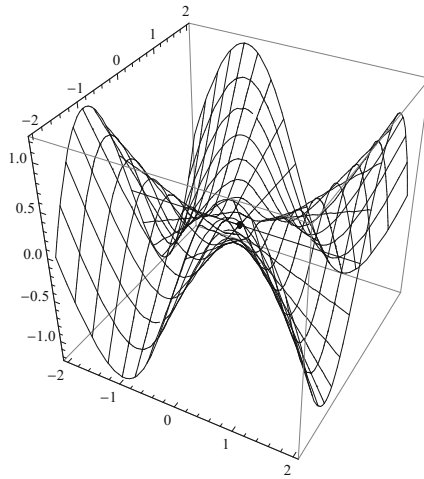
Untersuchen Sie f auf Stetigkeit, totale Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

Übung 5

Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & \text{falls } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{falls } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie die zweifachen partiellen Ableitungen $\partial_1 \partial_2 f$ und $\partial_2 \partial_1 f$.



$f(x, y)$ mit f wie in der vorangehenden Übung

Übung 6

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, und es gebe ein s mit

$$|\partial_j f(p)| \leq s \quad \text{für alle } p \in P \text{ und } 1 \leq j \leq n.$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Übung 7

Sei $f:]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(r, \varphi) = r e^{i\varphi} \quad \text{für alle } r > 0 \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}.$$

- Zeigen Sie, dass $J_f(r, \varphi)$ für alle (r, φ) invertierbar ist und bestimmen Sie $J_f(r, \varphi)^{-1}$.
- Bestimmen Sie die Umkehrfunktion g von f und berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $J_g(x, y)$ durch partielles Differenzieren. Wie hängen die Ergebnisse miteinander zusammen?

3.5 Die Differentialoperatoren

Übung 1

Sei $f: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq 0.$$

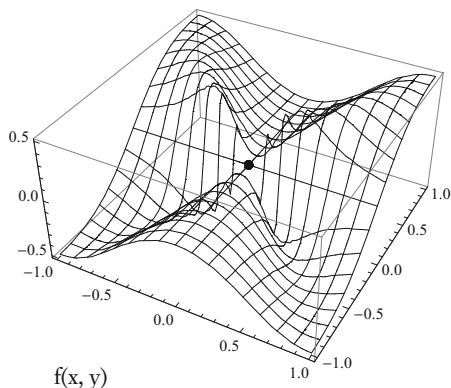
Berechnen Sie $\text{grad } f$.

Übung 2

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y / (x^4 + y^2), & \text{falls } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{falls } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion f für alle Punkte (x, y) der Ebene auf Stetigkeit und Existenz der Richtungsableitung in Richtung w für alle $w \in \mathbb{R}^2$ mit $|w| = 1$.



Übung 3

Zeigen Sie die Linearität der Differentialoperatoren grad , div , rot und Δ .

Übung 4

Zeigen Sie die Produktregeln für grad , div , rot und Δ .

Übung 5

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^3$, zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\text{rot grad } f = 0.$$

Übung 6

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P \subseteq \mathbb{R}^3$, zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:
 $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$, d.h. $\langle \nabla, \nabla \times f \rangle = 0$.

Übung 7

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P \subseteq \mathbb{R}^3$, zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:
 $\nabla \times (\nabla \times f) = \nabla \langle \nabla, f \rangle - \Delta f$,
 wobei $\Delta f = (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3)$.

Übung 8

Sei $I \subseteq]0, \infty[$ ein offenes Intervall, und sei $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Weiter sei $n \geq 1$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in I\}$. Wir definieren $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = g(\|x\|) \quad \text{für alle } x \in P.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt:

$$\Delta f(x) = g''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} g'(\|x\|).$$

3.6 Taylor-Entwicklung und lokale Extremwerte

Übung 1

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$, dreimal stetig differenzierbar. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_p^3 f$ dritter Ordnung für einen Entwicklungspunkt p . Welche partiellen Ableitungen tauchen für den Fall $n = 2$ im Vergleich zum Taylor-Polynom $T_p^2 f$ zweiter Ordnung zusätzlich auf?

Übung 2

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung im Entwicklungspunkt 0 für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Übung 3

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritter Ordnung im Entwicklungspunkt 0 für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^3 + 2x^2 - x) \sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Übung 4

Wir definieren $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$f(x, y) = x^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^3, \quad h(x, y) = x^2 + y^4 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

- (c) $\text{grad}(f)(0) = \text{grad}(g)(0) = \text{grad}(h)(0) = 0$.
- (d) $H_f(0), H_g(0), H_h(0)$ sind positiv semidefinit.
- (e) 0 ist eine nicht strikte lokale Minimalstelle von f , keine lokale Extremalstelle von g und eine strikte lokale Minimalstelle von h .

Übung 5

Sei $g : P \rightarrow \mathbb{R}, P \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $N = \text{niv}_g(c)$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Weiter sei $p \in P$ mit $\text{grad}(g)(p) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von p_1 und eine Umgebung V von p_2 gibt, sodass für $G = N \cap (U \times V)$ gilt:

- (a) Ist $\partial_y g(p) \neq 0$, so ist G der Graph einer Funktion auf U .
- (b) Ist $\partial_x g(p) \neq 0$, so ist $G^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in G \}$ der Graph einer Funktion auf V .
- (c) Ist $\partial_x g(p), \partial_y g(p) \neq 0$, so ist G der Graph einer Bijektion von U nach V .

Übung 6

Seien $g : P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $N = \text{niv}_g(c)$ für ein c und $p \in P$.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ derart, dass eine differenzierbare Kurve $h : [0, \varepsilon] \rightarrow N$ existiert mit $h(0) = p$ und $h'(0) = x$. Zeigen Sie, dass $x \in T_p N$.

Übung 7

Seien $a, b, c, r > 0$ und sei

$$N = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = r^2 \}.$$

Zeigen Sie, dass N eine Niveaumenge einer stetig differenzierbaren Funktion $g : P \rightarrow \mathbb{R}, P \subseteq \mathbb{R}^3$ ist, und bestimmen Sie $T_p N$ für $p \in P$.

Übung 8

Bestimmen Sie die lokalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$ auf der Menge

$$N = \{ (x, y) \mid x^2/4 + y^2/2 = 1 \}.$$

Übung 9

Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Multiplikatorregel im Allgemeinen kein hinreichendes Kriterium für eine lokale Extremalstelle darstellt.

Übung 10

Wir betrachten das nach oben geöffnete Einheits-Paraboloid P_1 , also den Graphen der Funktion $h_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h_1(x, y) = x^2 + y^2 = \langle (x, y), E(x, y) \rangle, \text{ mit der Einheitsmatrix } E \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Wir strecken nun P_1 in x -Richtung um den Faktor $\sqrt{2}$ und in y -Richtung um den Faktor $1/\sqrt{2}$, sodass wir ein elliptisches Paraboloid P_2 erhalten. Anschließend drehen wir P_2 um $\pi/4$ gegen den Uhrzeigersinn, sodass ein weiteres elliptisches Paraboloid P_3 entsteht.

Geben Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, sodass gilt

- (a) P_2 ist der Graph von $h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_2(x, y) = \langle (x, y), A(x, y) \rangle$,
- (b) P_3 ist der Graph von $h_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_3(x, y) = \langle (x, y), B(x, y) \rangle$.

Übung 11

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = xy$. Weiter sei $h_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie in der vorangehenden Aufgabe. Wir betrachten nun die Niveaumenge

$$N = \text{niv}_{h_3}(1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_3(x, y) = 1 \}.$$

- (a) Skizzieren Sie N und einige Höhenlinien von f .
- (b) Ermitteln Sie anhand Ihrer Skizze Kandidaten für lokale Extremalstellen von $f|N$. Begründen Sie Ihre Wahl.
- (c) Zeigen Sie mit Hilfe des Multiplikator-Ansatzes von Lagrange, dass sich alle lokalen Extremalstellen von $f|N$ unter Ihren Kandidaten aus (b) befinden.

4. Fourier-Reihen

Übung 1

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, und sei p eine Periode von f . Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^{a+p} f(x) \, dx = \int_b^{b+p} f(x) \, dx.$$

Übung 2

Zeigen, dass für alle k, n gilt:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^{2\pi} \cos(0x) \cos(0x) \, dx = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin(0x) \sin(0x) \, dx = 0, \\ \text{(b)} \quad & \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(nx) \, dx = \delta_{k,n} \cdot \pi, \\ & \hspace{15em} \text{falls } n \neq 0 \text{ oder } k \neq 0, \\ \text{(c)} \quad & \int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(nx) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Übung 3

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein trigonometrisches Polynom. Zeigen Sie, dass $\text{FS}(f) = f$.

Übung 4

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische integrierbare Funktion, und sei

$$\text{FS}(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

die Fourier-Reihe von f . Zeigen Sie:

- (a) Ist f gerade (d. h. $f(-x) = f(x)$ für alle x), so ist $b_k = 0$ für alle $k \geq 1$.
- (b) Ist f ungerade (d. h. $f(-x) = -f(x)$ für alle x), so ist $a_k = 0$ für alle $k \geq 1$.

Übung 5

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Zeigen Sie:

$$\text{FS}(f) = \text{FS}(\text{Re}(f)) + i \text{FS}(\text{Im}(f)).$$

Übung 6

Sei $f = \sum_{-n \leq k \leq n} c_k e^{ikx}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ für alle $-n \leq k \leq n$. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe $\text{FS}(f)$ von f .

Übung 7

Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi]$, und seien

$$\text{FS}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad \text{FS}(g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{ikx}.$$

Bestimmen Sie die Fourier-Reihen von

(a) $cf + dg$ für $c, d \in \mathbb{C}$, (b) \bar{f} , (c) $e^{iax} f(x)$ für $a \in \mathbb{Z}$.

Übung 8

Zeigen Sie, dass für alle n und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{k \leq n} D_k(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2.$$

Übung 9

Beweisen Sie das Lemma von Riemann für Regelfunktionen, indem Sie den zweiten Teil des Beweises abändern und eine Regelfunktion gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren.

Übung 10

Zeigen Sie, dass es eine Regelfunktion auf $[-\pi, \pi]$ gibt, sodass $f'(0-)$ und $f'(0+)$ nicht existieren.

Übung 11

Zeigen Sie, dass die beiden Definition der komplexwertigen Ableitung $f'(p)$ für $f: P \rightarrow \mathbb{C}$, $P \subseteq \mathbb{R}$ äquivalent sind.

Übung 12

Sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = \sin(x)/x$ für $x \neq 0$ und $h(0) = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty h(x) dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^\infty h(x) dx = \pi.$$

[Hinweis: Betrachten Sie $\lim_n \int_{-(n+1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} h(x) dx$ und den Konvergenzsatz.]

Übung 13

Sei $a \in [0, \pi]$, und sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die 2π -periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{für alle } x \in [-\pi, -a] \cup [a, \pi]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe $\text{FS}(f)$ von f in reeller und komplexer Darstellung.

Übung 14

Sei $V = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch und integrierbar auf } [0, 2\pi] \}$.

Zeigen Sie, dass für alle $f, g, h \in V$, und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(a) \quad \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle, \quad \langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle,$$

$$(b) \quad \langle \alpha f, g \rangle = \bar{\alpha} \langle f, g \rangle, \quad \langle f, \alpha g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle,$$

$$(c) \quad \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle},$$

$$(d) \quad \langle f, f \rangle \in \mathbb{R} \text{ und } \langle f, f \rangle \geq 0,$$

$$(e) \quad \text{ist } f \text{ stetig und } f \neq 0, \text{ so ist } \langle f, f \rangle > 0.$$

Übung 15

Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(a) \quad \|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2,$$

$$(b) \quad \|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2,$$

$$(c) \quad \text{Ist } f \text{ stetig und } \|f\|_2 = 0, \text{ so ist } f = 0.$$

Übung 16

Zeigen Sie, dass für alle $f \in V$ gilt:

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| \, dx \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

Übung 17

Zeigen Sie, dass es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V gibt mit den Eigenschaften:

$$(a) \quad \lim_n \int_0^{2\pi} |f_n(x)| \, dx = 0.$$

$$(b) \quad \lim_n \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 \, dx = 1.$$

Übung 18

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V . Weiter sei $r \geq 0$. Es gelte:

$$(a) \quad |f_n(x)| \leq r \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N},$$

$$(b) \quad \lim_n \int_0^{2\pi} |f_n(x)| \, dx = 0.$$

$$\text{Zeigen Sie, dass } \lim_n \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 \, dx = 0.$$

Übung 19

Skizzieren Sie Funktionen $f_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:

- (a) $\lim_n f_n = 0$ (in 2-Seminorm),
- (b) $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Übung 20

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V mit $\lim_n f_n = 0$ in 2-Seminorm, d. h., es gelte

$$\lim_n \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_n \int_0^{2\pi} |f_n(x)| dx = 0$.

Übung 21

Zeigen Sie, dass im Approximationssatz „stetig und stückweise stetig differenzierbar“ durch „glatt“ (unendlich oft differenzierbar) ersetzt werden kann.

Übung 22

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion mit

$$f(x) = \frac{(\pi - x)^2}{4} \quad \text{für alle } x \in [0, 2\pi].$$

- (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f .
- (b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f in reeller und komplexer Darstellung.
- (c) Zeigen Sie mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation, dass

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übung 1

Rechnen Sie die Lösungen $f(x) = a e^x + b e^{-x}$ und $g(x) = c \cosh(x) + d \sinh(x)$ von $y'' = y$ ineinander um.

Übung 2

Die Differentialgleichung

$$y'' = -cy, \quad c > 0$$

hat genau die Lösungen

$$f_{a,b}(x) = a \cos(wx) + b \sin(wx), \quad w = \sqrt{c}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass sich diese Lösungen in der Form

$$g_{d,x_0}(x) = d \cos(wx + x_0), \quad w = \sqrt{c}, \quad d \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

darstellen lassen. Wie berechnen sich d, x_0 aus a, b ? Wie a, b aus d, x_0 ? Welche anschauliche Bedeutung haben d und x_0 ?

Übung 3

Geben Sie eine auf \mathbb{R} definierte allgemeine Lösung (mit vier freien Parametern) für die Differentialgleichung $y^{(4)} = y$ an.

Übung 4

Sei $n \geq 1$. Konstruieren Sie mit Hilfe von Potenzreihen eine auf \mathbb{R} definierte allgemeine Lösung (mit n freien Parametern) der Differentialgleichung $y^{(n)} = y$.

Übung 5

Sei $w = \sqrt{3}/2$. Weiter seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = a e^x + b e^{-x/2} \cos(wx) + c e^{-x/2} \sin(wx),$$

$$g(x) = a e^{-x} + b e^{x/2} \cos(wx) + c e^{x/2} \sin(wx).$$

Welchen Ruhm dürfen diese Funktionen in der Theorie der Differentialgleichungen für sich beanspruchen?

Übung 6

Bestimmen Sie die Lösungen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der folgenden Differentialgleichung mit Anfangswert:

$$y' \leq 2y, \quad y \geq 0, \quad y(0) = 0.$$

Übung 7

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x^3 + 2xy - x}{x^2 - 1}, \quad x > 1, \quad y(2) = -2.$$

- (d) Plotten oder skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung im Rechteck $]1, 5] \times [-2, 2]$ (wahlweise mit Geradenstücken oder Vektoren).
- (e) Lösen Sie das AWP, sodass alle Schritte der Lösung erkennbar werden.
- (f) Zeichnen Sie Ihre Lösung in das Richtungsfeld ein.

Übung 8

Lösen Sie die Anfangswertprobleme

$$(a) \quad y' = xy, \quad y(0) = 0, \quad (b) \quad y' = xy, \quad y(0) = 1,$$

Übung 9

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

- (a) $y' = xy + x, \quad y(0) = 0,$
- (b) $y' = xy + x^3, \quad y(0) = 0,$
- (c) $y' = xy + x^{(2n+1)}, \quad y(0) = 0, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N} \text{ beliebig.}$
- (d) $y' = xy + x^{(2n+1)}, \quad y(0) \in \mathbb{R}, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N} \text{ beliebig.}$

Übung 10

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = xy + x^2, \quad y(0) = 0,$$

mit Hilfe der Fehlerfunktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Übung 11

Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit $y(x_0) = y_0$:

- (a) $y' = x^2 y, \quad (b) \quad y' = (x^2 + 1) y,$
- (c) $y' = \cos(x) y, \quad (d) \quad y' = \arctan(x) y.$

Übung 12

Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit $y(x_0) = y_0$:

$$(a) \ y' = y + 1, \quad (b) \ y' = y + x, \quad (c) \ y' = y + x^2.$$

Übung 13

Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Das Anfangswertproblem

$$y' = y + x^5, \quad y(x_0) = y_0,$$

hat die Lösung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (120 + 120x_0 + 60x_0^2 + 20x_0^3 + 5x_0^4 + x_0^5 + y_0) e^{x-x_0} - \\ (120 + 120x + 60x^2 + 20x^3 + 5x^4 + x^5).$$

Finden Sie durch Verallgemeinerung der Form von f die Lösungen von

$$(a) \ y' = y + x^n, \quad y(x_0) = y_0, \quad \text{wobei } n \geq 1 \text{ beliebig,}$$

$$(b) \ y' = ay + bx^n, \quad y(x_0) = y_0, \quad \text{wobei } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } n \geq 1 \text{ beliebig.}$$

Übung 14

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x y^2, \quad y(x_0) = y_0.$$

Übung 15

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x \sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Übung 16

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x^n \sin(y), \quad y(0) = \pi/2, \quad \text{wobei } n \geq 1 \text{ beliebig.}$$

Übung 17

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \log(x)(y+a), \quad y(1) = 0, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Übung 18

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = e^{x+y}, \quad y(x_0) = y_0.$$

6. Mehrdimensionale Integration

Übung 1

Sei $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x + y \quad \text{für alle } x, y \in [0, 1]^2.$$

Berechnen Sie für alle $n \geq 1$ die Riemann-Summe $\sum_p f$ für die Partition

$$P = (t_k, s_j, x_{k,j})_{k,j \leq n}, \text{ wobei}$$

$$t_k = k/n, \quad s_j = j/n, \quad x_{k,j} = (t_k, s_j) \quad \text{für alle } 0 \leq k, j \leq n.$$

Übung 2

Sei $P = [a, b] \times [c, d]$, und sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx.$$

Betrachten Sie hierzu die Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(t) = \int_c^d \int_a^t f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

und ihre Ableitung (vgl. „Parameterabhängige Integrale“ in 3.4).

Übung 3

Seien $r, h > 0$. Berechnen Sie das Volumen des Rotationsparaboloids

$$P_{r,h} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, h], \left(\frac{x}{r} \right)^2 + \left(\frac{y}{r} \right)^2 \leq z \right\}.$$

Übung 4

Seien $a, b > 0$. Berechnen Sie die Fläche der Ellipse

$$E_{a,b} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \leq 1 \right\}$$

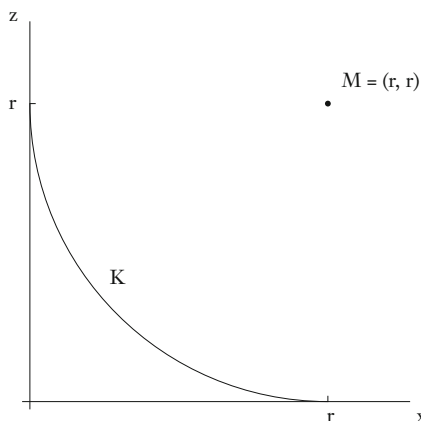
mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips.

Übung 5

Stellen Sie einen Volltorus T mit den Radien $R \geq r > 0$ als Mengendifferenz zweier Rotationskörper T_1 und T_2 dar, die durch Funktionen f_1 und f_2 auf der z -Achse definiert sind. Berechnen Sie die Volumina von T_1 und T_2 und mit ihrer Hilfe das Volumen von T .

Übung 6

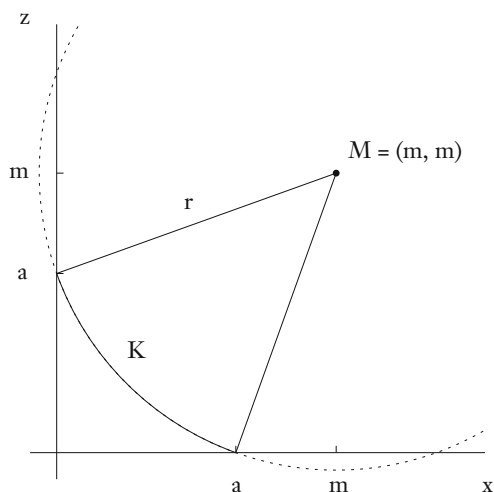
Sei $r > 0$. Betrachten Sie den Kreisbogen K im Diagramm rechts und berechnen Sie das Volumen, das entsteht, wenn K um die z -Achse rotiert wird.

**Übung 7**

In Verallgemeinerung der vorherigen Aufgabe seien nun

$$m > 0, \quad r \in [m, \sqrt{2}m].$$

Berechnen Sie wieder das bei Rotation des Kreisbogens K um die z -Achse entstehende Volumen, vgl. das folgende Diagramm.

**Übung 8**

Seien $R, h > 0$, $a = h/R^2$, und sei A die durch die Funktion $f: K_R \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$K_r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \},$$

$$f(x, y) = a(x^2 + y^2) \quad \text{für alle } (x, y) \in K_R$$

dargestellte Oberfläche des Rotationsparaboloids mit Radius R und Höhe h . Berechnen Sie den Oberflächeninhalt von A .

Übung 9

Sei $c > 0$. Reelle Zahlen u, v heißen elliptischen Koordinaten eines Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (bzgl. der Konstanten c), falls

$$x = c \cosh(u) \cos(v),$$

$$y = c \sinh(u) \sin(v).$$

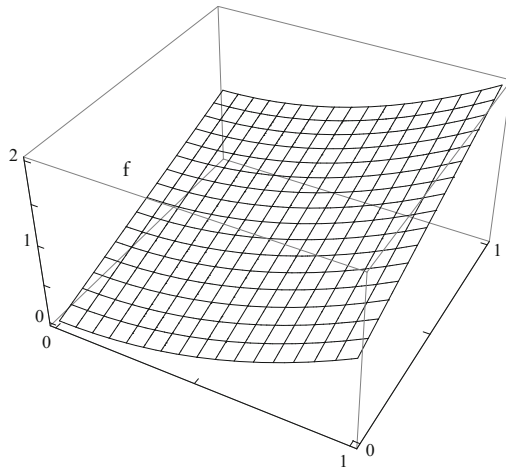
- (1) Bestimmen und skizzieren Sie die Koordinatenlinien dieses Koordinatensystems, also die Linien, auf denen u bzw. v konstant sind. Welche Halbachsen haben die dabei auftauchenden Ellipsen?
- (2) Geben Sie die Transformationsformel für Integrale in elliptischen Koordinaten an. Geben Sie hierzu die Transformation Φ genau an und berechnen Sie die Determinante von $J_\Phi(x, y)$.
- (3) Seien nun $a, b > 0$. Modifizieren Sie die elliptischen Koordinaten derart, dass die Ellipse mit x - y -Halbachsen a und b die Koordinatenlinie „ $u = 1$ “ des Koordinatensystems ist.

Übung 10

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Graphen der Funktion

$$f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$f(x, y) = x^2 + y \quad \text{für alle } (x, y) \in [0, 1]^2.$$



Anhänge

1. Bezüge zur Schulmathematik

Wie in der „Analysis 1“ betrachten wir exemplarisch den Bayerischen Lehrplan für das achtjährige Gymnasium, um die direkten Schulbezüge der in diesem Buch behandelten Themen kenntlich zu machen. Neben dem Lehrplan für Mathematik (mit „M“ gekennzeichnet) ziehen wir auch den Lehrplan für Physik (mit „P“ gekennzeichnet) hinzu. Die Anordnung der Themen entspricht wieder ungefähr den Jahrgangsstufen.

Elementare geometrische Figuren und ihre Inhalte

Ein von der fünften bis zur zwölften Klasse wiederkehrendes Thema ist die Bestimmung von Inhalten. Betrachtet werden (1) Flächeninhalte und Umfänge von elementargeometrischen Figuren im \mathbb{R}^2 , (2) Volumina und Oberflächeninhalte von solchen Figuren im \mathbb{R}^3 und schließlich (3) signierte Inhalte von durch Funktionsgraphen definierten Mengen im \mathbb{R}^2 . Den Ausgangspunkt bilden in der fünften Klasse Rechtecke und Quader:

„Über das Zeichnen, Auslegen und Ausschneiden geometrischer Figuren lernen die Schüler den Begriff Flächeninhalt kennen. Sie verstehen, dass zur Flächenmessung Einheiten nötig sind, und erkennen, wie sich diese aus den Längeneinheiten ergeben. Ausgehend vom Flächeninhalt des Rechtecks ermitteln sie auch Flächeninhalte anderer Figuren und Oberflächeninhalte von Körpern...“ (M 5.4.2)

Betrachtet werden zunächst nur Figuren, die sich in Rechtecke zerlegen oder zu solchen ergänzen lassen, sowie Quader für Oberflächen. In der sechsten Klasse kommen dann neue Figuren hinzu:

„Ausgehend von dem Prinzip des Zerlegens und Ergänzens von Flächen [aus der fünften Klasse] erarbeiten die Schüler die Flächenformel für Dreieck, Parallelogramm und Trapez... Die Schüler erkennen die Inhaltsgleichheit unterschiedlicher Dreiecke, die in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen. Die Berechnung der Oberflächeninhalte von Körpern erfordert den Wechsel zwischen zwei- und dreidimensionaler Betrachtungsweise und fördert dadurch das räumliche Vorstellungsvermögen.“ (M 6.3.1)

Zum ersten Mal werden dann auch Volumina betrachtet:

„Die Schüler lernen Volumeneinheiten sowie die Formel für den Rauminhalt des Quaders kennen und wenden dieses Wissen in unterschiedlichen Zusammenhängen an.“ (M 6.3.2)

Kreise und Kegel

In der achten Klasse wird der Kreis untersucht:

„[Die Schüler lernen] die charakteristischen Eigenschaften direkt und indirekt proportionaler Größen in mathematischer Fachsprache zu beschreiben. Dabei finden sie experimentell den Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Durchmesser ... und gewinnen so erste Näherungswerte für die Kreiszahl π .“ (M 8.1.1)

„Als spezielles Beispiel für einen nichtlinearen Zusammenhang beschäftigen sie sich ausgehend von anschaulichen Überlegungen mit der Abhängigkeit des Kreisinhalts vom Radius.“ (M 8.1.2)

Räumliche Figuren, die über den Quader hinausgehen, werden in der neunten Klasse betrachtet:

„Eigenschaften der ... Körper Prisma, Zylinder, Pyramide und Kegel werden genauer untersucht. Bei Überlegungen an Schrägbildern [perspektivische Zeichnungen] und Netzen [eben ausgebreitete Oberflächen, die durch Aufschneiden und Auffalten bzw. Abwickeln entstehen] entwickeln die Schüler ihr räumliches Vorstellungsvermögen weiter, beim Bestimmen von Oberflächeninhalten und Volumina festigen sie ihre Kenntnisse über Flächen- bzw. Raummessung...“ (M 9.6)

Kraft, Masse und Beschleunigung

In der Physik der neunten Klasse wird das zweite Newtonsche Gesetz und damit aus höherer Sicht eine Differentialgleichung eingeführt:

„Anknüpfend an Grundbegriffe aus der Jahrgangsstufe 7 lernen die Schüler, durch Deutung von Bewegungsdiagrammen den zeitlichen Verlauf von Bewegungen zu analysieren. Bei der Behandlung von Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit bzw. mit konstanter Beschleunigung wird deutlich, dass sich idealisierte Vorgänge durch mathematische Funktionen beschreiben lassen und dass so genauere Vorhersagen möglich werden. An weiterführenden Beispielen zum Zusammenhang zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung gewinnen die Jugendlichen ein tieferes Verständnis des Kraftbegriffs.“ (P 9.3)

Die Kugel

In der zehnten Jahrgangsstufe wird erneut π (einschließlich der Frage der Quadratur des Kreises) betrachtet und dann auch die Kugel untersucht:

„... Näherungsverfahren zur Bestimmung der Kreiszahl π [lassen die Notwendigkeit erkennen] Grenzprozesse durchzuführen. Am Beispiel der Kugel wird veranschaulicht, dass ähnliche Grenzprozesse auch bei räumlichen Betrachtungen angewendet werden können... [Die Schüler] ermitteln Formeln für Volumen und Oberflächeninhalt der Kugel und führen bei typischen anwendungsbezogenen Fragestellungen, z. B. aus der Natur oder Architektur, Berechnungen an Körpern durch.“ (M 10.1 und M 10.1.2)

Die Keplerschen Gesetze

Im Physikunterricht der zehnten Klasse wird das Planetensystem und die Geschichte seiner Modellierung behandelt:

„Die Schüler gewinnen einen Einblick in wesentliche Entwicklungsstationen der Vorstellungen vom Aufbau unseres Planetensystems. Sie lernen auch historische Ansätze kennen, die sich später als korrekturbedürftig erwiesen haben, und solche, die sich zwar zunächst nicht durchsetzen konnten, die aber unserer heutigen Vorstellung weitgehend entsprechen...“ (P 10.1)

Bei der vorgesehenen „Mitteilung der Keplerschen Gesetze und Anwendung auf die Bewegungen von Himmelskörpern“ taucht ein mathematischer Flächeninhalt in einem physikalischen Gesetz auf. (Ellipsen werden im Mathematik-Lehrplan dagegen nicht explizit genannt.)

Bewegungsgleichungen

Die genauere Untersuchung der Newtonschen Mechanik bildet einen Schwerpunkt des Physikunterrichts der zehnten Jahrgangsstufe:

„Die Grundlagen der Mechanik Newtons haben sich die Schüler bereits in den vorherigen Jahrgangsstufen erarbeitet ... Sie erkennen nun den großen Fortschritt der kausal erklärenden Theorie Newtons gegenüber dem Vorgehen durch Galilei und Kepler, die für bestimmte Bewegungsabläufe zwar exakte Beschreibungen, aber keine verbindende Theorie angeben konnten.

Die Jugendlichen lernen, wie sie eine Vielfalt von Bewegungen theoretisch und experimentell untersuchen können. Hierzu werden die Einflüsse auf einen Körper analysiert und die auf ihn wirkende Gesamtkraft sowie die Anfangsbedingungen formuliert. Sie erkennen, dass die aus der Gesamtkraft und dem 2. Newton'schen Gesetz sich ergebende Bewegungsgleichung gelöst werden muss, um Vorhersagen für die Bewegung zu ermöglichen. Die Schüler haben in der Jahrgangsstufe 9 für den Sonderfall der konstanten Kraft eine analytische Lösungsmethode kennengelernt. Nun werden sie mit einer einfachen numerischen Methode vertraut gemacht... In erster Linie bestimmen sie die wirkenden Kräfte, interpretieren aus physikalischer Sicht kritisch die sich z. B. aus Simulationen ergebenden Ergebnisse und vergleichen diese mit entsprechenden experimentellen Daten...“ (P 10.2)

Die Methoden der Differentialrechnung werden erst im Mathematik-Unterricht der elften Klasse eingeführt und stehen deswegen noch nicht zur Verfügung. (Im Physik-Lehrplan für die elfte und zwölfte Klasse wird die Differentialrechnung jedoch auch nicht explizit erwähnt.) Die numerische Methode ist ein „Verfahren der kleinen Schritte“, die sich, wie es in einem Kommentar zum Lehrplan heißt, auf viele „Probleme anwenden lässt, die in der Physik durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden.“ Behandelt wird damit insbesondere die harmonische Schwingung. Auch aus mathematischer Sicht ist die Untersuchung einer Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit von Bedeutung.

Das kanonische Skalarprodukt

In der elften Klasse lernen die Schüler das kanonische Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 kennen und nutzen es zur Analyse von geometrischen Figuren:

„Die Schüler festigen ihre geometrischen Kenntnisse in anspruchsvolleren räumlichen Betrachtungen. In geeignet gewählten dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystemen stellen sie Punkte sowie Körper dar und arbeiten mit Vektoren im Anschauungsraum... Fragen der Längen- und Winkelmessung führen die Schüler zum Skalarprodukt von Vektoren und dessen Anwendungen... Der praktische Nutzen von Skalar- und Vektorprodukt wird ihnen auch bei der Ermittlung von Flächeninhalten und Volumina geeigneter geometrischer Objekte deutlich.“ (M 11.2)

Die Integralrechnung und der Hauptsatz

Nachdem in der elften Klasse die Differentialrechnung im Mittelpunkt stand, wird in der zwölften Klasse die Integralrechnung eingeführt:

„Auf der Grundlage ihrer Kenntnisse über Grenzwerte aus Jahrgangsstufe 11 gewinnen die Schüler mit der Integration ein tragfähiges Verfahren zur Messung von Flächeninhalten...“ (M 12. 1)

Wie im ersten Band bereits erwähnt wird in diesem Zusammenhang auch der Krümmungsbegriff entdeckt.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bildet traditionell einen Höhepunkt des mathematischen Lehrplans:

„Die Schüler haben in Jahrgangsstufe 11 die Ableitung einer Funktion als Möglichkeit zur Erfassung der lokalen Änderungsrate kennengelernt; sie machen sich nun bewusst, dass sich die zugehörige Gesamtänderung als Flächeninhalt unter dem Graph, der die lokale Änderungsrate beschreibt, deuten lässt. Ihre Überlegungen führen die Jugendlichen auf das bestimmte Integral und dessen Interpretation als Flächenbilanz.

Die Schüler lernen, Integrale zu berechnen und in Sachzusammenhängen anzuwenden. Dazu begründen sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mithilfe anschaulicher Überlegungen und stellen die Verbindung mit der aus Jahrgangsstufe 11 bekannten Stammfunktion her. Sie erkennen, dass Differenzieren und Integrieren Umkehroperationen sind.“ (M 12. 1. 1)

Stetigkeitsvoraussetzungen werden im Rahmen der anschaulichen Begründung des Hauptsatzes nur am Rand thematisiert. Bei der Berechnung von Integralen wird die partielle Integration und die Substitutionsregel im Gegensatz zum älteren G9-Lehrplan nicht mehr explizit genannt.

2. Literatur

Das folgende Literaturverzeichnis versteht sich als Erweiterung des Verzeichnisses des ersten Bandes. Viele der dort aufgeführten Werke wären hier erneut zu nennen. Denn zum einen gibt es inhaltliche Überschneidungen bei der Integration und den metrischen Räumen, die nicht selten bereits in einer „Analysis 1“ behandelt werden. Und zum anderen können erweitertes Wissen und gesteigerte Neugierde dazu führen, dass anspruchsvollere Darstellungen wie etwa die „Analysis“ von König oder Rudin und historische Texte wie die „3000 Jahre Analysis“ von Sonar oder die „Analysis in historischer Entwicklung“ von Hairer/Wanner nun zu einer passenden Lektüre geworden sind.

Neben der eindimensionalen Differentiation und Integration wird der Leser Grundbegriffe der Topologie, die mehrdimensionale Differentiation und zumindest in ihren Anfangsgründen auch die Fourier-Reihen in allen umfassenderen Lehrbüchern der Analysis vorfinden. Viele Darstellungen weisen zudem längere Abschnitte über gewöhnliche Differentialgleichungen auf, so etwa die Bücher von Forster, Hildebrandt und Königsberger. Einführende Werke, die sich speziell mit gewöhnlichen Differentialgleichungen befassen, sind die Bücher von Aulbach und Walter. Die über \mathbb{R} hinausgehende Integrationstheorie ist ein weites Feld, das viele verschiedene Herangehensweisen zulässt. Das mehrdimensionale Riemann- bzw. Lebesgue-Integral und die Integralsätze von Gauß und Stokes werden zum Beispiel in Amann/Escher, Forster, Hildebrandt, Königsberger und Walter diskutiert. Manche Darstellungen, wie etwa die „Höhere Analysis“ von Werner und die dritten Bände der Analysis-Darstellungen von Amann/Escher und Forster (ab der sechsten Auflage) beinhalten auch eine Einführung in die allgemeine Maß- und Integrationstheorie.

Wir werfen noch kurz einen Blick auf die Funktionentheorie und die Funktionalanalysis, die in diesem Buch nicht berücksichtigt werden. Die Funktionentheorie wird zum Beispiel in der „Analysis 2“ von Hildebrandt und der „Höheren Analysis“ von Werner relativ ausführlich behandelt. Die diesem Gebiet gewidmeten Darstellungen von Freitag/Busam und Remmert/Schumacher wurden im ersten Band bereits genannt. Die Funktionalanalysis wird in den beiden Büchern von Werner einführend bzw. in großer Breite vorgestellt.

Genannt sei auch noch das Buch von Kerner/von Wahl, das für Leser mit Physik als zweitem Fach eine geeignete Ergänzung sein kann.

- Amann, Herbert / Escher, Joachim** 2006 Analysis II; 2. Auflage. Birkhäuser, Basel.
 – 2008 Analysis III; 2. Auflage. Birkhäuser, Basel.
- Aulbach, Bernd** 2004 Gewöhnliche Differenzialgleichungen; 2. Auflage. Elsevier, München.
- Behrends, Ehrhard** 2007 Analysis II; 2. Auflage. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
- Deiser, Oliver / Lasser, Caroline** 2014 Erste Hilfe in Linearer Algebra. Überblick und Grundwissen mit vielen Abbildungen und Beispielen; Springer Spektrum, Berlin.
- Forster, Otto** 2013 Analysis 2; 10. Auflage. Springer Spektrum, Wiesbaden.
 – 2012 Analysis 3; 7. Auflage. Springer Spektrum, Berlin.
- Heuser, Harro** 2008 Analysis 2; 14. Auflage. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
- Hildebrandt, Stefan** 2003 Analysis 2; 2. Auflage. Springer, Berlin.
- Jahnke, Hans Niels (Hrsg.)** 1999 Geschichte der Analysis; Spektrum, Heidelberg.
- Kerner, Hans / von Wahl, Wolf** 2013/07 Mathematik für Physiker; 3. Auflage. Springer, Berlin.
- König, Heinz** 1984 Analysis 1; Birkhäuser, Berlin.
- Königsberger, Konrad** 2004 Analysis 2; 5. Auflage. Springer, Berlin.
- Lasser, Rupert / Hofmaier, Frank** 2012 Analysis 1 + 2; Springer, Berlin.
- Walter, Wolfgang** 2002 Analysis 2; 5. Auflage. Springer, Berlin.
 – 2002 Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung; 7. Auflage. Springer, Berlin.
- Werner, Dirk** 2000 Einführung in die höhere Analysis; 2. Auflage. Springer, Berlin.
 – 2011 Funktionalanalysis; 7. Auflage. Springer, Berlin.
- Zorich, Vladimir** 2010 Analysis II; Springer, Berlin.

3. Notationen

Grundlegendes

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$A \subseteq B: \forall x \in A \ x \in B$$

$$A \subset B: A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$$

$$f^{-1}[B] = \{x \mid f(x) \in B\}$$

log: Logarithmus zur Basis e

Abschnitt 1

$$(t_k, x_k)_{k \leq n}, 19$$

$$\delta(p), 20$$

$$\sum_p f, 21$$

$$I(f), 22$$

$$\int_a^b f, 22$$

$$\int_a^b f(x) \, dx, 22$$

$$\lim_{\delta(p) \rightarrow 0} \sum_p f, 27$$

$$M(f), M_g(f), 31$$

$$I(f), 33$$

$$S_p f, s_p f, 37$$

$$Sf, sf, 38$$

$$os_A(f), 39$$

$$l_p, ind_p, 41$$

$$L(P), 41$$

$$J(P), j(P), 42$$

$$1_p^A, 50$$

$$f_p, 50$$

$$f_p^S, f_p^s, 51$$

$$\text{var}(f), 55$$

$$x^+, x^-, 57$$

$$R(g), 60$$

$$f^+, f^-, 63$$

$$F \upharpoonright_a^b, [F]_a^b, 74$$

$$\int f, \int f(x) \, dx, 75$$

$$T_p^n, 95$$

$$I(f), 103$$

$$J(P), 104$$

$$\Gamma, 115$$

Abschnitt 2

$$U_\varepsilon(p), 126$$

$$\text{int}(P), 130$$

$$P', 134$$

$$\text{cl}(P), 137$$

$$\text{bd}(P), 137$$

$$C, 140$$

$$U_\varepsilon^P(p), 151$$

$$\text{cont}(f), 159$$

$$\mathbb{K}, 174$$

$$\mathbb{K}^{m \times n}, 174$$

$$\text{diam}(A), 176$$

$$d(x, A), d(A, B), 176$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, 178$$

$$f: (X, d) \rightarrow (Y, e), 182$$

$$\mathcal{C}, \mathcal{N}, 189$$

$$U_\varepsilon(x), 191$$

$$P', 192$$

$$\text{int}(P), \text{cl}(P), \text{bd}(P), 192$$

$$d(x, A), d(A, B), 235$$

Abschnitt 3 x_i , 245 $\text{pr}_i(f)(x)$, 245 f_i , 245 $f'(t)$, 250 $L_p f$, 258 $L(f)$, 258 ϖ , 265 $\text{var}(f)$, 266 $\int_f g$, 271, 273 $\text{niv}_f(c)$, 275, 531 $A(i, j)$, 280 $A = (a_1, \dots, a_m)$, 280 $A = (b_1; \dots; b_n)$, 280 A^t , 280 $J_f(p)$, 281 $f'(p)$, 281 \overline{ab} , 289 $\partial_j f(p)$, 297 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$, 297 $\frac{\partial}{\partial x_j} f(p)$, 297 $\partial_{i,j} f$, 303 $\partial_{j_k, \dots, j_l} f$, 305 $\text{grad}(f)$, 313 ∇ , 317 $\text{div}(g)$, 320 Δf , 321 $\text{rot}(g)$, 322 $T_p^\vee f$, 329 $\sigma(k)$, $k!$, x^k , 330 $(\overset{\vee}{k})$, (k_1, \dots, k_n) , 330 $f^{(k)}$, $\partial^k f$, 331 $\partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f$, 331 T_p^\vee , 331, 336 $H_f(p)$, 333**Abschnitt 4** $\delta_{x,y}$, 359 $FS(f)$, 362, 366 $FS_n(f)$, 366 D_n , 369 $\langle f, g \rangle$, 385 $\|f\|_2$, 386 $\lim_n f_n = f$ (2-Sem.), 387 $\mathcal{F}(f)(k)$, $\hat{f}(k)$, 396**Abschnitt 5** $\exp(A)$, 438 $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, 439**Abschnitt 6** $(t_k, s_j, x_{k,j})_{k \leq n, j \leq m}$, 455 $\sum_p f$, 456 $I(f)$, 456 $\int_P f$, $\int_P f(x, y) \, dx \, dy$, 456 $J(P)$, $j(P)$, 457 A_f , 457 $\int_A f$, 458 $\text{supp}(f)$, 459 $\rho(f)$, 468 $\text{Ar}(\rho(f))$, $\text{Ar}_p(f)$, 469 \mathbb{P} , 472 $\Psi(x, y)$, 472 $\arctan_2(x, y)$, 472 $\Phi(r, \varphi)$, 473 $\Psi(x, y, z)$, 478 $\Phi(r, \theta, \varphi)$, 479**Exkurs** $F(\varphi, k)$, 497 $E(\varphi, k)$, 497 $\Pi(\varphi, \alpha^2, k)$, 497 $K(k)$, $E(k)$, 497 $\Pi(\alpha^2, k)$, 497 $F(\varphi, k)$, 502

4. Index

Abgeschlossen, 131, 191

abgeschlossen in, 152

Ableitung, 250, 281, 297

Abschluss, 134, 192

absolutstetig, 143

Abstand, 164, 176

abstandserhaltend, 564

Additionstheoreme, 507

additiv, 43

Algebra, 45

allgemeiner Approximationssatz, 329

alternierende harmonische Reihe, 96

Amplitude, 497

Anfangspunkt, 246

Anfangswertproblem, 408, 427

Annahme von Extremwerten, 215

Approximationssatz, 329

äquidistant, 20, 455

äquidistant integrierbar, 23

äquivalente Kurven, 247

Archimedische Spirale, 263

Argument, 497

arithmetisches Mittel, 99

Aufspaltungseigenschaft, 25, 456

äußerer Jordan-Inhalt, 42

Auswertungsnotation, 74

AWP, 408

Bahn, 246

Baire-Raum, 189

Bairescher Kategoriensatz, 145, 193

Banachscher Fixpunktsatz, 185

Basis, 200

Berechnung durch Auswertung, 74

beschränkt, 176

beschränkte Variation, 55

Bessel-Ungleichung, 375, 390

Binomische Formeln, 172

Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft, 225

Brachistochrone, 450

bv-Funktion, 55, 266

Cantor-Funktion, 143

Cantor-Menge, 139

Cantor-Raum, 189

Cauchy-Folge, 178

Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 169, 268, 365

Cavalierisches Prinzip, 462

Charakterisierungssatz von Bohr-Mollerup, 119

Dämpfung, 435

Darboux-Integral, 38

Darboux-integrierbar, 38

Darboux-Summe, 37

dehnungsbeschränkt, 185

Delisches Problem, 111

Delta Amplitudinis, 505

δ -Kubus, 457

δ -Partition, 20

δ -Quadrat, 42

Determinantenkriterium, 342

diagonalisierbar, 351

dicht, 134, 199

Differential, 281, 286

Differentialgleichung, 407

differenzierbar, 250, 281

Dirichlet-Kern, 369

Dirichletsche Sprungfunktion, 64

diskrete Metrik, 164

diskrete Topologie, 203

divergent, 178

Divergenz, 320

Doppelintegral, 461

doppelte Rotation, 324

Dreiecksungleichung, 126, 164, 167, 177, 387

Durchmesser, 176

dynamische Interpretation, 430

Eigenwert, 351

Eigenwerte symmetrischer Matrizen, 351f

Eindeutigkeitssatz, 361

Einschränkung, 25, 456

Elimination von Sinus und Kosinus, 92

Ellipse, 264, 501

Ellipsoid, 487, 501

elliptische Koordinaten, 593

elliptisches Integral, 264, 448, 496

elliptisches Paraboloid, 334

Endpunkt einer Kurve, 246

endlich reduzierbar, 210

endliche Additivität, 43

endliche Durchschnittseigenschaft, 528
 endliche Teilüberdeckung, 210, 221
 Entwicklungspunkt, 331
 ε - δ -stetig, 182
 ε -Expansion, 236
 ε -Umgebung, 191
 Ergänzungssatz, 121
 Erhaltung der Energie, 510
 erster Ordnung, 407
 Erwartungswert, 516
 erzeugte Topologie, 201f
 es gibt M -viele x mit, 141
 euklidische Metrik, 165
 Euler-Mascheroni-Konstante, 106
 Euler-Poisson-Integral, 109, 113
 Exponential einer Matrix, 438
 Extremwertsatz von Weierstraß, 215
 Exzentrizität, 264

Fast injektiv, 246
 Fehlerfunktion, 113, 589
 Fehlerintegral, 109
 Feinheit, 20, 455
 fix, 528
 Fixpunktsatz, 185
 Fläche einer Ellipse, 91
 F_σ -Menge, 144
 Fortsetzungsproblem, 47
 Fourier-Koeffizient, 362, 366
 Fourier-Reihe, 362, 366
 Frobenius-Norm, 174
 Fundamentalsystem, 431
 Funktionalgleichung der Gamma-Funktion, 117

Gamma-Funktion, 115
 Gauß-Darstellung von Γ , 118
 Gauß-Funktion, 109
 Gauß-Integral, 109, 113, 476
 gedämpfte Schwingung, 435
 geometrisches Mittel, 99
 gerichtet, 207
 geschlitzte Ebene, 473
 geschlossene Kurve, 246
 getrennte Variablen, 414
 gewichteter Mittelwert, 31
 Gewichtsfunktion, 31
 Gibbs-Phänomen, 380
 gleichmäßige Stetigkeit, 218, 234
 gliedweise Integration, 66
 Glockenkurve, 109
 G_δ -Menge, 144
 Grad, 358
 Gradient, 313
 Gradientenfeld, 313, 318
 Grenzwert, 178

Harmonische Funktion, 321
 harmonisches Mittel, 99
 Häufungspunkt, 132, 192
 Hauptminor, 342
 Hauptsatz I, 72, 78
 Hauptsatz II, 77, 80
 Hausdorff-Metrik, 236
 Hausdorff-Raum, 206
 Hesse-Matrix, 333
 Höhenlinie, 275
 Höhenliniendiagramm, 275
 Hölder-Ungleichung, 169
 homogen, 411, 431
 homöomorph, 216
 Homöomorphiesatz, 231
 hyperbolisches Paraboloid, 334
 Hyperraum, 236

Implicit definiert, 291
 indefinit, 340
 Indikatorfunktion, 41, 50
 induzierte Metrik, 167
 induzierte Norm, 171
 Inhalt, 46
 inhomogen, 411, 431
 innerer Jordan-Inhalt, 42
 innerer Punkt, 130
 Inneres, 130, 192
 in sich dicht, 136, 559
 Integrabilitätsbedingung, 326
 Integral, 22, 33, 364, 456
 Integralfunktion, 76
 Integralvergleichskriterium, 105
 Integration (komplexwertig), 33, 364
 Integrationsregel für die Umkehrfunktion, 521
 Integrationsvariable, 24
 integrierbar, 22, 33, 364, 456, 459
 Integrierbarkeitsbedingung, 22, 456
 Integrierbarkeitskriterium von Lebesgue, 69, 219
 irgendwo dicht, 145
 Irrationalität von π , 94
 isolierter Punkt, 136

Jacobi-Amplitude, 502
 Jacobi-Matrix, 281
 Jordan-Inhalt, 42, 104, 457
 Jordan-messbar, 42, 457
 Jordan-Zerlegung, 57

Kettenregel, 288, 300
 kinematische Interpretation, 246
 Kissoide, 110
 koabzählbare Topologie, 207
 Koch-Kurve, 241
 koendliche Topologie, 205

kompakt, 212, 221
 kompakter Träger, 459
 kompatibel, 204
 komplementärer Modul, 507
 komplexes trigonometrisches Polynom, 367
 komplexwertige Differentialgleichung, 407
 Komponenten, 245, 281
 Kondensationspunkt, 559
 Kontinuum, 181
 Kontraktion, 185
 Kontur-Plot, 275, 531
 konvergent, 178
 Konvergenz im quadratischen Mittel, 387
 Konvergenzsatz, 376f
 Konvergenzsatz von Dirichlet, 373
 Konvergenzsatz von Dirichlet-Jordan, 377
 konvex, 290
 Koordinatenfunktionen, 245
 Kosinus Amplitudinis, 503
 Kreisaufwicklung, 184, 216
 Kreisbögen, 260
 Kreisfläche, 90
 Kreisfrequenz, 435
 Kreispindel, 445
 Kreisring, 466, 541
 Kriechfall, 435
 Kronecker-Symbol, 359
 Kugelkoordinaten, 478
 Kurve, 246
 Kurvenintegral, 271, 273

Lagrange-Multiplikator, 346
 Länge (Menge), 19, 41
 Länge (Kurve), 258
 Längenformel, 259
 Längensatz, 259, 269f
 Laplace-Operator, 321
 Lebesgue-Integral, 67
 Lebesgue-Maß Null, 68
 Lebesgue-Nullmenge, 68, 219
 Lebesgue-Zahl, 233
 Legendre-Formel, 501
 Leibniz-Notation, 24
 Leibniz-Reihe, 380
 Lemma von Riemann, 371
 Lemniskate, 265, 501
 Lemniskatische Konstante, 265
 Limes, 178
 Limesformulierung des Integrals, 27
 limesstetig, 182
 lineare Differentialgleichung, 411
 lineares System, 431
 Linearität des Integrals, 25–26, 456
 Linearität der Ableitung, 287
 linksseitige Stützstellen, 20
 Lipschitz-stetig, 185

log(2), 96
 lokal integrierbar, 71
 lokal Lipschitz-stetig, 421
 Lösung einer Differentialgleichung, 407f, 427

Mager, 145
 maßtheoretische Interpretation des Riemann-
 Integrals, 44
 Matrixnorm, 174
 Maximumsmetrik, 165f
 Maximumsnorm, 174, 562
 Metrik, 164
 metrische Vollständigkeit, 178
 metrischer Raum, 164
 metrischer Teilraum, 165
 metrisierbar, 204
 Metrisierbarkeitssatz von Urysohn, 204
 Minimalperiode, 357
 Mittelwert, 31
 Mittelwertsatz der Integralrechnung, 32
 mittige Stützstellen, 20
 Modul, 497
 Monotonie des Integrals, 25, 456
 Multinomialkoeffizient, 330
 Multiplikatoransatz, 346
 Multiplikatorregel, 345, 349

Nabla-Operators, 317
 nahe bei, 157
 Nebenbedingung, 344
 negativ (semi-)definit, 340
 Negativteil, 63
 Neilsche Parabel, 575
 Netz, 207
 Newtonsche Punktnotation, 408
 nirgends dicht, 145, 193
 Niveaumenge, 275
 Norm, 167
 normierter Vektorraum, 167
 Normiertheit, 25, 456
 n-ter Ordnung, 407
 Nullbedingung, 164, 167
 Nullmenge, 68
 numerisch äquivalent, 194

Obersumme, 37f
 offen, 127, 191, 201
 offen in, 151
 offene ε -Kugel, 191
 offene Umgebung, 129
 Optimalität, 390
 Orbit, 185
 orientierungstreu, 247
 orientierungsumkehrend, 247
 orthogonal, 389
 orthogonal diagonalisierbar, 351

Orthogonalität, 360, 367

orthonormal, 389

Oszillation, 39

Parabelbogen, 261

parabolischer Zylinder, 334

Parallelogrammgleichung, 173

Parameter (Kurve), 246

Parameter (elliptische Integrale), 497

Parametertransformation, 247

Parseval-Gleichung, 391

Partialbruchzerlegung, 491, 493

partiell differenzierbar, 297, 299

partielle Ableitung, 297

partielle Differentialgleichung, 407

partielle Integration, 83

Partition, 19, 455

Peano-Jordan-Inhalt, 43

Peano-Kurve, 252

perfekt, 136

Periode, 357

periodisch, 357

Picard-Lindelöf, 423f

Polarisationsformel, 62, 172

Polarkoordinaten, 472, 478

Polygonzug-Approximation, 258

polynomieller Approximationssatz, 337

positiv (semi-) definit, 340

Positivität, 545

Positivteil, 63

Potential, Potentialfeld, 318

Potentialgleichung, 321

Produktregel (Ableitung), 287

Produktregeln (Differentialoperatoren), 324

Projektion, 245, 281

Pseudometrik, 177

Punktmengenableitung, 134

Punktnotation (zeitliche Ableitung), 408

Quadrik, 334

Quelle, 320

quellfrei, 320

Quotientenregel, 287

Rand, 137, 192

Randpunkt, 137

rationale Stützstellen, 64

Rayleigh-Quotient, 352

rechtsseitige Stützstellen, 20

Regelfunktion, 59

Regelintegral, 60

regulär, 250

regulär offen, 559

rektifizierbar, 258

Rektifizierbarkeitsbedingung, 258

relativ abgeschlossen, 152

relativ offen, 151

relativ zu, 152

Restglied, 95

Richtungsableitung, 314

Richtungsfeld, 410

Riemann-Integral, 22, 456

Riemann-integrierbar, 22, 219, 456

Riemann-Summe, 21, 456

Ring, 45

Rotation, 322

Rotationsfläche, 468f

Rotationsparaboloid, 486

Rückwärtsintegral, 22

Sägezahnfunktion, 382

Sattelfläche, 486

Satz von Bolzano-Weierstraß, 213

Satz von Heine, 218, 234

Satz von Heine-Borel, 214, 224

Satz von Lennart Carleson, 377

Satz von Parseval, 395

Satz von Peano, 329

Satz von Taylor, 95, 330, 337

Schachtelungsprinzip, 192, 222

Schmiegequadratik, 334

schnell fallend, 399

Schnittwinkel, 251

Schwartz-Funktion, 399

Schwartz-Raum, 399

Schwingungsdauer des Pendels, 447

Sektorformel von Leibniz, 529

Semimetrik, 177

Seminorm, 177

Senke, 320

separabel, 199

Serviettenring, 541

Sierpinski-Dreieck, 240

singulär, 250

Sinus Amplitudinis, 503

Skalarprodukt, 385

Skalierung, 167

Skalierungsregel, 89

Spaltensummennorm, 174, 562

Spaltenvektoren, 280

Spektralnrm, 174, 286

Spirale, 263

Sprungfunktion, 380

Spur einer Kurve, 246

Stammfunktion, 71, 318

Stammfunktion des Sekans, 93

Startpunkt einer Kurve, 246

sternförmig, 326

stetig, 182, 205

stetig differenzierbar, 303

stetig erreichbar, 198

stetig partiell differenzierbar, 297

stetiger Pfad, 197
 Stetigkeitsmenge, 159
 Strecke, 289
 Streckung, 130
 strenge Monotonie des Integrals, 147
 stückweise stetig, 53
 stückweise (stetig) differenzierbar, 270, 374
 Stützstellen, 19, 455
 stützstellenfreie Partition, 37
 Substitutionsregel, 86
 Summenmetrik, 165f
 Supremumsmetrik, 165
 Symmetrie, 126, 164, 177
 System von Differentialgleichungen, 427

Tangentialebene, 283
 Tangentialraum, 348
 Tangentialvektor, 250
 Tautochrone, 450
 Taylor-Polynom, 331
 Teufelstreppe, 143
 Thomae-Funktion, 159
 Topologie, 201
 topologisch äquivalent, 194
 topologischer Raum, 201
 Torus, 541
 total beschränkt, 229
 totale Ableitung, 286
 totale Differenzierbarkeit, 281
 Transformationsformel, 481
 Translation, 130
 Translationsregel, 88
 Trennungseigenschaft, 206
 Treppenfunktion, 49
 trigonometrische Reihe, 358
 trigonometrisches Polynom, 358

Ueberdeckung, 209
 Überschwinger, 380
 Umfang einer Ellipse, 264
 Umgebung, 129, 152, 191
 umgebungsstetig, 182
 umparametrisierte, 247
 Umrechnung von Polarkoordinaten, 479
 unbestimmtes Integral, 75
 uneigentliches (Riemann-) Integral, 103
 Ungleichung von Cauchy-Schwarz, 365, 386
 uniforme Metrik, 165
 Unterintegral, 38
 Untersumme, 37

Vandermondsche Determinante, 434
 Variation, 55, 266
 Variation der Konstanten, 413
 Variationsfunktion, 55
 Vektorfeld, 279, 317
 Vektoriteration, 353
 Verband, 45
 Verfeinerung, 39, 548
 Vertauschungssatz (Limes und Integration), 65, 67
 Vertauschungssatz (parameterabhängige Integrale), 306
 Vertauschungssatz (Limes und Ableitung), 97
 Vertauschungssatz von Schwarz (mehrfache partielle Ableitung), 304
 Vervollständigung, 181
 vollständig, 178
 Vollständigkeitsrelation, 391
 Volumen, 457
 Volumen einer Kugel, 461
 von a bis b, 24

Wallis-Produkt, 85
 Weg, 247
 Wegintegral, 274
 wegzusammenhängend, 197
 Wegzusammenhangskomponente, 198
 Windungsfeld, 327
 Winkel, 251
 Wirbelfeld, 322
 wirbelfreier Punkt, 322
 Wronski-Determinante, 432
 Würfelverdopplung (Delisches Problem), 111

Zackenfunktion, 378
 Zeilensummennorm, 174, 562
 Zerlegungspunkte, 19, 455
 Zielpunkt einer Kurve, 246
 Zissoide des Diokles, 110
 Zufallsvariable, 516
 zugeordnete Treppenfunktion, 50f
 zusammenhängend, 196
 Zusammenhangskomponente, 129, 197
 2-Seminorm, 386
 zwischen zwei Punkten liegend, 337
 Zwischenwertsatz, 156
 Zykloide, 261
 Zykloidenpendel, 445
 Zylinder, 541
 Zylinderkoordinaten, 480